

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
I КУРС, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2017 ГОДА
ЛЕКТОР С.В.ШАПОШНИКОВ

- (1) Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда. Принцип Кантора вложенных отрезков.
- (2) Счетные множества и их свойства. Счетность множества рациональных чисел. Пример Кантора несчетного множества. Несчетность отрезка. Континуальные множества.
- (3) Предел последовательности: единственность, ограниченность, арифметика, переход к пределу в неравенствах, теорема о сходимости зажатой последовательности.
- (4) Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности. Число e .
- (5) Теорема Больцано о сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы. Верхний предел и нижний предел последовательности.
- (6) Фундаментальные последовательности и критерий Коши.
- (7) Ряды. Сходимость рядов с неотрицательными членами. Признак Коши и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Абсолютная и условная сходимость. Сходимость ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- (8) Открытые и замкнутые множества на числовой прямой и их свойства. Структура открытых множеств.
- (9) Граничные и предельные точки. Эквивалентные определения замкнутого множества. Замкнутость множества частичных пределов.
- (10) Компакты и их свойства. Лемма Гейне–Лебега–Бореля. Критерий компактности множества на числовой прямой.
- (11) Определение Гейне предела функции и его свойства: единственность, арифметика, переход к пределу в неравенствах, теорема о сходимости зажатой функции, предел композиции.
- (12) Определение Коши предела функции. Эквивалентность определения Гейне и определения Коши. Ограниченность и отделимость функции, имеющей конечный предел в данной точке.
- (13) Замечательные пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.
- (14) Односторонние пределы. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции.
- (15) Непрерывные функции: эквивалентные определения и локальные свойства. Классификация точек разрыва. Множество точек разрыва монотонной функции.
- (16) Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на компакте функции и о достижении точной верхней и точной нижней граней множества значений.
- (17) Теорема Коши о промежуточном значении и ее следствия. Теорема об обратной функции.
- (18) Построение показательной функции и логарифмической функции.
- (19) Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
- (20) Производная и дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Теорема о производной сложной функции. Инвариантность первого дифференциала.
- (21) Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталья.
- (22) Производные высокого порядка. Правило Лейбница. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения в нуле функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$.
- (23) Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме. Остаточные члены в форме Лагранжа и в форме Коши. Достаточное условие сходимости ряда Тейлора.
- (24) Необходимое условие локального (внутреннего) экстремума. Достаточные условия локального максимума и локального минимума.
- (25) Выпуклая функция. Непрерывность выпуклой функции. Дифференциальные условия выпуклости. Неравенство Йенсена.