Программа коллоквиума по математическому анализу
II курс, отделение математики, весенний семестр 2019 года
лектор С.В.Шапошников

(1) Кратный интеграл Римана по брусу. Линейность и монотонность интеграла. Интегрируемость ступенчатой функции.
(2) Перестановочность равномерного предела и интеграла. Интегрируемость непрерывной на брусе функции.
(3) Монотонное приближение ступенчатыми функциями. Критерий интегрируемости.
(4) Теорема Фубини. Формула интегрирования по частям для функций с компактным носителем.
(5) Множества меры нуль по Лебегу. График непрерывной на компакте функции является множеством меры нуль.
(6) Критерий Лебега. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функции.
(7) Интеграл Римана по множеству. Корректность определения. Мера Жордана.
(8) Свойства интеграла Римана по множеству: линейность, аддитивность, монотонность, теорема о среднем, теорема Фубини, принцип Кавальери.
(9) Формула замены переменных.
(10) Теорема Брауэра о неподвижной точке.
(11) Теорема об особой точке векторного поля на сфере.
(12) Несобственный кратный интеграл Римана. Сходимость несобственного интеграла от неотрицательной функции.
(13) Алгебра и сигма-алгебра множеств. Борелевская сигма-алгебра. Сигма-аддитивная мера. Теорема Каратеодори.
(14) Сигма-аддитивная мера на борелевской сигма-алгебре: приближение борелевских множеств замкнутыми и открытыми.
(15) Мера Лебега. Совпадение меры Лебега и меры Жордана на допустимых множествах. Изменение меры Лебега при линейном отображении.
(16) Мера Хаусдорфа. Совпадение с точностью до константы меры Лебега и n-мерной меры Хаусдорфа на борелевских множествах.
(17) Размерность Хаусдорфа. Размерность и мера множества Кантора. Изменение меры Хаусдорфа при линейном отображение.

Задачи

Задача 1. Пусть производные f_{xy} и f_{yx} существуют и непрерывны. Используя теорему о среднем и теорему Фубини докажите равенство $f_{xy} = f_{yx}$.

Задача 2. Докажите, что существует такая константа $C > 0$, что

$$\int_{[0,1]^n} |u(x)|^2\,dx \le C \int_{[0,1]^n} |\nabla u(x)|^2\,dx$$

для всякой непрерывно дифференцируемой функции u, равной нулю на границе куба $[0,1]^n$.

Задача 3. Докажите, что для всякой непрерывно дифференцируемой функции u с компактным носителем верно равенство:

$$u(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \nabla u(y), x-y \rangle}{|x-y|^n}\,dy.$$

Задача 4. Пусть $X_t(y)$ является решением задачи Коши $\frac{d}{dt}X_t(y) = b(X_t(y)), X_0(y) = y$, где $b(x) = (b^1(x), \ldots, b^n(x))$ – гладкое ограниченное векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Пусть D – ограниченное борелевское множество в $\mathbb{R}^n$ и $D(t) = X_t(D)$. Докажите теорему Лиувилля:

$$\frac{d}{dt}|D(t)| = \int_{D(t)} \mathrm{div} b(x)\,dx, \quad \mathrm{div} b(x) = \frac{\partial b^1(x)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial b^n(x)}{\partial x_n}.$$

Задача 5. Докажите, что открытое множество можно представить в виде объединения счетного числа попарно непересекающихся открытых правильных пятиугольников и множества меры нуль по Лебегу.

Задача 6. Приведите пример, когда множество $E \subset \mathbb{R}^1$ имеет размерность Хаусдорфа 1, но $H^1(E) = 0$.

Задача 7. Найдите размерность и меру Хаусдорфа «ковра» Серпинского. Это множество строится следующим образом. Единичный квадрат разбиваем на девять равных квадратов, из которых центральный (без границы) удаляем, затем аналогично поступаем с каждым из оставшихся восьми квадратов и так далее. После шага N получаем замкнутое множество F_N, причем по построению $F_{N+1} \subset F_N$. Искомое множество является пересечением всех F_N.