Некоторые дополнения к материалу лекций по анализу

(может быть использовано на упражнениях)

Формула Эйлера - Маклорена

Дополнение к задачам коллоквиума

a) *Числа Бернулли.*

Якоб Бернулли нашёл, что $\Sigma_{n=1}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1}\Sigma_{m=0}^{k} C_{k+1}^m B_m N^{k+1-m}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты, а $B_0, B_1, B_2, \ldots$ — рациональные числа, именуемые теперь числами Бернулли. Эти числа встречаются в разных вопросах. У них есть производящая функция $\frac{z}{e^z-1} = \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$, по коэффициентам тейлоровского разложения которой все они восстанавливаются.

Для них справедлива также следующая рекуррентная формула: $B_0 = 1,\ B_n = \frac{-1}{n+1}\Sigma_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}$.

Найдите первые несколько чисел Бернулли и проверьте, что все числа Бернулли с нечётными номерами, кроме B_1, равны нулю, а знаки чисел Бернулли с чётными номерами чередуются. (Функция $x/(e^x-1) + x/2$ чётная!)

Эйлер обнаружил связь $B_n = -n\zeta(1-n)$ чисел Бернулли с ζ-функцией.

b) *Многочлены Бернулли.*

Многочлены Бернулли можно определять различными способами. Например, многочлены Бернулли определяются рекуррентно $B_0(x) \equiv 1$, далее $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ с условием, что $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$; через производящую функцию $\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n$; формулой $B_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} x^k$ или $B_n(x) = \Sigma_{m=0}^{n}\frac{1}{m+1}\Sigma_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (x+k)^n$.

• Исходя из разных определений, найдите первые несколько многочленов Бернулли, проверьте совпадение и то, что числа Бернулли — это значения многочленов Бернулли при $x = 0$.

• Дифференцируя производящую функцию, убедитесь, что определяемые ею функции $B_n(x)$ удовлетворяют указанному выше рекуррентному соотношению, которое, в свою очередь, означает, что

$$B_n(x) = B_n + n\int_0^x B_{n-1}(t)dt.$$

c) *Некоторые знакомые операторы и ряды операторов.*

• Если A — оператор, то условимся, как это принято в числах, запись $\frac{1}{A}$ понимать как оператор A^{-1}, обратный оператору A.

Оператор $\int$ интегрирования обратен оператору D дифференцирования (при должном задании постоянной интегрирования). Аналогично, оператор суммирования Σ обратен разностному оператору Δ, действие которого определяется соотношением $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Укажите, как именно надо находить $\Sigma f(x)$.

• Согласны ли вы с тем, что $B_n(x) = D(e^D - 1)^{-1}x^n$?

• В соответствии с формулой Тейлора

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + ... = (\frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + ...)f(x),$$

поэтому $\Delta = e^D - 1$ и $\Sigma = \Delta^{-1} = (e^D - 1)^{-1}$, а поскольку $\frac{z}{e^z - 1} = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$, то

$$\sum = \frac{B_0}{D} + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!}D + \frac{B_3}{3!}D^2 + ... = \int + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} D^k.$$

d) *Ряд и формула Эйлера-Маклорена.*

Применяя это операторное соотношение к функции $f(x)$, получаем формулу суммирования Эйлера-Маклорена, точнее, не саму формулу, а соответствующий ей ряд (выпишите его). Отличие состоит в том же, чем ряд Тейлора отличается от формулы Тейлора. Последняя конечна и содержит информацию (остаточный член), дающую возможность оценить остаток (величину погрешности приближения).

Соответствующая полученному ряду конечная формула Эйлера-Маклорена с остаточным членом имеет следующий вид:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^{(m+1)} \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx.$$

Предполагается, конечно, что исходная функция f достаточно гладкая, например, имеет все непрерывные производные нужного порядка.

Знаяформулу интегрирования по частям, докажите по индукции написанную формулу Эйлера-Маклорена. (Вспомните, кстати, что формулу Тейлора с интегральным видом остаточного члена тоже получают простым интегрированием по частям.)

e) *Общая формула Эйлера-Маклорена.*

Общая формула Эйлера-Маклорена, дающая величину суммы $\sum\limits_{a \le k < b} f(k)$, имеет вид

$$\sum_{a \le k < b} f(k) = \int\limits_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Bigg|_a^b + R_m,$$

где a, b, k, m — натуральные числа, а

$$R_m = (-1)^{(m+1)} \int\limits_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx,$$

и $\{x\}$ — дробная часть числа x.

