Программа курса «Математический анализ» для физико-химической группы химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

1-й семестр.

I. Введение в математический анализ.

Множества и операции с ними. Числовые множества. Счетные и несчетные множества.
Верхняя и нижняя грани. Открытые и замкнутые множества. Предельные точки.
Теоремы о конечном подпокрытии и о существовании предельной точки.
Бином Ньютона.

II. Предел последовательностей и функций.

Предел последовательности: простейшие свойства и арифметические свойства бесконечно малых.
Теорема о представлении и арифметические свойства предела последовательности. Предел монотонной последовательности.
Неравенство Бернулли. Число ‘е’. Критерий Коши.
Теорема Больцано-Вейерштрасса. Эквивалентность определения предела функции по Коши и по Гейне. Простейшие свойства предела функции.
Сравнение бесконечно малых. Арифметические свойства бесконечно малых и предела функции. Односторонние пределы и предел в точке.
Предел монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции в точке.

III. Непрерывность функций одной переменной.

Непрерывность функции и ее арифметические свойства.
Непрерывность сложной функции. Классификация разрывов. Теорема о нуле и о промежуточном значении.
Теорема об обратной функции. Теоремы Вейерштрасса и теорема Кантора. Непрерывность элементарных функций.
Замечательные пределы. Следствия.

IV. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Определения производной и дифференцируемости. Их эквивалентность для функций одного переменного.
Производная и непрерывность. Геометрический смысл производной и дифференциала. Правила дифференцирования.
Производные элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Инвариантность первого дифференциала.
Локальный экстремум и теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.
Правила Лопиталя. Примеры.

Формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.
Пять основных разложений.
Условия локального экстремума. Выпуклость Условия выпуклости.

V. Введение в математический анализ функций многих переменных.

Метрические пространства. Метрика в R^n. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Предельные точки.
Свойства компактов в метрическом пространстве и в R^n.
Свойства предела последовательности точек в метрическом пространстве.
Сходимость в R^n. Фундаментальность и полнота. Полнота R^n.
Предел отображений метрических пространств в духе Коши и Гейне.
Простейшие свойства предела. Критерий Коши.
Непрерывность отображений метрических пространств. Критерий непрерывности на множестве. Свойства непрерывности на компакте.
Связные множества и их свойства. Непрерывность на связном множестве.

VI. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Дифференцируемость функций многих переменных и ее связь с частными производными.
Геометрический смысл дифференцируемости в R^n. Производная по направлению и ее связь с дифференцируемостью.
Правила дифференцирования в R^n. Дифференцирование сложной функции.
Инвариантность первого дифференциала в R^n. Производные и дифференциалы высших порядков. Условия равенства смешанных производных.
Формула Тейлора в R^n с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа. Необходимое условие локального экстремума.
Достаточное условие локального экстремума в R^n. Критерий Сильвестра.
Неявные функции (случай одного уравнения). Неявные функции (случай нескольких уравнений).
Условный экстремум. Прямой метод исследования и метод множителей Лагранжа.

2-й семестр.

VII. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Первообразная , неопределенный интеграл и их свойства. Методы интегрирования. Таблица неопределенных интегралов.

Определенный интеграл Римана: определение , необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства.
Критерии интегрируемости Дарбу и Лебега.
Классы интегрируемых функций. Свойства интеграла Римана.
Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница, теорема о среднем для интеграла. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

VIII. Приложения интегрального исчисления.

Приближенные методы вычисления определенных интегралов: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона, с оценкой их точности.
Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости. Эталонные интегралы, признаки сравнения.
Кривые в R^n. Спрямляемость и вычисление длины кривой.

IX. Интегральное исчисление функций многих переменных.

Мера Жордана в R^n, критерии измеримости.
Свойства измеримых множеств и меры Жордана.
Понятие кратного интеграла Римана. Суммы Дарбу в R^n, критерий Дарбу интегрируемости.
Множества меры нуль по Лебегу в R^n . Критерий интегрируемости Лебега в R^n .
Свойства кратного интеграла Римана.
Теорема Фубини и ее следствия. Формулировка теоремы о замене переменной в кратном интеграле.

X. Криволинейные и поверхностные интегралы. Теоремы векторного анализа.

Криволинейные интегралы первого и второго рода , их свойства и формулы для вычисления.
Поверхностные интегралы первого и второго рода , их свойства и формулы для вычисления.
Формула Грина и ее следствия.
Формула Стокса.
Формула Остроградского-Гаусса и ее следствия.
Операции векторного анализа и векторная форма записи интегральных формул.
Некоторые типы векторных полей (потенциальные , соленоидальные поля). Критерии потенциальности в области и в односвязной области.

3-й семестр.

XI. Числовые и функциональные ряды.

Простейшие свойства числовых рядов , критерий Коши. Признаки сравнения.
Интегральный признак , признаки Даламбера и Коши.
Преобразование Абеля. Признаки Лейбница , Абеля и Дирихле.
Абсолютная и условная сходимости. Перестановки абсолютно и условно сходящихся рядов.
Произведения абсолютно сходящихся рядов. Бесконечные произведения.
Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
Признаки Дини , Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда.
Изменение порядка пределов. Непрерывность суммы ряда.
Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
Степенные ряды , вычисление радиуса сходимости.
Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда , интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
Ряд Тейлора, критерий и достаточное условие сходимости, 5 основных разложений, связь суммы степенного ряда и ее ряда Тейлора.

XII. Несобственные интегралы с параметром как аппарат специальных функций.

Равномерная сходимость параметрических семейств функций. Критерий Коши. Свойства равномерно сходящихся параметрических семейств функций. Теорема Дини.
Непрерывность, интегрирование и дифференцирование собственных интегралов , зависящих от параметра.
Равномерная сходимость несобственных интегралов , зависящих от параметра. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
Признаки Дини , Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов , зависящих от параметра.
Переход к пределу, непрерывность , интегрирование по Риману и дифференцирование несобственных интегралов , зависящих от параметра.
Интегрирование в несобственном смысле несобственных интегралов , зависящих от параметра.
Интегралы Дирихле и Пуассона.
Гамма-функция и бета-функция Эйлера.
Формула Стирлинга.

XIII. Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье и его свойства.

Обратное преобразование Фурье, достаточные условия обратимости преобразования Фурье.

4-й семестр.

XIV. Ряды Фурье.

Нормированные и Евклидовы пространства. Два основных пространства. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

Неравенство Бесселя, замкнутость и полнота. Равенство Парсеваля. Тригонометрическая система и ряд Фурье по ней.

Представление частичной суммы ряда Фурье с помощью ядра Дирихле. Лемма Римана.

Признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Принцип локализации Римана. Признак равномерной сходимости ряда Фурье.

Суммирование тригонометрического ряда Фурье методом Фейера, теорема Фейера.

Замкнутость тригонометрической системы. Равенство Парсеваля.

Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

XV. Вариационное исчисление.

Лемма Дюбуа-Реймонда. Задача Больца: постановка.

Задача Больца: постановка и решение. Векторный случай.

Простейшая задача классического вариационного исчисления: постановка и решение.

Задача о Брахистохроне. Первые интегралы уравнения Эйлера-Лагранжа.

Примеры патологического поведения вариационных задач.

Изопериметрическая задача: постановка и решение.

Задача Лагранжа: постановка и решение.

Задача с подвижными концами: постановка и решение.

Задача со старшими производными: постановка и решение.