Относительность своими руками

В.А. Зорич

Аннотация

Идеи теории относительности в наше время являются общим элементом естественнонаучного мировоззрения.
Математический аппарат специальной теории относительности доступен уже студентам начальных курсов мехмата. Он может служить красивой и содержательной частью упражнений по аналитической геометрии, линейной алгебре и анализу. Ниже дан вариант такого включения. Его можно использовать по обстоятельствам: систематически последовательно или выборочно, фрагментарно.

I. В теме Координаты и Линейные преобразования.
Различные системы координат и преобразования координат.
Линейные преобразования на плоскости.
Изометрии евклидовой плоскости.
Преобразования Галилея.
Постулаты специальной теории относительности (СТО).
Физический и геометрический смысл интервала.
Сохранения интервала и изотропных (световых) направлений.
Вывод преобразования Лоренца. (Самостоятельно или [1], с. 137.)
Индефинитная метрика и вращения в плоскости Минковского.
Наглядная геометрия событий:
одновременные события, события в одном месте, мировая линия, причинность. Инвариантность причинной зависимости событий и относительность одновременности и одноместности.
Пересчёты времени и длин:
собственное время и собственная длина; сохранение объёма (и подтверждение через якобиан преобразования Лоренца).

II. В теме Графики функций.

График функции $\sin x: \ \sin ax, \sin(x+b), \sin(ax+b), A\sin x + B$.
Движемся вдоль оси x со скоростью v. Наблюдаем в окно вагона график функции $\sin x$. Волна бежит.
Взяты две системы координат: одна неподвижная относительно земли, а другая связанная с вагоном. Опишите связь координат одной и той же точки плоскости в этих различных системах координат.
Как запишется график функции $\sin x$ в системе координат вагона?
Это волна, которая перемещается относительно вас.
Итак, если t — время, то, например, $\cos(\omega t - kx)$ — волна, которая не стоит, а распространяется.
Фаза $(\omega t - kx)$ волны в радианах и скорость её изменения на единицу времени и на единицу длины.
Геометрический и физический смысл коэффициентов ω и k.
Длина волны, частота, скорость распространения, волновое число, взаимосвязь. Частота (в 1/с) и круговая (циклическая) частота (в радианах) рад/с. Размерности ω рад/с и k рад/м.
Запись волны $\cos(\omega t - kx)$ в другой инерциальной системе координат.
Преобразование частоты и волнового числа (волнового вектора).
Запись $\cos(\omega t - kr)$ плоской волны в пространстве и волновой вектор.

III. В теме Дифференцирование.

Дифференцирование преобразования Лоренца.
Связь записей вектора скорости движения точки в двух системах координат.([1], с. 141.)
Релятивистская формула сложения скоростей.
Примеры конкретных применений.
Запись волны $\cos(\omega t - kx)$ в другой инерциальной системе координат.
Преобразование частоты и волнового вектора.
Пересчёт направления движения и аберрация ([1] с. 142, [2] с. 150.)
Эффект Допплера и расширение Вселенной. ([1] с. 227, [2] с. 145.)

Литература

[**1**] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. М., Наука, (1969). (С. 142, 227).

[**2**] Р. Фейнман. Фейнмановские лекции по физике. Книга 3 (излучение, волны, кванты). Москва, Изд-во Мир, 1965. (С. 145, 150).

Конкретизация возможной реализации

I.

Инерциальная система отсчёта та, в которой движение свободной частицы прямолинейно и равномерно. Значит, при соответствии начал координат, переходы от одной инерциальной системы координат к другой должны быть линейными. (Простое упражнение.)

Экспериментально установлено и принято в качестве постулатов специальной теории относительности, что скорость света во всех инерциальных системах координат одинакова (обозначение c), и не зависит от движения излучающего свет объекта.

Это, с одной стороны, отрицает мгновенность взаимодействий и неизменность шкалы времени во всех инерциальных системах координат (что предполагалось в механике Ньютона и преобразованиях Галилея), а, с другой стороны, это означает, что если $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ в одной инерциальной системе координат (где t — время, а x, y, z евклидовы пространственные координаты), то такое же равенство должно быть выполнено и в любой другой инерциальной системе координат с совпадающим началом. (Разъяснение и упражнение.)

