

Функции очень многих переменных (математические и физические аспекты)

В.А.Зорич

Аннотация

Здесь рассмотрены и соединены некоторые факты, известные физикам и математикам порознь. Мы напомним связь классической термодинамики с геометрией распределений, а статистической термодинамики с многомерной геометрией. Напомним кое-что о специфических свойствах функций очень многих переменных и продемонстрируем, как эти свойства реализуются в физических явлениях.

СОДЕРЖАНИЕ

- I. Классическая термодинамика и контактная геометрия.
- II. Статистическая термодинамика и многомерная геометрия.
- III. Многомерная геометрия и эффекты концентрации меры.
- IV. Энтропия в классической и статистической термодинамике.
- V. Пример подсчёта энтропии и каноническое распределение.
- VI. Статистики, порождаемые физикой.
- VII. Некоторые физические следствия.

Вводный комментарий

Немного надув щёки и сделав вид, что мы умнее физиков, которые во всём этом разбирались пару столетий, расскажем, как некоторые их труды выглядят с точки зрения математики.

Хорошо зная этот математический приём, В.И.Арнольд, помнится, где-то писал примерно следующее: Аксиоматический метод имеет преимущества, схожие с преимуществом воровства перед обычным трудом.¹

Мы здесь даже не приведём физических формулировок законов термодинамики, которые обязан знать каждый физик. А слова «энергия», «вечный двигатель» знают и обыватели. Кто-то даже слышал, что вечного двигателя, вроде бы, не бывает. Термодинамика того же мнения.

После двух-трёх вводных слов мы сразу перейдём на родной для математиков формальный язык. Центральным объектом нашего внимания, в связи с которым появится обсуждаемая математика, будет функция энтропии состояния термодинамической системы. Она порождается вторым началом термодинамики и в математическом аспекте ему адекватна.

Мы увидим эту функцию сначала в классической термодинамике, и поясним, как её существование связано с геометрией распределений гиперплоскостей в пространстве и интегрируемостью распределений.

Затем (и это главное) посмотрим на неё с точки зрения статистической термодинамики, и увидим, как она связана с многомерной геометрией и нелинейным законом больших чисел, когда функция, зависящая от очень многих равноправных переменных (например, молекул), оказывается практически постоянной с точки зрения наблюдателя, измеряющего значения функции в случайных точках её области определения.

Наконец, хотя только вскользь, проследим некоторые статистические идеи Максвелла, Больцмана и Гиббса, доведя их до распределений Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.

Изложение будет тезисное. Мы будем перемещаться по знакомым или, по крайней мере, известным фактам. Они не нуждаются в подробном описании. Такое описание заинтересованный читатель может найти в доступной литературе (частично указанной в конце текста). Наша цель состоит в соединении обсуждаемых фактов физики и математики. Иногда даже простое соединение (типа $2H + O$) бывает полезно.

¹Б.А.Хесин, ученик В.И.Арнольда, напомнил мне, что в книжке «Теория катастроф» В.И.Арнольд приводит и развивает близкое высказывание Бертрانا Рассела.

I. Классическая термодинамика и контактная геометрия.

Равновесное термодинамическое состояние.

Пример уравнения состояния идеального газа $PV = cT$.

Закон сохранения энергии на примере газа в цилиндре с поршнем:

$$\delta Q = dE + PdV.$$

В термодинамически равновесном состоянии внутренние параметры состояния системы (здесь газа) оказываются функциями внешних параметров (здесь он один — объём) и единственного внутреннего параметра — температуры.

Таким образом, в этой формуле $E = E(T, V)$, $P = P(T, V)$.

Второе начало классической термодинамики и энтропия.

Второе начало термодинамики, открытое Карно (1824), трудами Клаузиуса свелось к тому, что для любого термодинамического цикла

$$\int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

а для обратимого цикла — замкнутой кривой γ в пространстве равновесных состояний, имеет место замечательное равенство

$$\int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

где δQ — форма притока тепла, а T — температура.

Значит, имеется такая функция состояния S , названная в 1865 году Клаузиусом *энтропией*, что $\frac{\delta Q}{T} = dS$ и $\delta Q = TdS$. Тогда равенство $\delta Q = dE + PdV$ приобретает вид

$$TdS = dE + PdV.$$

Контактная форма Гиббса.