Докажите теперь эту формулу, учитывая, что любой отрезок $[a, b]$, концы которого — натуральные числа, можно разбить на отрезки единичной длины и сдвигами привести к отрезку $[0, 1]$.

f) *Примеры применения.*

• Используя формулу Эйлера-Маклорена, полагая в ней $f(x) = x^m$, покажите, что $\sum\limits_{a \le k < b} k^{m-1} = \frac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k B_k (b^{m-k} - a^{m-k})$ и, в частности, получите вслед за Якобом Бернулли соотношение $\sum\limits_{0 \le k < b} k^{m-1} = \frac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k B_k b^{m-k}$.

• Для вычисления асимптотического поведения суммы или ряда обычно используется следующий вид формулы Эйлера-Маклорена: $\sum\limits_{n=a}^{b} f(x) \sim \int\limits_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(b)) - f^{(2k-1)}(a))$, где a, b — целые. Часто формула остается справедливой и при расширении отрезка $[a, b]$ до всей прямой. Во многих случаях интеграл в правой части может быть вычислен в элементарных функциях, даже если сумма в левой части так не может быть выражена. Тогда все члены асимптотического ряда могут быть выражены в терминах элементарных функций. Например,

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(z+s)^2} \sim \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(z+s)^2} ds + \frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{z^{2k+1}},$$

причём интеграл здесь вычисляется и равен $\frac{1}{z}$.

• Полагая $f(x) = x^{-1}$, проверьте асимптотическую формулу

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - \theta_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)n^{2m+2}},$$

где $0 < \theta_{m,n} < 1$, а γ — постоянная (постоянная Эйлера).

• Взяв $f(x) = \ln x$, покажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - n + \sigma - \frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}} - R_{m,n},$$

где

$$R_{m,n} = \phi_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}},$$

$0 < \phi_{m,n} < 1$, а σ — константа (на самом деле равная $\ln \sqrt{2\pi}$).

Потенцируя, отсюда можно получить асимптотическую формулу Стирлинга для величины $n!$ при $n \to +\infty$.

g) *Вновь к самой формуле Эйлера-Маклорена.*

• Если a и n — целые числа, такие, что $a < n$, а f — функция, медленно меняющаяся на промежутке $[a, n]$, то сумма $S = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + f(a+2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)$ хорошо аппроксимируется интегралом $I = \int_a^n f(x)dx$.

Вспомните это, нарисовав картинку, воскресив геометрический смысл величин S и I, а заодно вспомнив и численные методы вычисления интеграла.

• Если j — целое число, то интегрирование по частям даёт

$$\int\limits_{j}^{j+1} f(x)dx = (x - j - \frac{1}{2})f(x)|_j^{j+1} - \int\limits_{j}^{j+1} (x - j - \frac{1}{2})f'(x)dx,$$

или

$$\frac{1}{2}f(j) + \frac{1}{2}f(j+1) = \int\limits_{j}^{j+1} f(x)dx + \int\limits_{j}^{j+1} \omega_1(x)f'(x)dx,$$

где $\omega_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}$.

(Напомним, что $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части числа x.)

Суммируя полученные равенства по j от $j = a$ до $j = n - 1$, получаем

$$S = I + \int\limits_{a}^{n} \omega_1(x)f'(x)dx.$$

Нарисуйте график функции ω_1.

• Проинтегрируйте теперь по частям интеграл $\int\limits_{j}^{j+1} \omega_1(x) f'(x) dx$ и получите для него выражение с новым интегральным остатком $\int\limits_{j}^{j+1} \omega_2(x) f''(x) dx$, где $\omega_2(x) = \int \omega_1(x) dx$. Убедитесь в непрерывности функции ω_2, учитывая, что $\int\limits_{j}^{j+1} \omega_1(x) dx = \int\limits_{0}^{1} (x - \frac{1}{2}) dx = 0$. Проведите, как и выше, суммирование и получите новое, на шаг более продвинутое, выражение для величины S с новым интегральным остатком.

• Продолжая описанный процесс, получите следующую формулу Эйлера-Маклорена

$$S = I + \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{s+1} \omega_{s+1}(0) f^{(s)}(x)|_a^n + (-1)^{m+1} \int\limits_a^n \omega_m(x) f^{(m)}(x) dx.$$