Четверку чисел (t, x, y, z) принято называть *событием*, а величину $(c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2)^{1/2}$ называют *интервалом между двумя событиями*.

Обсуждение наглядной геометрии событий и интервала: одновременные события, события в одном месте, мировая линия, будущее и причинность, световой конус и его сохранение при переходах между координатами инерциальных систем; инвариантность причинной зависимости событий и относительность одновременности и одноместности. Инвариантность интервала.

Вывод преобразований Лоренца в двумерном случае (t, x), исходя из линейности и сохранения изотропных (световых) направлений или прямо из того, что если $(ct)^2 - x^2 = 0$ в одной инерциальной системе координат, то в другой должно быть выполнено такое же равенство при нормировке совпадения начал. (Упражнение или воспроизведение из книжки.)

Получаем формулы связи координат (t, x, y, z) и $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ точки (события) в двух инерциальных системах отсчёта при условии совпадения их начал, сонаправленности одноимённых осей координат и равномерном движении одной из систем вдоль оси x другой.

Используя гиперболические функции (с их свойством $\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi =$

1), найденные соотношения можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
x &= \operatorname{ch}\varphi\,\tilde{x} + c\operatorname{sh}\varphi\,\tilde{t}, & \tilde{x} &= \operatorname{ch}\varphi\,x - c\operatorname{sh}\varphi\,t,\\
t &= \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\,\tilde{x} + \operatorname{ch}\varphi\,\tilde{t}, & \tilde{t} &= -\frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\,x + \operatorname{ch}\varphi\,t.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

считая, что остальные координаты совпадают ($y = \tilde{y}$ и $z = \tilde{z}$).

Чтобы уяснить себе, каким образом определяется свободный параметр φ, вспоминаем, что ось $\tilde{x}$ движется с некоторой постоянной скоростью v вдоль оси x, т. е. точка $\tilde{x} = 0$ оси $\tilde{x}$, наблюдаемая из системы (t, x), имеет скорость v. Полагая в первом из преобразований (1) $\tilde{x} = 0$, деля первое уравнение на второе, находим

$$
\frac{x}{t} = v = c\,\operatorname{th}\varphi.
$$

С учётом этого равенства преобразования Лоренца (1) теперь можно записать в следующей более содержательной с точки зрения физики форме:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\tilde{x} + v\,\tilde{t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & \tilde{x} &= \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},\\
t &= \frac{\tilde{t} + \frac{v}{c^2}\,\tilde{x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & \tilde{t} &= \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Итак, выписаны *преобразования Лоренца.*

Если масштаб длин или времени принять таким, что $c = 1$ (или, как это делают физики, считать ct новой первой координатой события), то формулы преобразований Лоренца становятся предельно гармоничными. Это движения пространства Минковского.

Имея формулы преобразований Лоренца, теперь уже можно обсудить пересчёты времени и длин: собственное время и собственная длина; сохранение объёма (и подтверждение через якобиан преобразования Лоренца). Парадоксы и их логико-математический анализ!!!

****

После того, как преобразование Лоренца выписано, дальнейшие действия в разделах II и III уже выполняются прямыми вычислениями, требующими, однако, их понимания и правильной интерпретации получаемых результатов.

II.

Этот раздел не требует особых комментариев. Заметим только, что, записав волну $\cos(\omega t - kx)$ в новых координатах и приведя результат к виду

$$\cos(\tilde{\omega}\tilde{t} - \tilde{k}\tilde{x}) = \cos\left(\frac{\omega - kv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ \tilde{t} - \frac{k - v\omega/c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ \tilde{x}\right), \qquad (3)$$

находим весьма примечательные и совсем не очевидные формулы преобразования частоты и волнового числа (длины волны).

III.

Рассмотрим движущуюся частицу и свяжем выражения скорости частицы в двух инерциальных системах отсчёта K и $\tilde{K}$. Находясь в прежних условиях, обозначим новым символом V скорость движения инерциальной системы $\tilde{K}$ вдоль оси x системы K. Пусть $v_x = dx/dt$ ... и $\tilde{v}_{\tilde{x}} = d\tilde{x}/d\tilde{t}$ ... компоненты скорости частицы в этих системах.