Если вслед за Гиббсом ввести форму

$$\Omega = TdS - PdV - dE,$$

то можно сказать, что любой равновесный термодинамический процесс нашей системы (газа) идёт вдоль нулей (ядер $\ker \Omega$) формы Ω . А все равновесные состояния газа живут на двумерном лежандровом многообразии этого распределения в пространстве \mathbb{R}^5 переменных $S, P, E, (T, V)$.

Отсюда связи классической термодинамики с контактной геометрией.

Неголономные связи (конёк, парковка автомобиля).

Например, конёк на плоскости живёт в \mathbb{R}^3 : $\omega = \sin \varphi dx - \cos \varphi dy$.

Соединимость состояний при неголономных связях и (не)интегрируемость соответствующих распределений.

Обобщение, формализация и конкретизация.

Формализация определения термодинамической системы (форма притока тепла)

$$\omega := dE + \sum_{i=1}^n A_i da_i.$$

$$E = E(\tau, a_1, \dots, a_n), \quad A_i = A_i(\tau, a_1, \dots, a_n).$$

Аксиома Каратеодори об адиабатической (вдоль $\{\ker \omega\}$) несоединимости термодинамических состояний и её математическое оформление.

Теорема Каратеодори (Пуанкаре – Каратеодори) и энтропия:
(Нет соединимости) \Leftrightarrow (Есть интегрируемость. $\exists S : \omega = \tau dS$).

Геометрия: Распределение гиперповерхностей в пространстве; допустимые пути и интегральные (лежандровы) подмногообразия; соединимость состояний (точек пространства) допустимыми путями и (не)интегрируемость распределения.

$$\Omega := \tau dS - \sum_{i=1}^n A_i da_i - dE.$$

(Фробениус, Гиббс, Пуанкаре, Каратеодори, Борн, Рашевский, Чоу...)

II. Статистическая термодинамика и многомерная геометрия.

Некоторые напоминания.

Шар единичного объёма в \mathbb{R}^n и асимптотика его радиуса.

Напомним, что объём v_n единичного n -мерного шара (шара единичного радиуса) в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n выражается формулой

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Из этой формулы находим следующую асимптотику радиуса r_n шара единичного объёма в \mathbb{R}^n при $n \gg 1$

$$r_n \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} = O(\sqrt{n}).$$

Шар и сфера в термодинамике.

В стандартных условиях естественно считать, что совокупная кинетическая энергия

$$E_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m v_i^2$$

молекул газа пропорциональна их количеству n , т.е. $E_n = En$, где E — средняя кинетическая энергия молекул (которая, напомним, пропорциональна температуре газа). Соотношение

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{2E}{m} n.$$

определяет сферу радиуса $\sqrt{\frac{2E}{m} n}$ в пространстве \mathbb{R}^{3n} .

Проекция шара на прямую и распределение Максвелла.

Будем теперь рассматривать шар и сферу радиуса порядка \sqrt{n} . Конкретнее, пусть радиус шара равен $\sigma\sqrt{n}$. Пусть в этом шаре равномерно распределена единичная масса (мера).

Если проектировать такой шар (его вероятностную меру) на прямую, то в пределе при $n \rightarrow \infty$ на прямой возникнет нормальное распределение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ весь объём шара концентрируется около его граничной сферы, то тот же результат получится если сферу радиуса $\sigma\sqrt{n}$, наделённую равномерной вероятностной мерой, проектировать на прямую.

Это, с одной стороны, даёт некоторую геометрическую интерпретацию ЦПТ теории вероятностей. С другой стороны, учитывая предыдущие замечания о молекулярном газе, даёт нормальное распределение

компонент скоростей молекул газа (впервые открытое Максвеллом), а в пересчёте к кинетической энергии даёт распределение Максвелла молекул по уровню их кинетической энергии при фиксированной температуре газа. С точностью до нормирующего множителя, такое распределение Максвелла в современных обозначениях имеет вид

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right),$$

где ε — кинетическая энергия молекулы, T — температура газа, а k — размерная постоянная (которую, следуя Планку, называют постоянной Больцмана).

