Листок 3

Задача 1. Пусть K_1, K_2 – компакты на числовой прямой и $f\colon K_1 \to K_2$ – биекция. Докажите, что функция f непрерывна на K_1 тогда и только тогда, когда обратная функция f^{-1} непрерывна на K_2.

Задача 2. Про ограниченную функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ известно, что

$$x_n \to x \quad \text{и} \quad f(x_n) \to y \quad \Rightarrow f(x) = y.$$

Верно ли, что f – непрерывная функция? Можно ли отказаться от ограниченности?

Задача 3. Докажите, что для всякого замкнутого множества F на числовой прямой существует бесконечное число раз дифференцируемая функция f, для которой

$$\{x\colon f(x) = 0\} = F.$$

Задача 4. Для произвольной последовательности $\{a_k\}$ докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $f^{(k)}(0) = a_k$.

Задача 5. Пусть f бесконечное число раз дифференцируема на $\mathbb{R}$ и для всякого x существует номер N_x такой, что $f^{(N_x)}(x) = 0$. Докажите, что f – многочлен.