

МГУ, МЕХ.-МАТ. ФАКУЛЬТЕТ

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ - III

Лектор: проф. В.В.Власов

Последняя редакция: 28 декабря 2021 г.

Демо-версия

Ответственный за набор, верстку и редакцию:
Агафонкин Г.А., 404 гр.

2019-2022 гг.

Содержание

1	Числовые ряды.	3
1.1	Понятие числового ряда	3
1.2	Знакопостоянные ряды	4
1.3	Знакопеременные ряды	9
1.4	Перестановки рядов	11
1.5	Теоремы о произведениях числовых рядов	12
1.6	Бесконечные произведения	14
2	Функциональные последовательности и ряды	15
2.1	Понятие равномерной сходимости	15
2.2	Равномерная сходимость функциональных рядов	16
2.3	Предельный переход в равномерно сходящихся рядах	19
2.4	Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании	21
2.5	Степенные ряды	23
2.6	Ряды Тейлора-Маклорена	25
3	Равномерная сходимость по параметру	28
3.1	Семейства функций, зависящих от параметра	28
3.2	Собственные интегралы, зависящие от параметра	29
3.3	Несобственные интегралы, зависящие от параметра	32
3.4	Теоремы о дифференцировании и интегрировании по параметру	33
3.5	Вычисление некоторых именных интегралов	36
3.6	Эйлеровы интегралы	38
4	Элементы гармонического анализа	42
4.1	Финитные функции. Лемма Римана	42
4.2	Преобразование Фурье	43
4.3	Ряды Фурье. Условия сходимости в точке	45
4.4	Метод Фейера суммирования рядов Фурье	48
4.5	Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье	49
4.6	Зависимость скорости сходимости ряда Фурье от гладкости функции	50
5	Элементы функционального анализа	52
5.1	Линейные нормированные пространства: определение и примеры	52
5.2	Пространства со скалярным произведением	52
5.3	Сепарабельные пространства. Теорема Рисса-Фишера	53
6	Дополнительные главы	54
6.1	Аппроксимационные теоремы Вейерштрасса	54
6.2	Дельтаобразные семейства функций	55

1. Числовые ряды.

1.1. Понятие числового ряда

Под числовым рядом понимается формальная запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (1)$$

Числа a_k называются *членами числового ряда*.

Определение 1.1.1. *Частичными суммами* ряда (1) называют числа

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (2)$$

где n – натуральное число.

Определение 1.1.2. Говорят, что ряд (1) *сходится*, если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty. \quad (3)$$

В таком случае число S называется *суммой ряда* (1).

Пример 1.1.3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится, так как

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (4)$$

Пример 1.1.4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, где $|q| < 1$, сходится, так как

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}. \quad (5)$$

Теорема 1.1.5. (Критерий Коши). *Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для любых номеров $n > m > N$ выполнено*

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon. \quad (6)$$

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=m+1}^n a_k = S_n - S_m,$$

утверждение теоремы следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности. □

Следствие 1.1.6. (Необходимое условие сходимости). *Если ряд (1) сходится, то необходимо*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Достаточно положить в критерии Коши $n = m + 1$. □

Пример 1.1.7. Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Действительно,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

и для завершения доказательства достаточно положить в отрицании критерия Коши $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $n = 2m$.

Отметим также, что в приведенном примере $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, поэтому условие (1.1.6) не является достаточным.

Предложение 1.1.8. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к сумме S , то все его остатки $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ сходятся к суммам R_n и для любого n верно равенство $S = S_n + R_n$. Обратно: если хотя бы один остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то и весь ряд сходится.

Доказательство. Обозначим частичные суммы ряда r_n через ρ_{nk} , тогда по определению $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{nk} = R_n$. Очевидно также, что $S_{n+m} = S_n + \rho_{nm}$. Отсюда имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{n+k} - S_n) = S - S_n,$$

поэтому ряд r_n сходится к числу $R_n = S - S_n$.

Обратно: пусть для некоторого n ряд r_n сходится к числу R_n . Тогда по определению $\lim_{k \rightarrow \infty} (S_{n+k} - S_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n+k} - S_n = R_n$,

откуда $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n+k} = S_n + R_n$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. $\square$

1.2. Знакопостоянные ряды

Определение 1.2.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *знакопостоянным*, если все его члены неотрицательны (неположительны).

Для удобства далее под знакопостоянным рядом понимается ряд из неотрицательных членов.

Предложение 1.2.2. Знакопостоянный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство. Так как все члены $a_n \geq 0$, последовательность частичных сумм возрастает, ибо $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$. По теореме Вейерштрасса ограниченность монотонно возрастающей последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ равносильна существованию конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, что по определению означает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

Признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Теорема 1.2.3. (Первый признак сравнения). Пусть $0 \leq a_k \leq b_k$ для всех натуральных k . Тогда:

- (1) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
- (2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Доказательство.

- (1) Применим критерий Коши к сходящемуся ряду $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$: по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что для любых $n > m > N$

выполнено $\sum_{k=m+1}^n b_k < \varepsilon$. Но $\sum_{k=m+1}^n a_k \leq \sum_{k=m+1}^n b_k < \varepsilon$, поэтому по критерию Коши сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

- (2) Аналогичными рассуждениями из отрицания критерия Коши для расходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. $\square$

Следствие 1.2.4. Если существуют положительные константы d_1, d_2 такие, что для всех натуральных k выполнено $d_1 a_k \leq b_k \leq d_2 a_k$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Так как $a_k \leq \frac{1}{d_1} b_k$, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. А так как $b_k \leq d_2 a_k$, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Таким образом, сходимость одного ряда равносильна сходимости другого. $\square$

Следствие 1.2.5. Если $a_k = b_k + o(b_k)$ при $k \rightarrow \infty$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем такое N , что для всех $k > N$ $|o(b_k)| \leq \frac{1}{2} b_k$. Тогда $\frac{1}{2} b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2} b_k$, и утверждение следует из (1.2.4). $\square$

Теорема 1.2.6. (Второй признак сравнения). Пусть $a_k, b_k > 0$ и для всех натуральных k выполнено $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Перемножая неравенства для $k = 1, 2, \dots, n-1$, имеем:

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_1}$$

для любого натурального n . Отсюда $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$, и утверждение следует из (1.2.3). $\square$

Замечание. В силу (1.1.8) все утверждения о сходимости верны и для рядов, суммирование которых начинается не с 1, а с некоторого натурального N_0 .

Теорема 1.2.7. (Признаки Д'Аламбера и Коши в предельной форме). Пусть $a_k > 0$ и существует конечный предел:

(1) (Д'Аламбер) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = p$.

(2) (Коши) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = p$.

Тогда при $p < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $p > 1$ — расходится.

Доказательство. Обозначим $\lambda = \frac{p+1}{2}$.

Согласно определению предела, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k_0 , что для всех $k > k_0$ выполнено $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - p \right| < \varepsilon$ в (1) и $|\sqrt[k]{a_k} - p| < \varepsilon$ во (2).

Если $p < 1$, тогда $\lambda = p + \frac{1-p}{2} < 1$. Положим $\varepsilon = \frac{1-p}{2}$, тогда при $k > k_0$ для (1) имеем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < p + \frac{1-p}{2} = \lambda = \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k},$$

а для (2) — соответственно

$$\sqrt[k]{a_k} < p + \frac{1-p}{2} = \lambda = \sqrt[k]{\lambda^k} \iff a_k < \lambda^k.$$

Для $p > 1$ примем $\lambda = p - \frac{p-1}{2} > 1$, и, положив $\varepsilon = \frac{p-1}{2}$, при $k > k_0$ аналогично для (1) имеем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > p - \frac{p-1}{2} = \lambda = \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k},$$

а для (2) – соответственно

$$\sqrt[k]{a_k} > p - \frac{p-1}{2} = \lambda = \sqrt[k]{\lambda^k} \iff a_k > \lambda^k.$$

Но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k$ сходится при $|\lambda| < 1$ и расходится при $|\lambda| > 1$, поэтому по (1.2.6) для (1) и по (1.2.3) для (2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$. $\square$

Замечание. При $p = 1$ признак ответа не дает, и ряд может как сходиться, так и расходиться. Примеры:

(1) Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится по (1.1.7), при этом $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$;

(2) Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится по (1.2.3), ибо для всякого k имеем $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ сходится по (1.1.3).