Дифференцирование преобразование Лоренца даёт

$$dx = \frac{d\tilde{x} + V\,d\tilde{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad dy = d\tilde{y}, \quad dz = d\tilde{z}, \quad dt = \frac{d\tilde{t} + V/c^2\,d\tilde{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (4)$$

Отсюда, учитывая, что $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, следует, что

$$v_x = \frac{\tilde{v}_{\tilde{x}} + V}{1 + \frac{\tilde{v}_{\tilde{x}}V}{c^2}} \qquad v_y = \frac{\tilde{v}_{\tilde{y}}\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{\tilde{v}_{\tilde{x}}V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{\tilde{v}_{\tilde{z}}\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{\tilde{v}_{\tilde{x}}V}{c^2}}. \qquad (5)$$

В частности, если частица движется вдоль оси x со скоростью $\tilde{v}$ относительно системы координат $\tilde{K}$, то в системе K её скорость

$$v = \frac{\tilde{v} + V}{1 + \frac{\tilde{v}V}{c^2}}. \qquad (6)$$

Полезно проверить, что сумма скоростей никогда не превышает величины c.

(Это могло служить и правилом сложения действительных чисел.)

При $v \ll c$ или при $c \to \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея и правило сложения скоростей становится соответствующим ("классическим").

Опробуйте преобразования Лоренца на следующем простейшем примере. Объекты A и B, наблюдаемые из системы K, находятся на взаимном расстоянии c км и летят навстречу друг другу со скоростью $c/2$ км/с каждый. Разумеется, они встречаются через одну секунду. Опишите все эти параметры с точки зрения наблюдателя, связанного с системой A (расстояние до B, скорость B, время до прибытия B в A).

Затем вопросы поинтереснее.

Пусть частица движется так, что вектор её скорости в системе координат K имеет вид $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$, $v_z = 0$, а в системе координат $\tilde{K}$ имеет вид $\tilde{v}_{\tilde{x}} = \tilde{v}\cos\tilde{\theta}$, $\tilde{v}_{\tilde{y}} = \tilde{v}\sin\tilde{\theta}$, $\tilde{v}_{\tilde{z}} = 0$.

Зная закон (5) преобразования скоростей, находим следующую связь углов θ и $\tilde{\theta}$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\tilde{v}\ \sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\ \sin\tilde{\theta}}{\tilde{v}\ \cos\tilde{\theta} + V}$$

В частности, для распространения света, то есть при $v = c = \tilde{v}$, находим, что

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{\frac{V}{c}+\cos\tilde{\theta}}\ \sin\tilde{\theta}. \tag{7}$$

Значит, например, если в неподвижной системе K светящийся объект наблюдается при вертикальном положении трубы телескопа, то в системе $\tilde{K}$ тот же объект будет наблюдаться под таким углом, что $\frac{V}{c}+\cos\tilde{\theta} = 0$ Проанализируйте повнимательнее эту *аберрацию света*, меняя на противоположное направление движения системы $\tilde{K}$, а также меняя угол наблюдения θ.

При $V \ll c$ получите из формулы (7) с точностью до величин порядка V/c приближённую формулу

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\tilde{\theta}\ \left(1-\frac{V}{c\cos\tilde{\theta}}\right),$$

а также формулу

$$\tilde{\theta}-\theta = \frac{V}{c}\sin\tilde{\theta}.$$

Другой вопрос. Вспомнив формулу (3) и то, что для световой волны (которая распространяется со скоростью c) имеет место связь $k = \omega/c$ (выведите это в качестве упражнения на понятия частоты и длины волны), получите одну из равносильных формул

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega\ \sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-V/c} = \frac{\omega(1+V/c)}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \omega\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} \tag{8}$$

изменения частоты света при движении в направлении источника света ($V > 0$) или в обратном направлении. Это *эффект Допплера* (в специальном случае направления движения; общий случай упомянут ниже).

