

Листок 1

Задача 1. Изометрией называется отображение, которое сохраняет расстояния между точками. Докажите, что компакт в метрическом пространстве не может быть изометричен своей собственной части.

Задача 2. Пусть последовательность многочленов P_n такова, что $\deg P_n \leq m$ для всех n и P_n поточечно сходятся к некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что f является многочленом степени не выше m и P_n равномерно сходятся к f на отрезке $[0, 1]$.

Задача 3. (i) Приведите пример функции $f(x, y)$ непрерывной вдоль всякой прямой, но разрывной по совокупности переменных.

(ii) Докажите, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по каждой переменной, то в некоторой точке f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 4. Существуют ли непрерывные функции f , g и h на $\mathbb{R}$ такие, что

$$xy = h(f(x) + g(y))?$$

Задача 5. (a) Всякую ли функцию трех переменных $f(x, y, z)$ можно представить в виде $h(z, g(x, y))$, где h, g – функции двух переменных?

(b) Можно ли функцию $xy + yz + xz$ представить в указанном выше виде с помощью непрерывных функций h и g ?