Однако $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k} \sqrt[k]{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$.

Теорема 1.2.8. (Интегральный признак Коши). Пусть на луче $[1, +\infty)$ функция f непрерывна, положительна и монотонно убывает. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ монотонно убывает на $[1, +\infty)$, имеем $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)$, откуда

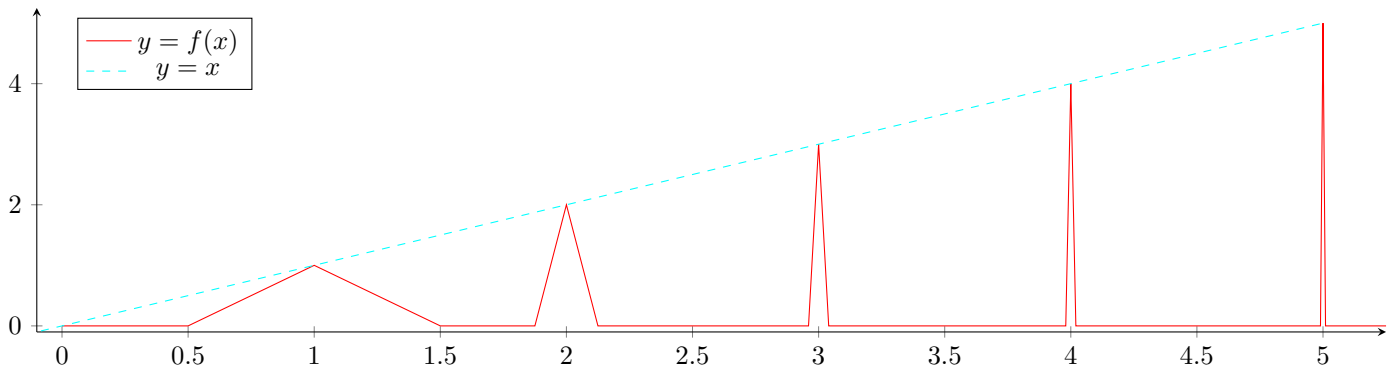
$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k).$$

Следовательно, ограниченность последовательности частичных сумм S_k равносильна ограниченности последовательности интегралов $\int_1^{n+1} f(x)dx$. А так как $f(x) > 0$, утверждение теоремы следует из (1.2.2) и аналогичного ему утверждения для несобственных интегралов. $\square$

Пример 1.2.9. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ сходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx$. Поэтому при $s > 1$ ряд сходится, а при $s \leq 1$ ряд расходится.

Замечание. Условие монотонности существенно! Рассмотрим пример:

$$f(x) = \begin{cases} -|2n^3(x-n)| + n, & |x-n| \leq 0.5n^{-3}, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$



Функция f задана кусочно-линейно, ее график состоит из треугольников с вершинами в целых точках.

Площадь n -го треугольника: $S_n = \frac{1}{2} \left(n \cdot \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{2n^2}$. Следовательно,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Этот ряд сходится, однако ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k$ расходится.

Теорема 1.2.10. (Признак Раабе в допредельной форме). Пусть $a_k > 0$.

(1) Если существует такое $p > 1$, что для достаточно больших k справедливо $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1 - \frac{p}{k}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

(2) Если для достаточно больших k выполнено $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 - \frac{1}{k}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство.

(1) Пусть $b_k = \frac{1}{k^r}$, где $1 < r < p$. Тогда по (1.2.9) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. С другой стороны, при $k \rightarrow \infty$ имеем:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-r} = 1 - \frac{r}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right),$$

поэтому, так как $r < p$, для достаточно больших k

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} > 1 - \frac{p}{k} \implies \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

и по (1.2.6) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

(2) Пусть $b_k = \frac{1}{k-1}$, $k > 1$. Имеем:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{k-1}{k} = \left(\frac{1}{k}\right) \div \left(\frac{1}{k-1}\right) = \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

и по (1.2.6) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. □

Теорема 1.2.11. (Признак Раабе в предельной форме) Пусть $a_k > 0$ и существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = p.$$

Тогда при $p > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $p < 1$ — расходится.

Доказательство. Если $p > 1$, выберем r такое, что $1 < r < p$. Тогда при достаточно больших k имеем

$$k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) > r \implies \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 - \frac{r}{k},$$

и по (1.2.10) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если $p < 1$, то для достаточно больших k имеем

$$k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) < 1 \implies \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 - \frac{1}{k},$$

и по (1.2.10) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. □

Замечание. При $p = 1$ признак ответа не дает. Примеры:

(1) Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, но $\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$;

(2) Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ сходится вместе с $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy$. Однако при $k \rightarrow \infty$ из разложения Тейлора для $\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ имеем:

$$\ln k = \ln(k+1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \implies \ln^2 k = \ln^2(k+1) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(k+1)}{k}\right),$$

откуда

$$k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k \left(1 - \frac{k \ln^2 k}{(k+1) \ln^2(k+1)}\right) = k \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Теорема 1.2.12. (Признак Гаусса). Пусть $a_k > 0$ и при $k \rightarrow \infty$ справедливо $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \alpha - \frac{\beta}{k} + \gamma_k$, где $\gamma_k = \bar{o}\left(\frac{1}{k \ln k}\right)$.

Тогда:

- (1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $\alpha < 1$ или $\alpha = 1, \beta > 1$;
 (2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, если $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$.

Доказательство. Если $\alpha \neq 1$, перед нами признак Д'Аламбера; если $\alpha = 1, \beta \neq 1$ – признак Раабе. Единственный неразобранный случай – когда $\alpha = \beta = 1$.

Пусть $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{1}{k} + \gamma_k$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1) \ln k}$.

$\frac{1}{(k-1) \ln k} > \frac{1}{k \ln k}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ расходится по (1.2.8), поэтому по (1.2.3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

$$\begin{aligned} \frac{b_{k+1}}{b_k} &= \frac{(k-1) \ln k}{k \ln(k+1)} = \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln(k+1)} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{k-1}{k \ln(k+1)} \cdot \left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k \ln(k+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2 \ln(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k \ln(k+1)} + \bar{o}\left(\frac{1}{k \ln k}\right), \end{aligned}$$

откуда при достаточно больших k

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{k \ln(k+1)} + \bar{o}\left(\frac{1}{k \ln k}\right) = \frac{1}{k \ln k} \left(\frac{\ln k}{\ln(k+1)} + \bar{o}(1)\right) > 0,$$

и по (1.2.6) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. □

Теорема 1.2.13. (Признак Куммера). Пусть $a_k > 0$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, причем для достаточно больших k существует константа $C > 0$ такая, что

$$a_k \leq C \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right).$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. Оценим частичные суммы ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq C \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) = C \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) < C \cdot \frac{a_1}{b_1},$$

откуда по (1.2.2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. □

1.3. Знакопеременные ряды

Определение 1.3.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится *абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Предложение 1.3.2. Из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует его сходимость.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$: по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что для любых номеров $n > m > N$ выполнено $\sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях для любых номеров $n > m > N$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon, \text{ откуда следует сходимость ряда } \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad \square$$

Определение 1.3.3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится *условно*, если он сходится, но не абсолютно сходится.

Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Теорема 1.3.4. (Признак Лейбница). Пусть последовательность чисел $a_k > 0$ монотонно убывает к 0 при $k \rightarrow \infty$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ сходится и $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \right| < a_{n+1}$.