Шуточный пример:

Полицейский останавливает машину, подходит к водителю и возникает диалог.

— Мадам, Вы проехали на красный свет светофора.

— Ничего подобного, я видела зелёный свет.

— Тогда, мадам, с Вас штраф за превышение скорости.

Вслед за полицейским оцените и вы величину скорости, с которой передвигалась дама.

Формулы (8) можно получать разными способами (см. например [2] с. 145-147). Если при этом результаты окажутся разными, то вам повезло! Вы найдёте и исправите какую-нибудь систематическую ошибку в вашей трактовке явлений относительности.

Итак, если излучающий объект движется на нас, то излучаемый им свет кажется более синим (частота растёт), а если объект удаляется от нас, его свет становится более красным (частота падает). Так наблюдаемое астрономами красное смещение спектральных линий позволило заключить о текущем расширении Вселенной. Но эффект Допплера наблюдается и в быту: вспомните пронзительно высокий звук сигнала приближающегося скорого поезда и низкий звук того же сигнала, когда поезд вас миновал и удаляется.

Мы коснулись эффекта Допплера, рассмотрев его в специальном случае, когда движение происходит по линии наблюдатель — источник волн, точнее, по направлению распространения волны. Общий случай полезно рассматривать либо в продвинутом курсе линейной алгебры, если там обсуждаются тензоры и знакопеременные квадратичные формы, либо в курсе дифференциальной геометрии, где к этому добавляется детальное обсуждение метрического тензора и работа с ним.

В общем случае плоская волна в пространстве, как известно, может быть записана в виде $\cos(\omega t - kr)$, где $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки пространства, $k = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, определяющий направление распространения волны, а $kr = xk_x + yk_y + zk_z$). Фаза $(\omega t - kr) = (\frac{\omega}{c}\ ct - kr)$ — скаляр, инвариантный относительно выбора инерциальной системы координат. Набор (ct, x, y, z) — 4-вектор пространства Минковского. Он преобразуется приведёнными преобразованиями Лоренца. Но, если фаза $(\omega t - kr)$ — скаляр, а (ct, x, y, z) — 4-вектор, то $(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z)$ тоже 4-вектор пространства Минковского. (Следим за ко и контравариантными координатами векторов. Подробности см., например, в [1], с. 227.) Значит, он преобразуется по закону преобразования векторов, который нам уже известен.

Итак, находясь в инерциальной системе отсчёта K, наблюдаем источник света, который движется. Нас интересует эффект изменения частоты волны, испускаемой источником, который движется относительно наблюдателя, по сравнению с собственной частотой $\tilde{\omega}$ того же источника в системе $\tilde{K}$, в которой источник покоится.

Пусть α — угол в системе K между направлением испускания волны и направлением движения источника. Будем считать, что ось x системы K параллельна вектору скорости источника и система K движется со скоростью $-V$ относительно системы $\tilde{K}$. Поскольку $k_x = k\cos\alpha = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$, пользуясь преобразованиями Лоренца

$$\frac{\tilde{\omega}}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}\,k_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}\,k\cos\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}\,\frac{\omega}{c}\,\cos\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

окончательно находим

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}\,\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{V}{c}\,\cos\alpha}\ . \tag{9}$$

Полезно посмотреть, как меняется эта величина в зависимости от величины угла α и при $V \ll c$. Полезно также сопоставить результат (9) с формулами (3) и (8).

Заметим в заключение, что физика, снабжая математику содержательными задачами, которые порой стимулируют рождение и развитие целых областей математики, в то же самое время и по той же причине доставляет много красивых примеров применения математики. Такие примеры могут только украсить и, при не схоластическом чтении, украшают, например, курсы дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, функционального анализа.

Дополнения и замечания

***

Кажущееся противоречие.

Рассматривается прежняя ситуация, когда инерциальная система $\tilde{K}$ движется со скоростью v относительно другой такой системы K.

Согласно теории, при пересчёте от системы $\tilde{K}$ к системе K длины вдоль направления движения сокращаются в $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ раз (лоренцево сокращение), а ход времени ускоряется в $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ раз.

