

В О П Р О С Ы — Б И Л Е Т Ы
к экзамену по математическому анализу за четвертый семестр
для студентов второго курса второго потока
2012-2013 учебный год
Лектор профессор В.А.Зорич

1. Интеграл Римана на n -мерном промежутке. Критерий Лебега существования интеграла.
2. Критерий Дарбу существования интеграла от вещественнозначной функции на n -мерном промежутке.
3. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества и ее геометрический смысл. Критерий Лебега существования интеграла по измеримому множеству. Линейность и аддитивность интеграла.
4. Оценки интеграла.
5. Сведение кратного интеграла к повторному: теорема Фубини и ее важнейшие следствия.
6. Формула замены переменных в кратном интеграле. Инвариантность меры и интеграла.
7. Несобственные кратные интегралы: основные определения, мажорантный признак сходимости, канонические интегралы. Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона.
8. Поверхность размерности k в \mathbb{R}^n и основные способы ее задания. Абстрактное k -мерное многообразие. Край k -мерного многообразия как $(k - 1)$ -мерное многообразие без края.
9. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Способы задания ориентации абстрактного многообразия и (гипер)поверхности в \mathbb{R}^n .
Ориентируемость края ориентируемого многообразия. Согласованная ориентация многообразия и края.
10. Касательный вектор и касательное пространство к поверхности в \mathbb{R}^n и к абстрактному многообразию в точке. Интерпретация касательного вектора как дифференциального оператора.
11. Дифференциальная форма в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Примеры: дифференциал функции, форма работы, форма потока. Координатная запись дифференциальной формы. Операция внешнего дифференцирования.
12. Отображение объектов и сопряженное отображение функций на этих объектах. Преобразование точек и векторов касательных пространств в этих точках при гладком отображении. Перенос функций и дифференциальных форм при гладком отображении. Рецепт выполнения переноса форм в координатном виде.

13. Коммутирование переноса дифференциальных форм с операциями их внешнего умножения и дифференцирования. Дифференциальная форма на многообразии. Инвариантность (корректность) операций над дифференциальными формами.

14. Схема подсчета работы и потока. Интеграл от k -формы по k -мерной гладкой ориентированной поверхности. Учет ориентации. Независимость интеграла от выбора параметризации.

15. Формула Грина на квадрате, ее вывод, интерпретация и запись на языке интегралов от соответствующих дифференциальных форм. Общая формула Стокса. Редукция к k -мерному промежутку и доказательство для k -мерного промежутка. Классические интегральные формулы анализа как конкретные варианты общей формулы Стокса.

16. Форма объема в \mathbb{R}^n и на поверхности. Зависимость формы объема от ориентации. Интеграл первого рода и его независимость от ориентации. Площадь и масса материальной поверхности как интегралы первого рода. Запись формы объема k -мерной поверхности $S^k \subset \mathbb{R}^n$ в локальных параметрах и запись формы объема гиперповерхности $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в декартовых координатах объемлющего пространства.

17. Основные дифференциальные операторы теории поля (grad , rot , div) и их связь с оператором d внешнего дифференцирования в евклидовом ориентированном пространстве \mathbb{R}^3 .

18. Запись работы и потока поля в виде интегралов первого рода. Основные интегральные формулы теории поля в \mathbb{R}^3 как векторная запись классических интегральных формул анализа.

19. Потенциальное поле и его потенциал. Дифференциальный необходимый признак потенциальности векторного поля и его достаточность в односвязной области. Интегральный критерий потенциальности векторного поля и точности 1-формы.

20. Точные и замкнутые формы. Локальная точность замкнутой формы (лемма Пуанкаре). Гомологии и когомологии, их роль при вычислении интегралов от форм. Теорема де Рама (формулировка).

21. Примеры приложений формулы Стокса (Гаусса-Остроградского): механика — вывод основных уравнений динамики сплошной среды, физический смысл градиента, ротора и дивергенции; топология — принцип неподвижной точки.

22. Оператор набла Гамильтона и работа с ним. Градиент, ротор и дивергенция в триортогональных криволинейных координатах.