

## Вопросы коллоквиума по математическому анализу

1 курс 1 поток 2 семестр 2019/20 уч. г. Лектор — проф. Т.П. Лукашенко

1. Первообразная. Неопределённый интеграл и его свойства.
2. Основные неопределённые интегралы. Интегрирование рациональных дробей.
3. Интегралы Римана и Курцвейля–Хенстока как пределы по базе. Лемма о существовании разбиений.
4. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости.
5. Интегрируемость на подотрезках. Необходимое условие интегрируемости по Риману.
6. Аддитивность интегралов Римана и Курцвейля–Хенстока по отрезкам.
7. Интегрируемость производных по Курцвейлю–Хенстоку, формула Ньютона–Лейбница.
8. Верхняя мера Лебега и её свойства. Множества меры нуль по Лебегу.
9. Интегрируемость по Риману ограниченных и непрерывных почти всюду функций.
10. Ограниченность и непрерывность почти всюду функций, интегрируемых по Риману.
11. Критерий Лебега и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.
12. Два определения измеримых на отрезке функций, их эквивалентность.
13. Интегрируемость по Курцвейлю–Хенстоку ограниченных измеримых функций.
14. Интегрируемость по Курцвейлю–Хенстоку функции, равной нулю почти всюду.
15. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных.
16. Интегралы Римана–Стилтьеса и Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса как пределы по базе; их простейшие свойства.
17. Критерии Коши интегрируемости. Интегрируемость на подотрезках.
18. Аддитивность интегралов Стилтьеса по отрезкам.
19. Функции ограниченной вариации и их свойства.
20. Функции ограниченной вариации как разность неубывающих функций.
21. Интегрируемость по Риману–Стилтьесу непрерывных функций по функциям ограниченной вариации.
22. Интегрирование по частям в интеграле Римана–Стилтьеса.
23. Сведение интеграла Римана–Стилтьеса к интегралу Римана. Интегрирование по частям для интеграла Римана.
24. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
25. Первая теорема о среднем для произведения функций и интегралов Стилтьеса.
26. Вторая теорема о среднем для произведения функций и интегралов Стилтьеса.

### Список задач к коллоквиуму.

1. Интегрируемость по Риману и по Курцвейлю–Хенстоку функций Римана и Дирихле.
2. Функция  $x^p$ ,  $-1 < p < 0$ , интегрируема на отрезке из  $[0, 1]$  по Курцвейлю–Хенстоку.
3. Пример неинтегрируемой по Курцвейлю–Хенстоку функции.
4. Пример неинтегрируемой по Риману точной производной.
5. Множество Кантора и его свойства: замкнутость, континуальность, мера ноль по Лебегу. Лестница Кантора и её свойства.
6. Доказать, что если отрезок  $[a, b]$  включает 0, то функция  $f(x)$  интегрируема по функции  $\operatorname{sgn} x$  ( $-1$  при  $x < 0$ ,  $0$  при  $x = 0$ ,  $1$  при  $x > 0$ ) на отрезке  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда  $f$  непрерывна в точке 0.
7. Пример непрерывной на отрезке функции неограниченной вариации.