Вместе с тем, если какой-то объект (например, фотон) движется со световой скоростью в одной системе, то он имеет ту же скорость c и в другой системе. Но скорость равна смещению за единицу времени. Расстояние сократилось, время растянулось, а скорость не изменилась, как такое возможно?

Анализируя вывод сокращения длин, обратите внимание на концы интервала, которые считаются событиями одновременными в системе $\tilde{K}$, но они не одновременные в K. Преобразованиями Лоренца желательно провести явно пересчёт событий $(0,0)$ и $(0,c)$ системы $\tilde{K}$ в события $(0,0)$ и $(\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, c\sqrt{\frac{c+v}{c-v}})$ системы K. Теперь при делении $c\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ на $\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ действительно получаем c.

***

Полезно отобразить подвижную систему координат $\tilde{K}$ в неподвижную K преобразованием Лоренца, и проиллюстрировать всё сказанное на получающейся картинке. (См., например, А.А.Белавин, А.Г.Куликов, Р.А.Усманов. Лекции по теоретической физике. Современные лекционные курсы. МЦНМО, Москва, 2001. (с. 12))

Пусть отрезок $[0,c]$, который свет в системе $\tilde{K}$ проходит за единицу времени (секунду), задаётся своими концами — одновременными событиями $(0,0)$ и $(0,c)$ системы $\tilde{K}$. Мировые линии этих событий в системе $\tilde{K}$ — параллельные вертикальные прямые.

Образы событий $(0,0)$ и $(0,c)$ (образы концов отрезка) в системе K уже не одновременные события относительно времени t системы K, но мировые линии этих событий в системе K — параллельные прямые, хотя уже наклонные, а не вертикальные.

Если фиксировать момент времени t системы K и соответствующие две точки (t,x_1) и (t,x_2) этих мировых линий то расстояние x_2-x_1 между ними будет не c, как длина отрезка $[0,c]$ в системе $\tilde{K}$, а $c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$. (Если вместо отрезка длиной c взять в системе $\tilde{K}$ отрезок длиной L, то, разумеется, в системе K получим лоренцево сокращение $L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$.)

Но свет в системе K будет распространяться не вдоль такого отрезка, а от образа в K конца $(0,0)$ отрезка $[0,c]$ системы $\tilde{K}$, к образу другого конца $(0,c)$ того же отрезка системы $\tilde{K}$.

Это замечание должно уточнить, что имеется в виду, когда говорят о лоренцевом сокращении длин. Оно же снимает описанное выше кажущееся противоречие с постоянством скорости света.

Напомним, что когда говорят о лоренцевом сокращении длин, то в преобразованиях Лоренца (2) сравнивают только пространственные координаты, игнорируя преобразование времени. Точнее, фиксируя один и тот же момент времени $\tilde{t}$ системы $\tilde{K}$, рассматривают разность

$$x_2 - x_1 = \frac{\tilde{x}_2 + v\,\tilde{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{\tilde{x}_1 + v\,\tilde{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Здесь фигурируют лишь разности пространственных координат точек наклонных мировых линий при одинаковом моменте времени t системы K.

По той же причине и лишь в том же смысле эффект сокращения длин действует совершенно так же и при переходе от системы K к системе $\tilde{K}$.

$$\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Последние соотношения, казалось бы, противоречат друг другу, но лишь тогда, когда забывается, при каких условиях каждое из них было получено.

***

Для полного прояснения ситуации полезно ещё провести независимый от преобразований Лоренца элементарный вывод явления лоренцева сокращения длин. Например, следуя Фейнману или Белавину.

(См., например, А.А.Белавин, А.Г.Куликов, Р.А.Усманов. Лекции по теоретической физике. Современные лекционные курсы. МЦНМО, Москва, 2001. (с. 13, 14))

Рассмотрим эксперимент Майкельсона в системе отсчёта $\tilde{K}$, движущейся со скоростью v параллельно одной из осей системы отсчёта K. В движущейся системе отсчёта $\tilde{K}$ свет, пущенный в двух перпендикулярных направлениях, отразившись от зеркал, установленных на расстоянии $\tilde{L}$ от источника, возвращается к источнику одновременно, пройдя путь $2\tilde{L}$ как по вертикали, так и по горизонтали вдоль одинаковых плеч прибора.

