

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
I КУРС, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2017 ГОДА
ЛЕКТОР С.В.ШАПОШНИКОВ

- (1) Множества. Парадокс Рассела. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
- (2) Декартово произведение множеств. Функция и ее график. Ассоциативность композиции. Множество с операцией. Индуктивное определение сложения на множестве натуральных чисел. Множество целых чисел. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Множество рациональных чисел.
- (3) Отношение частичного порядка. Отношение порядка на множестве натуральных чисел. Метод полной математической индукции. Равносильность аксиомы индукции и существования в каждом непустом подмножестве наименьшего элемента.
- (4) Операции с множествами и формулы Моргана.
- (5) Инъекции, сюръекции, биекции. Обратная функция. Группа биекций. Теорема Кантора–Бернштейна. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств.
- (6) Конечные множества. Счетные множества и их свойства. Пример Кантора несчетного множества.
- (7) Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Бесконечные десятичные дроби. Существование $\sqrt{2}$.
- (8) Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда. Принцип Кантора вложенных отрезков. Несчетность отрезка. Континуальные множества.
- (9) Предел последовательности: единственность, ограниченность, отделимость.
- (10) Переход к пределу в неравенствах. Теорема о сходимости зажатой последовательности.
- (11) Арифметика пределов.
- (12) Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e .
- (13) Теорема Больцано о сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы. Верхний и нижний предел.
- (14) Фундаментальные последовательности и Критерий Коши.
- (15) Ряды. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости неотрицательных рядов. Ряд Лейбница. Абсолютная и условная сходимости.
- (16) Открытые и замкнутые множества. Структура открытых множеств.
- (17) Граничные и предельные точки. Эквивалентные определения замкнутого множества. Замкнутость множества частичных пределов. Теорема Бэра.
- (18) Компакты. Лемма Бореля–Гейне–Лебега. Множество Кантора и его свойства.

ЗАДАЧИ

- (1) Докажите, что существует возрастающая биекция множества чисел вида $\frac{m}{2^n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, на множество всех рациональных чисел \mathbb{Q} .
- (2) Существует ли сюръекция $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такая, что $f(x) \in \mathbb{Q}$ для всякого иррационального числа $x \in [0, 1]$.
- (3) Для функции $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ с $0 < q < 1$. Докажите, что для всякого $x_1 \in [a, b]$ последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к такому x_0 , что $x_0 = f(x_0)$. Точка x_0 является неподвижной точкой f . Докажите, что неподвижная точка единственна.
- (4) Докажите, что множество точек из отрезка $[0, 1]$, которые можно записать десятичной дробью (возможно бесконечной и возможно с идущими подряд девятками) без цифры 7, является замкнутым и континуальным.
- (5) Докажите, что множество точек из отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи которых не встречается комбинации цифр вида 2017, является нигде не плотным множеством (т.е. во всяком интервале есть интервал, в котором нет точек этого множества). Является ли это множество замкнутым или открытым?
- (6) Докажите, что всякое замкнутое множество на числовой прямой является множеством частичных пределов некоторой последовательности.
- (7) Докажите, что для замкнутых множеств гипотеза континуума решается положительно: если замкнутое множество не является конечным или счетным, то оно является континуальным.