Мы так привыкаем к фундаментальным фактам, что часто перестаём удивляться их открытию. Ведь, казалось бы, в состоянии равновесия газа молекулы, хоть и слабо, но долго повзаимодействовав, равномерно распределяют совокупную энергию. Надо быть Максвеллом, чтобы задать себе вопрос, на первый взгляд безнадежный, о том, как же на самом деле в равновесном газе распределены молекулы по их скоростям. Более того, не только поставить этот безнадежный вопрос, но и найти не одно, а несколько подтверждающих друг друга его решений!

(Замечание о применении термодинамических моделей в экономике.)

Постоянство функций очень многих переменных.

Мы напомнили распределение Максвелла и геометрическую интерпретацию центральной предельной теоремы теории вероятностей. Отметим ещё, что наблюдение стабильности значений таких термодинамических функций как давление или температура газа, зависящих от огромного числа переменных (молекул), приводит к адекватным математическим теоремам, обобщающим классический закон больших чисел.

Почему функции очень многих равноправных переменных практически постоянны с позиции наблюдателя, вычисляющего их значения в случайных точках области определения? Поясним это на примере липшицевых функций на многомерной сфере.

Пусть M_f — медианное значение функции $f \in \text{Lip}(S^n, \mathbb{R})$, а L — константа Липшица, и пусть μ — равномерная вероятностная мера на единичной сфере S^n .

Справедлива следующая оценка:

$$\Pr_n\{|f(x) - M_f| > \varepsilon\} < 2 e^{-(\varepsilon/L)^2 n/2}.$$

При этом стандартное отклонение величины $|f(x) - M_f|$ от нуля, если $n \gg 1$, будет порядка L/\sqrt{n} .

В случае, когда функция f определена на сфере радиуса r , дробь ε/L заменится на ε/rL , а стандартное отклонение значений функции от M_f будет порядка Lr/\sqrt{n} .

Это нелинейный вариант закона больших чисел. В его основе лежит эффект концентрации меры, наблюдаемый в пространствах большой размерности. Мы уже отмечали, что почти весь объём многомерного шара находится в малой окрестности граничной сферы. В свою очередь почти вся площадь сферы сосредоточена в малой окрестности экватора. Благодаря изопериметрическому неравенству на этом основании можно заключить, что почти вся площадь сферы тем более содержится в малой окрестности медианного значения функции $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$. Отсюда и следует указанная выше оценка стабилизации значений липшицевых функций на многомерной сфере.

III. Многомерная геометрия и эффекты концентрации меры.

Эту тему мы только что затронули выше. Не будем расширять её обсуждение за пределы того, что нам здесь сейчас было необходимо.

Этой теме посвящено много математических работ и даже книг. Некоторые из них будут указаны в списке литературы.

IV. Энтропия в классической и статистической термодинамике, принцип Больцмана.

Второе начало равновесной термодинамики в форме Карно—Клаузиуса

$$\int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

и существование функции термодинамического состояния S , названной Клаузиусом *энтропией*.

Её характерные свойства:

Аддитивность совместной энтропии термодинамической системы, состоящей из независимых частей (подобно аддитивности энергии).

Направленность эволюции изолированной термодинамической системы (например, выравнивание температур двух контактирующих тел, когда одно остывает, другое нагревается) сопровождается ростом энтропии системы.

Идея Больцмана сопоставить классической энтропии логарифм вероятности соответствующего термодинамического состояния:

Вероятности независимых событий перемножаются, а логарифм даст аддитивность.

Тенденция переходить от менее вероятного состояния к более вероятному соответствует упомянутой тенденции роста энтропии состояния при эволюции к равновесию.

Максимум такой энтропии соответствует равновесному состоянию системы. Около него концентрируется почти всё множество микросостояний многочастичной системы!

Формула Больцмана (выгравированная на его могиле)

$$S = k \log W.$$

Здесь k — размерная постоянная (отношение R/N_A газовой постоянной и числа Авогадро), названная Планком *постоянной Больцмана*, а W — целочисленная величина, пропорциональная вероятности рассматриваемого термодинамического состояния, которую, следуя Планку, называют *статистическим весом состояния*. В немецкой литературе вместо W обычно пишут G (от немецкого Gewicht — вес).