Доказательство. Если $n = 2k$, то

$$S_n = S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq S_{2k-2} = S_{n-2},$$

ибо все скобки неотрицательны. С другой стороны,

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1,$$

поэтому по теореме Вейерштрасса существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = S + 0 = S.$$

По определению предела последовательности по $\varepsilon > 0$ выберем такие индексы N_1 и N_2 , что для всех $n > N_1$ выполнено $|S_{2n} - S| < \varepsilon$, а для $n > N_2$ аналогично $|S_{2n+1} - S| < \varepsilon$. Обозначив за N большее из чисел N_1, N_2 , получим, что для всех $n > N$ верны обе оценки, что влечет сходимость частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, а следовательно, и ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, к S .

Получим оценку частичных сумм:

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k-1}) \leq S_{2k-1} \implies S_{2k} \leq S_{2k+2} < S < S_{2k+1} \leq S_{2k-1} \implies \begin{cases} 0 < S - S_{2k} < a_{2k+1} \\ 0 < S_{2k+1} - S < a_{2k+2} \end{cases}$$

В любом случае $|S - S_n| < a_{n+1}$. □

Замечание. Отметим, что $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ — гармонический ряд, который расходится. Поэтому условие (1.3.2) не является достаточным.

Лемма 1.3.5. (Лемма Абеля). Пусть $p \geq 1$, последовательность $\{a_k\}_{k=p}^{\infty}$ монотонна, а последовательность $\{b_k\}_{k=p}^{\infty}$

такова, что $\left| \sum_{k=p}^i b_k \right| \leq B$, где $p \leq i \leq n$. Тогда $\left| \sum_{k=p}^n a_k b_k \right| \leq B(|a_p| + 2|a_n|)$.

Доказательство. Обозначим $B_i = \sum_{k=p}^i b_k$. Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n a_k b_k &= a_p B_p + a_{p+1}(B_{p+1} - B_p) + \dots + a_n(B_n - B_{n-1}) = \\ &= (a_p - a_{p+1})B_p + (a_{p+2} - a_{p+1})B_{p+1} + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_n + a_n B_n = \sum_{k=p}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n, \end{aligned}$$

из чего заключаем, что

$$\left| \sum_{k=p}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| |B_k| + |a_n| |B_n| \leq B \left(\sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| \right).$$

Если последовательность $\{a_k\}_{k=p}^{\infty}$ убывает, то $\sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = a_p - a_n$; если возрастает, то $\sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = a_n - a_p$.

В любом случае

$$\sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = |a_n - a_p| \implies \sum_{k=p}^n a_k b_k \leq B(|a_n - a_p| + |a_n|) \leq B(|a_p| + 2|a_n|).$$

□

Теорема 1.3.6. (Признаки Дирихле и Абеля). Пусть:

- (1) (Дирихле) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены константой A , а числа b_k монотонно стремятся к 0;
- (2) (Абель) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена константой B .

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

- (1) По условию для любых $i > m$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m}^i a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^i a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^i a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{m-1} a_k \right| \leq 2A,$$

поэтому по лемме Абеля $\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq 2A(|b_m| + 2|b_n|)$ для любых $n > m$.

По определению предела по $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{6A}$ найдем такой номер N , что для всех $n > N$ выполнено $|b_n| < \frac{\varepsilon_0}{6A}$, тогда при тех же условиях для любых $n > m > N$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq 2A \left(\frac{\varepsilon_0}{6A} + \frac{\varepsilon_0}{3A} \right) = \varepsilon_0,$$

откуда по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

- (2) По критерию Коши по $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{3B}$ найдем такой номер N , что для всех $n > m > N$ выполнено $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon_0}{3B}$, тогда

при тех же условиях для всех $n > m > N$ по лемме Абеля $\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{3B}(|b_m| + 2|b_n|) \leq \frac{\varepsilon_0}{3B}(B + 2B) = \varepsilon_0$, откуда по

критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

□

Пример 1.3.7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ сходится по признаку Дирихле. Действительно, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ монотонно, а

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \frac{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \sin \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{\left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|} \left| \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Пример 1.3.8. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx \cos \frac{\pi}{k}}{\ln \ln k}$ сходится по признаку Абеля. Действительно, $\cos \frac{\pi}{n}$ монотонна и ограничена по модулю единицей, а ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln \ln k}$ сходится по признаку Дирихле (аналогично предыдущему примеру).

Пример 1.3.9. Исследуем на сходимость при $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}$.

$$\frac{1}{1 - (-1)^n n^{-\alpha}} = 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha (1 - (-1)^n n^{-\alpha})} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \right) \right).$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ сходится по признаку Лейбница (1.3.4), а ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} + \bar{o} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \right) \right)$ по (1.2.5) сходится при $\alpha < \frac{1}{2}$.

Следовательно, исходный ряд сходится при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

1.4. Перестановки рядов

Определение 1.4.1. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{\varphi(k)}$ называется *перестановкой* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Теорема 1.4.2. (Коши). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^*$ также сходится абсолютно, и суммы исходного и переставленного ряда совпадают.

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^*$ следует из (1.2.2), ибо $\sum_{k=1}^n |u_k^*| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$ по условию.

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^n u_k^*$. Поскольку остатки сходящегося ряда $\sum_{k=n}^{\infty} |u_k|$ стремятся к 0, для всякого

$\varepsilon > 0$ найдется такое N , что $\sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда при тех же условиях $|S - S_N| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Выберем M такое, что $\{u_1, \dots, u_N\} \subseteq \{u_1^*, \dots, u_M^*\}$, тогда для всех $m > M$ выполнено $|S_m^* - S_N| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда

$$|S - S_m^*| = |(S - S_N) + (S_N - S_m^*)| \leq |S - S_N| + |S_N - S_m^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^*$ сходится к S . □

Теорема 1.4.3. (Римана). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится условно, то для любого B , конечного или бесконечного, существует перестановка этого ряда, сходящаяся к B .

Доказательство. Обозначим $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательности соответственно положительных и модулей неположительных членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$; примем также формальные равенства $(P) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Поскольку p_k и q_k — члены сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, очевидно, они имеют своим пределом 0. Однако ряды (P) и (Q) расходятся. В самом деле, для частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ справедливы соотношения $S_n = P_l - Q_m$ и $S_n^* = P_l + Q_m$, где l и m — количество положительных и отрицательных чисел среди первых n членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, а $S_n^* = \sum_{k=1}^n |u_k|$. Предположим, что один из рядов (P) и (Q) сходится. Тогда из первого соотношения следует сходимость другого ряда, а из второго — сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, что противоречит условию. Следовательно, оба ряда (P) и (Q) , а следовательно, и все их остатки, расходятся.

Пользуясь указанным замечанием, построим вначале перестановку ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, сходящуюся к некоторому конечному B :

(1) сначала возьмем $p_1, \dots, p_{n_1}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > B, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1-1} p_k \leq B;$$

(2) затем возьмем $q_1, \dots, q_{m_1}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k < B, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1-1} q_k \geq B;$$

(3) затем вновь возьмем $p_{n_1+1}, \dots, p_{n_2}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > B, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} p_k \leq B$$

и так далее (на каждом шаге берем не менее 1 члена).

Очевидно, что частичная суммы полученной перестановки отличаются от B по модулю не более, чем на величину последнего добавленного в нее члена, поэтому, так как p_k и q_k имеют своим пределом 0, эта перестановка действительно сходится к B .

Теперь рассмотрим случай $B = +\infty$. Проведем перестановку схожим образом с предыдущим случаем:

(1) сначала возьмем $p_1, \dots, p_{n_1}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > 1, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1-1} p_k \leq 1;$$

(2) затем возьмем $p_{n_1+1}, \dots, p_{n_2}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > 2, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} p_k \leq 2$$

и так далее (на каждом шаге берем не менее 1 члена).