Пусть $L_{\|}$ — вертикальный, а $L_{=}$ — горизонтальный размеры плеч двужущегося прибора с точки зрения неподвижного наблюдателя. Сопоставим времена и размеры, которые возникают у такого наблюдателя в процессе наблюдения.

При наблюдении из неподвижной системы отсчёта K

$$ct_1 = L_{=} + vt_1,$$

когда свет бежит в направлении движения системы $\tilde{K}$, и

$$ct_2 = L_{=} - vt_2,$$

когда свет бежит в обратном направлении.

В перпендикулярном направлению движения системы $\tilde{K}$, с точки зрения неподвижного наблюдателя, свет распространяется по ломаной, состоящей из двух наклонных отрезков. Если $2t_3$ — общее время, за которое свет проходит эту ломаную, то, используя теорему Пифагора и постоянство скорости света в любой инерциальной системе отсчёта, находим, что $c^2t_3^2 = L_{\|}^2 + v^2t_3^2$ и

$$2t_3 = \frac{2L_{\|}}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Учитывая, что

$$2t_3 = t_1 + t_2 \ ,$$

из выписанных выключных соотношений последовательно находим

$2ct_3 = 2L_{=} + v(t_1 - t_2)$,

$c(t_1 - t_2) = 2vt_3$,

$2ct_3c = 2L_{=} + 2\frac{v^2}{c}t_3$,

$L_{=} = t_3(c - \frac{v^2}{c})$,

откуда следует, что

$L_{=} = L_{\|}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

Но поперечный масштаб меняться не может (в противном случае, как легко видеть, будет нарушен принцип относительности, согласно которому физические явления и физические законы одинаковы во всех таких системах). Значит, $L_{\|} = \tilde{L}$. А тогда

$$L_{=} = \tilde{L}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\ ,$$

и мы приходим к формуле лоренцева сокращения длин, которое возникает в направлении движения системы $\tilde{K}$ при наблюдении из неподвижной системы K.

Можно обратить внимание на то, что в проведённом рассуждении мы пользовались только временем неподвижного наблюдателя и постоянством скорости света c в любой инерциальной системе отсчёта. Но из полученного результата с учётом постоянства скорости света и равенств $\tilde{L}/\tilde{t} = c = L_{=}/t$, казалось бы, сразу следует связь

$$t = \tilde{t}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\ .$$

шкал времени в системах отсчёта $\tilde{K}$ и K

А на самом деле правильная связь такая:

$$\tilde{t} = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\ .$$

В чём дело? Где ошибка?

Если же вспомнить соотношение $2t_3 = \frac{2L_{\|}}{\sqrt{c^2 - v^2}}$, а также то, что $L_{\|} = \tilde{L}$ и $\tilde{L}/c = \tilde{t}_3$, приходим к правильному заключению: $\tilde{t} = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

Найденные законы изменения масштабов длин и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, разумеется, немедленно следуют из преобразований Лоренца (2). Если последовательно в правом верхнем равенстве фиксировать t, а в левом нижнем $\tilde{x}$, то, дифференцируя (или беря разности), сразу получим

$$d\tilde{x} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \qquad dt = \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}\ .$$

Надо только правильно интерпретировать проделанные действия, чтобы понимать, что, где фиксировалось, и какая при этом из систем считалась покоящейся. (Заметьте, попутно показано, что элемент объёма $dtdxdydz$ не меняется при преобразованиях Лоренца.)

Покоящиеся в подвижной системе часы идут медленнее, чем часы покоящейся системы, а стержень, покоящийся в подвижной системе отсчёта и сонаправленный движению системы, длиннее, чем он же, наблюдаемый из покоящейся системы отсчёта.

Напомним, что *собственное время* — это время, которое отсчитывают часы, покоящиеся в рассматриваемой системе отсчёта, а *собственная длина* — это длина стержня, покоящегося в этой системе.

Итак, собственное время — самое медленное, а собственная длина — самая большая при пересчётах в другие инерциальные системы из данной системы отсчёта.