Переход между величинами, пропорциональными вероятности состояния, изменяет энтропию на константу, которая не влияет на разность энтропий, а именно разность и бывает нужна при сравнении состояний.

V. Пример подсчёта энтропии и каноническое распределение.

Следуя Шрёдингеру, рассмотрим ансамбль из N одинаковых, но перенумерованных систем, каждая из которых может находиться в одном из перенумерованных состояний $1, 2, \dots, l, \dots$. Пусть $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_l \leq \dots$ — значения энергии индивидуальной системы в этих состояниях и $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ — количество систем ансамбля, находящихся в состояниях $1, 2, \dots, l, \dots$ соответственно.

Такой набор $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ может реализоваться многими способами. А точнее, число способов равно $\binom{N}{a_1} \binom{N-a_1}{a_2} \cdot \dots \cdot \binom{N-a_1-\dots-a_{l-1}}{a_l}$, т.е.

$$G = \frac{N!}{a_1! a_2! \dots a_l! \dots} .$$

Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ должна удовлетворять условиям

$$\sum_l a_l = N , \quad \sum_l \varepsilon_l a_l = E ,$$

где E — полная совокупная энергия систем ансамбля.

Будем искать максимальное значение G (или $\ln G$) при указанных ограничениях, что даст нам наиболее вероятный набор $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ чисел заполнения.

(Поясним, что в интересных для термодинамики случаях, когда число N и количество возможных уровней энергии ε_l очень велики, имеет место *явление концентрации*. Можно показать, что общее число всех возможных при наших условиях состояний ансамбля почти совпадает с максимальным значением G , которое мы намерены искать. Значит, мы действительно найдем и наиболее вероятный набор $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ чисел заполнения.)

При больших значениях n по формуле Стирлинга $n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Поэтому можно считать что $\ln(n!) \approx n(\ln n - 1) \approx n \ln n$.

а. Действуя методом Лагранжа отыскания условного экстремума, записав, что

$$\sum_l \ln a_l da_l + \lambda \sum_l da_l + \nu \sum_l \varepsilon_l da_l = 0 ,$$

находим, что при любом l выполняется равенство

$$\ln a_l + \lambda + \nu \varepsilon_l = 0 \quad \text{и, значит,} \quad a_l = e^{-\lambda - \nu \varepsilon_l} ,$$

причем λ и ν подчинены условиям

$$\sum_l e^{-\lambda - \nu \varepsilon_l} = N , \quad \sum_l \varepsilon_l e^{-\lambda - \nu \varepsilon_l} = E .$$

б. Обозначая через $E/N = U$ среднюю энергию, приходящуюся на одну систему ансамбля, запишем полученный результат в следующем

виде:

$$\frac{E}{N} = U = \frac{\sum_l \varepsilon_l e^{-\nu \varepsilon_l}}{\sum_l e^{-\nu \varepsilon_l}} = -\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \sum_l e^{-\nu \varepsilon_l} ,$$

$$a_l = N \frac{e^{-\nu \varepsilon_l}}{\sum_l e^{-\nu \varepsilon_l}} = -\frac{N}{\nu} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_l} \ln \sum_l e^{-\nu \varepsilon_l} .$$

Дополнительные рассмотрения, выясняющие физический смысл величины ν в термодинамической ситуации, приводят к тому, что

$$\nu = \frac{1}{kT} ,$$

где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура.

с. Обозначим через $E/N = U$ среднюю энергию, приходящуюся на одну систему. Возникает, как мы уже понимаем, важная величина, называемая *статистической суммой*:

$$Z = \sum_l e^{-\frac{\varepsilon_l}{kT}} .$$

Теперь можно написать, как именно числа заполнения распределены по энергетическим уровням при данной абсолютной температуре:

$$a_l = N \frac{e^{-\frac{\varepsilon_l}{kT}}}{Z} .$$

Величина

$$Z^{-1} e^{-\frac{\varepsilon_l}{kT}}$$

это вероятность малой системе оказаться в состоянии с энергией ε_l .