При таком построении частичные суммы стремятся к $+\infty$, так как при добавлении q_k они не могут быть меньше k более, чем на $q_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, поэтому построенная перестановка действительно сходится к $+\infty$.

Случай $B = -\infty$ рассматривается аналогично. □

1.5. Теоремы о произведениях числовых рядов

Теорема 1.5.1. (Коши). Пусть ряды $(U) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $(V) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся к U и V соответственно. Если ряды (U) и (V) сходятся абсолютно, то ряд $(W) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$, составленный из попарных произведений членов рядов (U) и (V) , взятых в произвольном порядке, сходится абсолютно, и его сумма равна $W = U \cdot V$.

Доказательство. Обозначим $U^* = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, $V^* = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$, $\nu_n = \max \{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n\}$. Тогда очевидно

$$\sum_{k=1}^n |w_k| = \sum_{k=1}^n |u_{i_k} v_{j_k}| \leq (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{\nu_n}|) \cdot (|v_1| + |v_2| + \dots + |v_{\nu_n}|) \leq U^* \cdot V^*,$$

откуда по (1.2.2) следует абсолютная сходимость ряда (W) .

Чтобы найти сумму ряда (W) , перегруппируем его члены (по (1.4.2) это не изменит суммы):

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + \dots + \left(v_k \sum_{i=1}^{k-1} u_i + u_k v_k + u_k \sum_{j=1}^{k-1} v_j \right) + \dots$$

При такой нумерации частичные суммы $W_n = U_n V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U \cdot V$. □

Теорема 1.5.2. (Мертенса). Пусть ряды $(U) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $(V) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся к U и V соответственно. Если ряд (U) сходится абсолютно, то ряд $(W) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i v_{k-i} \right)$ сходится к $W = U \cdot V$.

Доказательство. Обозначим $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = U^*$.

По условию частичные суммы ряда (V) можно записать как $V_m = V - \nu_m$, где $\nu_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Тогда нетрудно видеть, что частичная сумма W_n представима как

$$W_n = u_1 V_1 + u_2 V_{n-1} + \dots + u_n V_1 = U_n V - (u_1 \nu_n + u_2 \nu_{n-1} + \dots + u_n \nu_1) = U_n V - \eta_n.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что $\eta_n = u_1 \nu_n + u_2 \nu_{n-1} + \dots + u_n \nu_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Воспользуемся тем, что $\nu_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Поскольку сходящаяся последовательность ограничена, выберем константу $M > 0$ такую, что для всех k выполнено $|\nu_k| \leq M$. Далее, из определения предела по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что для всех $n > N$ выполнено $|\nu_n| < \varepsilon$.

Перепишем выражение для η_n с учетом этих замечаний:

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n u_{n-k} \nu_k \leq \left| \sum_{k=1}^n u_{n-k} \nu_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N u_{n-k} \nu_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n u_{n-k} \nu_k \right| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Оценим величины Σ_1 и Σ_2 .

Поскольку ряд (U) сходится абсолютно, начиная с некоторого $N_1 \geq N$ для всякого $n > N_1$ выполнено $\sum_{k=n-N}^n |u_k| \leq \varepsilon$.

Отсюда имеем оценку на Σ_1 :

$$\Sigma_1 = \left| \sum_{k=1}^N u_{n-k} \nu_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |u_{n-k}| |\nu_k| \leq M \sum_{k=1}^N |u_{n-k}| = M \sum_{k=n-N}^n |u_k| \leq M \varepsilon.$$

Оценка на Σ_2 также следует из абсолютной сходимости ряда (U) :

$$\Sigma_2 = \left| \sum_{k=N+1}^n u_{n-k} \nu_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^n |u_{n-k}| |\nu_k| \leq \varepsilon \sum_{k=N+1}^n |u_{n-k}| \leq U^* \varepsilon.$$

Таким образом, $\eta_n \leq \varepsilon (M + U^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, откуда $W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U \cdot V$. □

1.6. Бесконечные произведения

Наряду с числовыми рядами рассматривают бесконечные произведения – формальные записи вида

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \cdots$$

Определение 1.6.1. Произведение $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится*, если существует конечный ненулевой предел частичных произведений $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$.

Предложение 1.6.2. (Необходимое условие сходимости). Если произведение $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится к P , то необходимо $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 1$.

Доказательство.

$$p_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

□

Предложение 1.6.3. Пусть $p_k > 0$. Тогда произведение $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k$ сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k \right)$.

Доказательство. Для частичных произведений P_n имеем:

$$\ln P_n = \ln \prod_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \ln p_k \implies P_n = \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln p_k \right).$$

В силу непрерывности и строгой монотонности экспоненты отсюда напрямую следуют оба утверждения предложения. □

Теорема 1.6.4. Пусть все a_k одного знака. Тогда произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По (1.6.3) сходимость произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ равносильна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$, откуда необходимо $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Но числа a_k и $\ln(1 + a_k)$ одного знака, поэтому из канонического предела $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_k)}{a_k} = 1$ по (1.2.4) ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно. □

Теорема 1.6.5. Пусть для всех k $a_k > -1$ и сходится один из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. Тогда сходимость другого ряда равносильна сходимости произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$.

Доказательство. Какой бы из рядов не сходил, в любом случае $a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, откуда из разложения Тейлора

$$\ln(1 + a_k) = a_k - \frac{1}{2} a_k^2 + o(a_k^2) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k - \ln(1 + a_k)}{a_k^2} = \frac{1}{2},$$

и так как $\ln(1 + x) < x$ для $x > -1, x \neq 0$, в силу (1.2.4) ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \ln(1 + a_k))$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся или расходятся одновременно.

Если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся, то из проведенных рассуждений сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$, а значит, и $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$.
 Обратно, пусть сходится $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$, тогда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$, поэтому из сходимости одного из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ следует сходимость другого. $\square$

Замечание. Произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ может сходиться, даже если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ расходятся.

Пример: пусть $a_{2k-1} = -\frac{1}{\sqrt{k}}$, а $a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$. Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} \right)$, очевидно, расходятся, однако произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_{2k-1})(1+a_{2k}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}} \right)$$

сходится в силу (1.6.4) к некоторому числу P , откуда для частичных произведений $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ имеем:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k} = P; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_{2k} \cdot (1+a_{2k+1})) = P \cdot 1 = P. \end{cases},$$

и рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве теоремы (1.3.4), заключаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$, то есть произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ сходится.

2. Функциональные последовательности и ряды

2.1. Понятие равномерной сходимости

Определение 2.1.1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функций, определенных на множестве X , сходится к функции $\varphi(x)$:

- (1) *поточечно* (обозначение: $f_n(x) \rightarrow \varphi(x)$), если при фиксированном $x \in X$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$;
- (2) *равномерно* (обозначение: $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ неравенство $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.

Теорема 2.1.2. (sup-критерий равномерной сходимости). Для того, чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, тогда по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое N , что для всех $n > N$ неравенство $|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in X$. Тогда, очевидно,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда по определению предела $\sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Обратно: пусть $\sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. По определению предела по $\varepsilon > 0$ найдем такое N , что для всех $n > N$

выполнено $\sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях, очевидно,

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

выполнено для любого $x \in X$, и мы вписываемся в определение равномерной сходимости. $\square$

Замечание. Из равномерной сходимости последовательности функций, безусловно, следует поточечная, однако обратное неверно.

Контрпример: пусть $X = [0, 1]$, а $f_n(x) = x^n$. Тогда

$$f_n(x) \rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases},$$

но сходимость не равномерная, ибо $\sup_{x \in X} |f_n(x) - \varphi(x)| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$.

Теорема 2.1.3. (Критерий Коши равномерной сходимости). Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной конечной в каждой точке функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > m > N$ неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.

