Листок 2

Задача 1. Пусть $f \in C([0,1])$ и $f > 0$. Докажите, что

$$\lim_{p\to+\infty}\Big(\int_0^1 f^p\,dx\Big)^{1/p} = \max_{x\in[0,1]} f(x), \quad \lim_{p\to-\infty}\Big(\int_0^1 f^p\,dx\Big)^{1/p} = \min_{x\in[0,1]} f(x),$$

$$\lim_{p\to0}\Big(\int_0^1 f^p\,dx\Big)^{1/p} = \exp\Big(\int_0^1 \ln f\,dx\Big).$$

Задача 2. Приведите пример интегрируемой по Риману функции, которая не является равномерным пределом простых функций, т.е функций вида $\sum_{j=1}^m c_j I_{\Delta_j}$, где I_{Δ_j} – индикатор ограниченного промежутка Δ_j.

Задача 3.

(i) Приведите пример интегрируемой по Риману на $[0,1]$ функции, у которой нет первообразной ни на каком интервале.

(ii) Пусть F дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и F' является ограниченной функцией. Верно ли, что F' интегрируема по Риману на $[0,1]$?

Задача 4. Пусть f – непрерывная функция на $[0,1]$ и

$$f(x) \le \int_0^x f(t)\,dt.$$

Докажите, что $f \le 0$.

Задача 5. Пусть f – непрерывная функция на интервале $(0,1)$. Докажите, что функция f выпукла на интервале $(0,1)$ тогда и только тогда, когда для всякого отрезка $[a-\delta, a+\delta] \subset (0,1)$ верно неравенство

$$f(a) \le \frac{1}{2\delta}\int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)\,dx.$$