Эволюция распределения Максвелла (Максвелл, Больцман, Гиббс) и *Каноническое распределение Гиббса*

$$e^{\frac{\psi - \varepsilon_l}{kT}}$$

малой системы в термостате. Здесь введено обозначение $e^{\frac{\psi}{kT}} = Z^{-1}$. (Заметим, что величина ψ имеет физический смысл так называемой свободной энергии системы $\psi = E - TS$.)

VI. Статистики, порождаемые физикой.

Напомним термодинамический парадокс Гиббса об изменении энтропии двух идеальных газов в цилиндре, разделённых двумя перегородками, каждая из которых проницаема для одного газа и непроницаема для другого. (Формула энтропии моля идеального газа $S = c_v \ln T + R \ln V$.)

Тождественные частицы, различимые и неразличимые. Разница статистик состояний тождественных частиц.

(Пример расселения жильцов по комнатам, когда каждый имеет имя, когда имён нет, когда два жильца в одной комнате не уживаются.)

Бозоны и фермионы в квантовой механике.

Статистики Бóзе — Эйнштейна и Фёрми — Дира́ка.

Результаты расчёта распределения соответствующих частиц в равновесном состоянии системы.

Среднее число фермионов на одно квантовое состояние

$$\langle n_i \rangle_{Fermi} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

В случае бозонов их среднее число на одно квантовое состояние описывается формулой

$$\langle n_i \rangle_{Bose} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) - 1}.$$

Различие статистик бозонов и фермионов, очевидно, относится к конфигурациям, состоящим более чем из одной частицы. Если же $\langle n_i \rangle \ll 1$, то в формулах для $\langle n_i \rangle_{Fermi}$ и $\langle n_i \rangle_{Bose}$ можно пренебречь единицами в знаменателе. Различие этих статистик пропадает и мы возвращаемся к классическому случаю

$$\langle n_i \rangle_{\langle n_i \rangle \ll 1} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right).$$

VII. Некоторые физические следствия.

Поведение $\langle n_i \rangle_{Bose}$ при $T \rightarrow 0$.

Конденсат Бозе—Эйнштейна и сверхтекучесть.

(Пророчество Эйнштейна 1925. Реализация и Нобелевская премия реализаторам 1995, через 40 лет после смерти Эйнштейна.)

Заключительные замечания.

Классическая термодинамика (благодаря Гиббсу, Пуанкаре, Каратеодори,...) оказалась тесно связанной с контактной геометрией, распределениями и их интегрируемостью. Подробности можно посмотреть в источниках [1]—[9].

Статистическая термодинамика тесно связана с многомерной геометрией. (См., например, источники [10]—[13].) Она демонстрирует (хотя и не всегда очевидное) проявление замечательного свойства функций очень многих переменных стабилизировать свои значения (оказываться практически постоянными) с точки зрения наблюдателя, измеряющего значения функции в случайных точках её области определения. Это нелинейный закон больших чисел. (См., например, источники [14]—[18].)

Эффект концентрации меры лежит в основе самого статистического определения энтропии, данного Больцманом. Это именно то, что, характеризуя устойчивость энтропии Больцмана, Лоренц в [10] обозначил словом «нечувствительность» формулы Больцмана.

Наконец, последнее, о чём редко спрашивают математики, но, что всегда интересуется физиков: область действия модели. Например, какова область применимости распределения Максвелла, с которого начинался наш разговор? Ответ на этот вопрос, конечно, дан, и он требует рассмотрений, включающих принцип неопределённости Гейзенберга.

В общих чертах этот ответ выглядит следующим образом.

Пусть n — число молекул газа в единице объёма, а p — средняя величина импульса молекул. Газ можно считать классическим (невыврожденным), если $n(h/p)^3 \ll 1$, где h — постоянная Планка.

Величина $\lambda = h/p$ имеет размерность длины и называется *длиной волны де Бройля*. В терминах величин n и λ условие, при котором газ можно рассматривать как классический, сводится к неравенству $n\lambda^3 \ll 1$. Это означает, что среднее число частиц в объёме λ^3 должно быть много меньше единицы.