Доказательство. Если $f_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$, то по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое N , что для всех $n > m > N$ неравенства $|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f_m(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнены для всех $x \in X$. Отсюда имеем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_m(x) - \varphi(x)| + |f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. По условию в каждой точке $x_0 \in X$ в силу критерия Коши для последовательностей существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \varphi(x_0)$, поэтому $f_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ на X . Далее, устремляя в неравенстве из условия один из номеров (например, m) к $+\infty$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для всех $n > N$ неравенство $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$, то есть мы вписались в определение равномерной сходимости. $\square$

Теорема 2.1.4. (Признак Дини). Пусть функции $f_n(x)$ определены и непрерывны на компакте $D \subseteq \mathbb{R}$, и в каждой точке $x \in D$ их значения образуют возрастающую последовательность. Если предельная функция $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ существует и непрерывна на D , то сходимость $f_n(x)$ к $\varphi(x)$ будет равномерной.

Доказательство. Обозначим $r_n(x) = \varphi(x) - f_n(x)$. По $\varepsilon > 0$ для каждого $x \in D$ выберем индекс $n(x)$ такой, что

$$0 < r_n(x) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности это неравенство верно и в некоторой окрестности $U_{n(x)}$ точки x .

Из открытого покрытия компакта D множествами $U_{n(x)}$ по лемме Бореля-Лебега можно выделить конечное подпокрытие

$$\{U_{n(x_1)}, \dots, U_{n(x_m)}\}.$$

Положим $M = \max\{n(x_1), \dots, n(x_m)\}$, тогда в силу убывания в каждой точке $x \in D$ последовательности $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ для всех $x \in D$ и $n > M$ имеем

$$0 \leq r_n(x) = \varphi(x) - f_n(x) < \varepsilon,$$

то есть мы вписались в определение равномерной сходимости. $\square$

2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Под функциональным рядом понимается формальная запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots,$$

где функции $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, определены на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}$.

Определение 2.2.1. Частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ суть функции $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2.2.2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится *равномерно* на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на этом множестве.

Теорема 2.2.3. (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > m > N$ неравенство $\left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \right| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.

Доказательство. Поскольку $\left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \right| = S_n(x) - S_m(x)$, утверждение теоремы следует из (2.1.3). $\square$

Лемма 2.2.4. Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходятся равномерно на множестве X , а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ ограничены на этом множестве. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(x)u_k(x) + \beta(x)v_k(x))$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Обозначим через A и B такие константы, что для всех $x \in X$ выполнено $|\alpha(x)| \leq A$ и $|\beta(x)| \leq B$. Применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такое N , что для всех $n > m > N$ неравенства $\left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2A}$ и $\left| \sum_{k=m+1}^n v_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2B}$ выполнены для всех $x \in X$. Тогда при тех же условиях для всех $n > m > N$ неравенство

$$\left| \sum_{k=m+1}^n (\alpha(x)u_k(x) + \beta(x)v_k(x)) \right| \leq |\alpha(x)| \left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \right| + |\beta(x)| \left| \sum_{k=m+1}^n v_k(x) \right| < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$, и по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(x)u_k(x) + \beta(x)v_k(x))$ сходится равномерно на X . $\square$

Признаки сходимости функциональных рядов.

Теорема 2.2.5. (Мажорантный признак Вейерштрасса). Если функции $u_k(x)$ удовлетворяют на множестве X неравенствам $|u_k(x)| \leq \alpha_k$, где α_k — члены сходящегося ряда, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X .

Доказательство. Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такое N , что для всех $n > m > N$ выполнено $\sum_{k=m}^n \alpha_k < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях для всех $n > m > N$ неравенство

$$\left| \sum_{k=m}^n u_k(x) \right| < \sum_{k=m}^n |u_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n \alpha_k < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$, поэтому по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно (и абсолютно) на X . $\square$

Теорема 2.2.6. (Признаки Дирихле и Абеля). Пусть:

(1) (Дирихле) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ в совокупности — при любых x и n — ограничены константой A , а функции $b_k(x)$ сходятся к 0 равномерно на множестве X и при каждом x образуют монотонную последовательность;

(2) (Абель) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на множестве X , а функции $b_k(x)$ ограничены в совокупности константой B и при каждом x образуют монотонную последовательность.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Зафиксируем произвольный $x \in X$.

(1) По условию для любых $i > m$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m}^i a_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^i a_k(x) - \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^i a_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x) \right| \leq 2A,$$

поэтому по лемме Абеля $\left| \sum_{k=m}^n a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2A(|b_m(x)| + 2|b_n(x)|)$ для любых $m > n$.

В силу равномерной сходимости по $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{6A}$ найдем такой номер N , что для всех $n > N$ выполнено $|b_n(x)| < \frac{\varepsilon_0}{6A}$, тогда при тех же условиях для любых $n > m > N$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2A \left(\frac{\varepsilon_0}{6A} + \frac{\varepsilon_0}{3A} \right) = \varepsilon_0,$$

откуда по критерию Коши в силу произвольного выбора x ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно.

(2) По критерию Коши по $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{3B}$ найдем такой номер N , что для всех $n > m > N$ выполнено $\left| \sum_{k=m}^n a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon_0}{3B}$, тогда

при тех же условиях для всех $n > m > N$ по лемме Абеля $\left| \sum_{k=m}^n a_k(x)b_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{3B}(|b_m(x)| + 2|b_n(x)|) \leq \frac{\varepsilon_0}{3B}(B + 2B) = \varepsilon_0$,

откуда по критерию Коши в силу произвольного выбора x ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится. $\square$

Теорема 2.2.7. (Признак Дини). Пусть функции $u_k(x)$ определены и непрерывны на компакте $D \in \mathbb{R}$ и принимают на нем строго положительные значения. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в каждой точке $x \in D$ к непрерывной на D функции, то сходимость ряда будет равномерной на D .

Доказательство. Следует напрямую из (2.1.4) применительно к последовательности частичных сумм $S_n(x)$. $\square$

Пример 2.2.8. Исследуем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ на множествах $X_1 = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ и $X_2 = [0, \pi]$.

(1) На множестве X_1 ряд сходится равномерно по признаку Дирихле. Действительно, поскольку $\frac{1}{k}$ не зависит от x , монотонное стремление к 0 будет еще и равномерным, а в силу оценки из (1.3.7)

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

(2) На множестве X_2 равномерной сходимости нет. Действительно,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(k \cdot \frac{1}{n})}{k} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n+1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\sin \frac{2n}{n}}{2n} \right| \geq \frac{\sin 1}{n+1} + \dots + \frac{\sin 1}{2n} \geq n \cdot \frac{\sin 1}{2n} = \frac{\sin 1}{2},$$

и для завершения доказательства достаточно положить в отрицании критерия Коши $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$ и $x = \frac{1}{n} \in X_2$.

2.3. Предельный переход в равномерно сходящихся рядах

Теорема 2.3.1. Пусть x_0 – предельная точка X и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X к функции $S(x)$. Если для всякого k существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = \alpha_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится и справедлив предельный переход:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x).$$

Доказательство. Сначала установим сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что для всех $n > m > N$ неравенство $\left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in X$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \rightarrow x_0$, получаем:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) \right) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

поэтому по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится к некоторому числу A .

По определению сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что для всех $n > N$ выполнены неравенства

$$\left| A - \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } \left| S(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

причем второе – при всех $x \in X$.

Далее, по определению предела функции, по $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3n} > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что $|x - x_0| < \delta$, выполнено

$$\left| \sum_{k=1}^n (u_k(x) - \alpha_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |u_k(x) - \alpha_k| < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{3n} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при тех же условиях для всех $x \in X$ таких, что $|x - x_0| < \delta$,

$$|S(x) - A| \leq \left| S(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| + \left| A - \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| < \varepsilon,$$

и мы вписались в определение предела функции. □

Следствие 2.3.2. Пусть функции $u_k(x)$ определены и непрерывны на множестве X . Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на X равномерно, то его сумма будет непрерывной на X функцией.

Доказательство. Достаточно положить в (2.3.1) $\alpha_k = u_k(x_0)$. □

Следствие 2.3.3. Пусть x_0 – предельная точка X , а последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на X к функции $\varphi(x)$. Если для всякого k существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ и справедлив предельный переход:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right).$$

В частности, если функции $f_k(x)$ непрерывны на X , то и $\varphi(x)$ также непрерывна на X .

Доказательство. Положим $u_1(x) = f_1(x)$ и для $k \geq 2$ $u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$. Тогда $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, и утверждение следует напрямую из (2.3.1) и (2.3.2). □

Пример 2.3.4. Следствие (2.3.2) позволяет строить примеры функций, непрерывных на всей числовой прямой, но не дифференцируемых ни в одной ее точке. Приведем один из таких примеров, приписываемый Вейерштрассу:

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin 8^k x$$

Рассмотрим для произвольного x разность

$$\omega(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} [\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x].$$

При $k > n$ число $8^k \cdot 2^{-3n-1} = 2^{3(k-n)-1}$ будет целым и четным, поэтому для него

$$\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x = 0.$$

Значит, достаточно рассматривать члены ряда вплоть до n .

При $k = n$:

$$2^{-n} [\sin 8^n(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^n x] = 2^{-n} \left[\sin \left(8^n x \pm \frac{\pi}{2} \right) - \sin 8^n x \right] = 2^{-n+1} \sin \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(8^n x \pm \frac{\pi}{4} \right),$$

и для каждого значения x можно выбрать знак $+$ или $-$ так, что $\left| \cos \left(8^n x \pm \frac{\pi}{4} \right) \right| \geq \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это следует из того, что

$$\left| \cos \left(8^n x \pm \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| \cos \left(8^n x \mp \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| \sin \left(8^n x \mp \frac{\pi}{4} \right) \right|,$$

а среди чисел $|\sin \alpha|$ и $|\cos \alpha|$ по крайней мере одно не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При $k < n$ воспользуемся классическим неравенством $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} [\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x] \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (2^{-k} \cdot 8^k \cdot 2^{-3n-1}\pi) = 2^{-3n-1}\pi \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 2^{-3n-1}\pi \cdot \frac{4-4^n}{1-4} < 2^{-n} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Итого при соответствующем выборе знака:

$$\begin{aligned} |\varphi(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \varphi(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n 2^{-k} [\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x] \right| \geq |2^{-n} [\sin 8^n(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^n x]| - \\ &\quad - \left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} [\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x] \right| > 2^{-n+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-n} \cdot \frac{\pi}{6} = 2^{-n} \left(1 - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\left| \frac{\omega(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \omega(x)}{\pm 2^{-3n-1}\pi} \right| > \left(1 - \frac{\pi}{6} \right) \frac{2^{2n+1}}{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

поэтому в силу произвольного выбора x функция $\omega(x)$ не имеет производной ни в одной точке x .

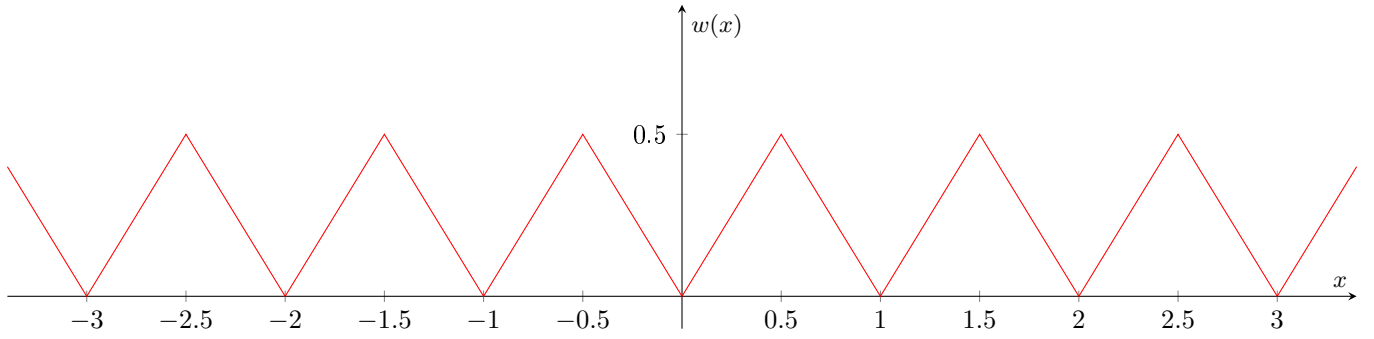
Пример 2.3.5. Другой пример нигде не дифференцируемой непрерывной функции принадлежит ван дер Вардену. Введем функцию "расстояния до ближайшего целого"

$$w(x) = \min \{x - [x], [x] + 1 - x\}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, задаваемую рядом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} w(10^k x).$$

Поскольку $w(x) < 1$ для любого x , общий член этого ряда не превосходит 10^{-k} . Поэтому по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Рис. 1: График функции $w(x)$.

А в силу непрерывности слагаемых по x имеем непрерывность функции f всюду на $\mathbb{R}$.

Покажем теперь, что функция f не имеет производной в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

(Заметим, что в силу периодичности функции w , и, как следствие, функции f , достаточно ограничиться рассмотрением случая $x \in [0, 1)$.)

Запишем x в виде (формально) бесконечной десятичной дроби

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_k \dots$$

(в случае $x \in \mathbb{Q}$, когда дробь конечна, дополним ее нулями). Тогда по определению имеем

$$w(10^k x) = \begin{cases} 0, x_{k+1} x_{k+2} \dots & , \quad \text{если} \quad 0, x_{k+1} x_{k+2} \dots \leq 0.5; \\ 1 - 0, x_{k+1} x_{k+2} \dots & , \quad \text{если} \quad 0, x_{k+1} x_{k+2} \dots > 0.5. \end{cases}$$

Теперь определим последовательность знаков

$$\varepsilon_m = \begin{cases} -1, & \text{если } x_m \text{ равно 4 или 9;} \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

и рассмотрим приращение

$$f(x + 10^{-m} \varepsilon_m) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w(10^k x + 10^{k-m} \varepsilon_m) - w(10^k x)}{10^k}.$$

При $k \geq m$ имеем

$$10^{k-m} \varepsilon_m \in \mathbb{Z} \implies w(10^k x + 10^{k-m} \varepsilon_m) = w(10^k x),$$

поэтому в числителе соответствующего слагаемого стоит 0.

При $m > k$ из построения ε_m видно, что числа $10^k(x + 10^{-m} \varepsilon_m)$ и $10^k x$ находятся по одну сторону от 0.5, поэтому в числителе будет стоять $\pm 10^{k-m}$, а, стало быть, все слагаемое будет равно $\pm 10^{-m}$.

Стало быть,

$$\frac{f(x + 10^{-m} \varepsilon_m) - f(x)}{10^{-m} \varepsilon_m} = \pm 10^m \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 10^{-m}) = \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 1) = N_m \in \mathbb{Z},$$

причем четность N_m та же, что и у $m - 1$. Тем самым указанные отношения не имеют предела при $m \rightarrow \infty$.

С другой стороны, если бы у функции f существовала производная в точке x , то было бы выполнено

$$f'(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x + 10^{-m} \varepsilon_m) - f(x)}{10^{-m} \varepsilon_m}.$$

Следовательно, по доказанному производной функции f не существует ни в какой точке x .