Для оценки порядка величины $\lambda = \frac{h}{mv}$ в случае классического газа можно воспользоваться связью $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ средней кинетической энергии молекул и абсолютной температуры газа. В этом случае $\lambda^3 = \frac{h^3}{m^3v^3} = \frac{h^3}{m^3(3kT/m)^{3/2}} = \frac{h^3}{(3kTm)^{3/2}}$, и условие $n\lambda^3 \ll 1$ равносильно тому, что $T \gg T_g$,

где $T_g = \frac{h^2}{3km}n^{2/3}$. Величина T_g называется *температурой вырождения* конкретного газа, рассматриваемого как классический. Газы, температура которых ниже их температуры вырождения, называют *вырожденными*.

Если воспользоваться данными физических измерений, то можно получить представление о температуре вырождения различных привычных и непривычных газов.

Привычные газы при нормальных условиях весьма далеки от вырождения. А вот для газа электронов в серебре $T_g \approx 6,5 \cdot 10^4$ К. Поскольку при такой высокой температуре металл уже теряет свою структуру твёрдого тела, то можно считать, что электронный газ в металле всегда вырожден.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Второе начало термодинамики. — М.-Л.: Гостехиздат, 1934. Сб. работ: С. Карно, В. Томсон-Кельвин, Р. Клаузиус, Л. Больцман, М. Смолуховский.

[2] *C. Carathéodory*, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. *Mathematische Annalen*, **67**, 355–386, (1909). [Включено в *Constantin Carathéodory*, *Gesammelte Mathematische Schriften*, München 1955. Zweiter Band, S. 131–166.]

Имеется пер. на рус. яз.:

К. Каратеодори, Об основах термодинамики. «Развитие современной физики». Сб. статей. — М.: Наука, 1964. С. 188–222.

[3] *H. Poincaré*, *Thermodynamique*. Deuxième édition, revue et corrigée. Paris. Gautier-Villar, 1908.

Имеется пер. на рус. яз.:

А. Пуанкаре, Термодинамика. — М., Ижевск: Изд. РХД, 2005.

[4] *M. Born*, Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik, *Phys. Z.* **22** (1921), 282–286.

Имеется пер. на рус. яз.:

М. Борн, Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. «Развитие современной физики». Сб. статей. — М.: Наука, 1964. С. 223–257.

- [5] *М.Л. Леонтович*, Введение в термодинамику. Статистическая физика. — М.: Наука, 1983.
- [6] *V.I. Arnold*, Contact geometry: the geometrical method of Gibbs's thermodynamics. Proceedings of the Gibbs Symposium Held at Yale University, New Haven, Connecticut, May 15–17, 1989. American Mathematical Society, Providence RI; American Institute of Physics, New York, 1990. PP. 163-179
- [7] *А. Картан*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
- [8] *В.В. Козлов*, Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. — М., Ижевск: Изд. РХД, 2002.
- [9] *В.А. Зорич*, Математические аспекты классической термодинамики, М.: МЦНМО, 2019,
- [10] *Г.А. Лоренц*, Статистические теории в термодинамике. — М., Ижевск: Изд. РХД, 2001.
- [11] *Э. Шрёдингер*, Лекции по физике. — М., Ижевск: Изд. РХД, 2001.
- [12] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Статистическая физика. — М.: Наука, 1964.
- [13] *Д.В. Сивухин*, Общий курс физики, Том II, термодинамика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1975.
- [14] *V.D. Milman*, Geometrization of Probability // Progress in Mathematics. 2008. V. 265, <http://www.math.tau.ac.il/~milman/>.
- [15] *K. Ball*, An elementary introduction to modern convex geometry. — Flavors of Geometry. Ed. by S. Lévy. Cambridge Univ. Press, 1997, p. 1–58. (Math Sci. Res. Inst. Publ., v. 31.)
- [16] *M. Talagrand*, Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product Spaces. I.H.E.S. Publications Mathématiques, 81: 73-205, 1996.
- [17] *Ramon van Handel* (2014) Probability in High Dimension. Lecture Notes. Princeton University.
- [18] *V. Zorich*, Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences. Berlin: Springer, 2011, 135 p. Дополненный перевод на английский язык книги: *Зорич В.А.* Математический анализ задач естествознания. М.: МЦНМО, 2008, 135 с.