2.4. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании

Теорема 2.4.1. Пусть функции $f_k(x)$ определены и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, на котором последовательность их производных $\{f'_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно. Если последовательность функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то она сходится равномерно к дифференцируемой на этом отрезке функции $\varphi(x)$ и справедливо равенство:

$$\varphi'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x).$$

Доказательство. Для доказательства равномерной сходимости применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что для всех $n > m > N$ выполнены неравенства

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \text{ и } |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon,$$

причем второе – при всех $x \in [a, b]$. Для удобства обозначим $F(x) = f_m(x) - f_n(x)$. По теореме Лагранжа конечных приращений на интервале (x, x_0) найдется точка ξ такая, что

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0),$$

откуда заключаем, что для всех $x \in [a, b]$ выполнено

$$|F(x)| \leq |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0)| = |F'(\xi)||x - x_0| + |F(x_0)| < \varepsilon(b - a + 1),$$

и по критерию Коши последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $\varphi(x)$.

Для фиксированной точки $c \in [a, b]$ рассмотрим последовательность функций $g_k(x) = \frac{f_k(x) - f_k(c)}{x - c}$. Тогда при прежних

условиях на n и m оценим $G(x) = g_n(x) - g_m(x) = \frac{1}{x - c}(F(x) - F(c))$.

По теореме Лагранжа для функции $F(x)$ на интервале (c, x) существует точка η такая, что

$$G(x) = \frac{F'(\eta)(x - c)}{x - c} = F'(\eta) \implies |G(x)| = |F'(\eta)| < \varepsilon.$$

Эта оценка справедлива для всех x из $X = [a, b] \setminus \{c\}$. Значит, по критерию Коши последовательность $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на X . Кроме того, для всех k существуют пределы $\lim_{x \rightarrow c} g_k(x) = f'_k(c)$ (в концах отрезка речь идет об односторонних производных). Таким образом, мы вписались в условия следствия (2.3.3), и возможен предельный переход:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow c} g_k(x) \right) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \right) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \varphi'(x).$$

В силу произвольного выбора c заключаем, что установленное равенство верно на всем отрезке $[a, b]$. $\square$

Следствие 2.4.2. Пусть функции $u_k(x)$ определены и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, на котором ряд из производных $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то он сходится равномерно к дифференцируемой на этом отрезке функции и справедливо равенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

Доказательство. Достаточно применить (2.4.1) к последовательностям частичных сумм рядов. $\square$

Теорема 2.4.3. Пусть функции $f_k(x)$ определены и интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Если на этом отрезке $f_k(x) \Rightarrow \varphi(x)$, то $\varphi(x)$ также интегрируема по Риману на $[a, b]$ и справедливо равенство:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Доказательство. В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такое N , что для всех $n > N$ неравенство

$$|\varphi(x) - f_n(x)| < \varepsilon \iff f_n(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in [a, b]$. Сравним верхние и нижние суммы Дарбу функций $\varphi(x)$ и $f_n(x)$:

$$\begin{cases} \varphi(x) < f_n(x) + \varepsilon \implies \overline{S_T}(\varphi) \leq \overline{S_T}(f_n) + \varepsilon(b - a) \\ f_n(x) - \varepsilon < \varphi(x) \implies \underline{S_T}(\varphi) \geq \underline{S_T}(f_n) - \varepsilon(b - a) \end{cases}$$

Полученные неравенства верны для любого разбиения T .

Но по определению интегрируемости для $f_n(x)$ существует такое разбиение T^* , что $\overline{S_{T^*}}(f_n) - \underline{S_{T^*}}(f_n) < \varepsilon$. Тогда имеем:

$$\overline{S_{T^*}}(\varphi) - \underline{S_{T^*}}(\varphi) \leq [\overline{S_{T^*}}(f_n) + \varepsilon(b - a)] - [\underline{S_{T^*}}(f_n) - \varepsilon(b - a)] < \varepsilon(1 + 2(b - a)),$$

и по усиленному критерию Дарбу $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$, откуда немедленно следует

$$\int_a^b f_n(x)dx - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx + \varepsilon(b-a) \implies \left| \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \varepsilon(b-a),$$

и по определению предела

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

□

Следствие 2.4.4. Пусть функции $u_k(x)$ определены и интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Если на этом отрезке ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно, то его сумма $S(x)$ также интегрируема по Риману на $[a, b]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_k(x)dx \right).$$

Доказательство. Достаточно применить (2.4.3) к последовательностям частичных сумм рядов. □

2.5. Степенные ряды

Определение 2.5.1. Степенным рядом называют функциональный ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, где $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 2.5.2. (Первая теорема Абеля). Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z_0 \neq 0$, то для всех $q > 0$, $q < |z_0|$ он сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq q$.

Доказательство. В силу сходимости ряда в точке z_0 существует константа $M > 0$ такая, что для всех k выполнено

$$|c_k z_0^k| \leq M.$$

Тогда, учитывая, что $|z| \leq q < |z_0|$, имеем:

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^k \leq M \left(\frac{q}{|z_0|} \right)^k.$$

Но ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{|z_0|} \right)^k$ сходится по признаку Коши, поэтому по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абсолютно и равномерно при $|z| \leq q$. □

Замечание. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z_0 \neq 0$, то во всем круге $|z| < |z_0|$ равномерной сходимости может не быть.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$, сходящийся в точке $z = -1$ по признаку Лейбница. Если имеет место равномерная сходимость в круге $|z| < 1$, то по критерию Коши по $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , что для всех $n > m > N$ неравенство $\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} z^k \right| < \varepsilon$ должно быть выполнено при всех z таких, что $|z| < 1$. Переходя к пределу при $z \rightarrow 1$, получаем:

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \right| \leq \varepsilon,$$

что неверно в силу расходимости гармонического ряда. Следовательно, во всем круге $|z| < 1$ равномерной сходимости нет.

Определение 2.5.3. *Радиус сходимости* степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ - это число $R = \sup |z|$ по всем z , для которых этот ряд сходится. При этом естественным полагается, что $0 \leq R \leq +\infty$.

Теорема 2.5.4. (Формула Коши-Адамара). *Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ может быть найден по формуле*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Доказательство. Обозначим $A = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$

(1) Покажем, что $R \leq \frac{1}{A}$. Если $R = 0$, это очевидно. Пусть $R > 0$, тогда зададимся числом $r : 0 < r < R$. По определению радиуса сходимости ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ сходится, поэтому выберем константу $M > 0$, ограничивающую в совокупности общий член этого ряда. Тогда очевидно $r \sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{|c_k r^k|} < \sqrt[k]{M}$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$A = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{1}{r} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M} = \frac{1}{r} \implies r \leq \frac{1}{A}$$

для всех $r < R$. Значит, и $R \leq \frac{1}{A}$.

(2) Покажем, что $R \geq \frac{1}{A}$. Если $R = +\infty$ это очевидно. Пусть $R < +\infty$, тогда для всех $r > R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ расходится. И тем более расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$, откуда по признаку Коши

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k| r^k} = A \cdot r \geq 1 \implies r \geq \frac{1}{A}$$

Значит, и $R \geq \frac{1}{A}$. □

Лемма 2.5.5. (О трех радиусах сходимости). *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

совпадают.

Доказательство. Обозначим радиусы сходимости этих рядов за R_1 , R_2 и R_3 соответственно. По формуле Коши-Адамара:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}; \\ R_2 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|c_k|}{k+1}}} = \frac{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1}}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = R_1; \\ R_3 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|c_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = R_1. \end{aligned}$$

□

Замечание. При одинаковом радиусе сходимости поведение рядов на границе может быть разным. Рассмотрим пример:

$$(A) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad (B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} z^k, \quad (C) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$$

По (2.5.5) радиусы сходимости всех трех рядов равны 1, однако на границе $|z| = 1$ ряд (A) расходится во всех точках окружности, ряд (B) сходится при $z = -1$ и расходится при $z = 1$, а ряд (C) сходится на всей окружности $|z| = 1$.

Теорема 2.5.6. Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, где $x \in \mathbb{R}$, имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда:

- (1) сумма ряда $S(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале сходимости $(-R, R)$;
- (2) для всякого t из интервала сходимости $S(x)$ интегрируема по Риману на $[0, t]$.

Доказательство. Воспользуемся первой теоремой Абеля.

- (1) Для всякого $r < R$ по (2.5.2) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится абсолютно и равномерно при $|x| \leq r$. То же касается и рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k z^{k-m},$$

радиус сходимости которых равен R по (2.5.5) (доказывается по индукции). Осталось применить теоремы (2.3.2) и (2.4.2).

- (2) По $t \in (-R, R)$ возьмем r такое, что $|t| < r < R$. По (2.4.4) $S(x)$ интегрируема по Риману на $[-r, r]$, а следовательно, и на $[0, t] \subseteq [-r, r]$. $\square$

Теорема 2.5.7. (Вторая теорема Абеля). Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $w \neq 0$. Тогда при $z = \alpha w$, где $0 \leq \alpha \leq 1$,

ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно.

Доказательство. Требуется исследовать на равномерную сходимость по α ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha w)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k w^k \cdot \alpha^k)$ на $[0, 1]$.

Числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$ сходится (и, следовательно, равномерно сходится), а последовательность $\{\alpha^k\}_{k=0}^{\infty}$ монотонна при каждом значении α и ограничена в совокупности константой 2 на $[0, 1]$.

Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha w)^k$ сходится равномерно на $[0, 1]$. $\square$

2.6. Ряды Тейлора-Маклорена

Определение 2.6.1. Функция $f(x)$ называется *аналитической* в точке x_0 , если в некоторой окрестности x_0 имеет место разложение функции в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Предложение 2.6.2. Для аналитической в точке x_0 функции $f(x)$ разложение в степенной ряд единственно.

Доказательство. По (2.4.2)

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)c_k (x - x_0)^{k-n}.$$

При $x = x_0$ отсюда получаем $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, поэтому коэффициенты c_n определены однозначно функцией $f(x)$. $\square$

Определение 2.6.3. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Лемма 2.6.4. (Критерий сходимости ряда Тейлора к функции). Пусть в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Тогда в этой окрестности ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. В самом деле, сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ к $f(x)$ равносильна условию

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \iff f(x) - S_n(x) = r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Теорема 2.6.5. (Достаточное условие аналитичности). Пусть в окрестности U точки x_0 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема, а $C > 0$ – такая константа, что для всех k в U выполнено $|f^{(k)}(x)| \leq C$. Тогда в окрестности U функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора.

Доказательство. По условию в U имеет место разложение Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа. Кроме того, в U имеет место оценка

$$|r_n(x)| \leq C \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но при фиксированном x ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Д’Аламбера, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0,$$

и по (2.6.4) $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в U .

□

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций в окрестности нуля.

Пример 2.6.6. Экспоненциальная функция (условие (2.6.4) считаем известным):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

По признаку Д’Аламбера при любом значении x этот ряд сходится, поэтому его радиус сходимости равен $+\infty$.

Пример 2.6.7. Синус и косинус (условие (2.6.4) считаем известным):

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

По признаку Д’Аламбера при любом значении x этот ряд сходится, поэтому его радиус сходимости равен $+\infty$.

Пример 2.6.8. Логарифмическая функция:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Докажем это равенство при $|x| < 1$. В самом деле, при $|t| < 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t}.$$

По (2.5.2) этот ряд сходится равномерно на каждом отрезке $|t| \leq x < 1$, поэтому по (2.4.4) на любом отрезке внутри $(-1, 1)$ возможно почленное интегрирование:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^k t^k dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Отметим также, что при $x = 1$ имеем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, который сходится по признаку Лейбница, а при $x = -1$ — расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$. Поэтому радиус сходимости ряда Тейлора функции $\ln(1+x)$ равен 1, а само разложение в ряд справедливо на промежутке $(-1, 1]$.

Пример 2.6.9. Степенная функция $(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!} x^k.$$

Найдем вначале радиус сходимости этого ряда. Обозначим для удобства $b_k(x) = \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!} x^k$, тогда

$$\frac{|b_{k+1}(x)|}{|b_k(x)|} = \left| \frac{m(m-1) \cdots (m-k)x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{m(m-1) \cdots (m-k+1)x^k} \right| = \left| \frac{m-k}{k+1} x \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|.$$

Следовательно, по признаку Д'Аламбера ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$, поэтому его радиус сходимости равен 1.

Теперь проверим, что при $|x| < 1$ выполнено условие (2.6.4). Для этого запишем остаточный член разложения Тейлора в интегральной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x m(m-1) \cdots (m-n)(1+t)^{m-n-1}(x-t)^n dt = \frac{m(m-1) \cdots (m-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n (1+t)^{m-1} dt.$$

Представим $\left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n = x^n \left(\frac{1-\frac{t}{x}}{1+t} \right)^n$. Поскольку числа t и x одного знака и $|t| \leq |x| < 1$, имеем оценку:

$$0 \leq \frac{1-\frac{t}{x}}{1+t} \leq \frac{1-\frac{t}{x}}{1-|t|} \leq 1,$$

откуда заключаем, что

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{m(m-1) \cdots (m-n)}{n!} x^n \right| \left| \int_0^x (1+t)^{m-1} dt \right|.$$

Но по доказанному выше ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{m(m-1) \cdots (m-k)}{k!} x^k \right|$ сходится при $|x| < 1$, следовательно, общий член этого ряда, а

вместе с ним и $R_n(x)$, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, условия (2.6.4) выполнено, а вместе с ним и равенство функции $(1+x)^m$ своему ряду Тейлора при $|x| < 1$.

Проверка сходимости в конечных точках пока остается открытой.

3. Равномерная сходимость по параметру

3.1. Семейства функций, зависящих от параметра

Определение 3.1.1. Пусть X – произвольное множество, Y – подмножество $\mathbb{R}^n$.

Семейством функций $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, зависящих от параметра y , называют множество $\{f(x, y)\}_{y \in Y}$. При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ является функцией переменной x .

Определение 3.1.2. Пусть y_0 – точка прикосновения Y . Говорят, что семейство $f(x, y)$ функций сходится на множестве X при $y \rightarrow y_0$ к функции $\varphi(x)$:

- (1) *поточечно* (обозначение: $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$), если при фиксированном $x \in X$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, выполнено $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$;
- (2) *равномерно* (обозначение: $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.

Теорема 3.1.3. (Критерий Коши равномерной сходимости). Семейство функций $f(x, y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \rightarrow y_0$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для всех y', y'' таких, что $|y' - y_0| < \delta$ и $|y'' - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.

Доказательство. Если $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$, то по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y', y'' таких, что $|y' - y_0| < \delta$ и $|y'' - y_0| < \delta$, неравенства $|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x, y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнены для всех $x \in X$. Отсюда имеем:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq |f(x, y') - \varphi(x)| + |f(x, y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. По условию в каждой точке $x_0 \in X$ в силу критерия Коши для функций существует конечный предел $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = \varphi(x_0)$, поэтому $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$ на X . Далее, устремляя в неравенстве из условия $y' \rightarrow y_0$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех y'' таких, что $|y'' - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y'') - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$, то есть мы вписались в определение равномерной сходимости. $\square$

Теорема 3.1.4. (sup-критерий равномерной сходимости). Для того, чтобы семейство функций $f(x, y)$ сходилось к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \rightarrow y_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

Доказательство. Пусть $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$, тогда по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in X$. Тогда, очевидно,

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда по определению предела $\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0$.

Обратно: пусть $\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0$. По определению предела по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$ выполнено $\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях, очевидно,

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

выполнено для любого $x \in X$, и мы вписываемся в определение равномерной сходимости. $\square$

Теорема 3.1.5. Пусть семейство функций $f(x, y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \rightarrow y_0$. Тогда для всякой последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из Y , не содержащей y_0 элементом, но сходящейся к y_0 , последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{f(x, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X .

Доказательство. В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in X$.

Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы, тогда существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполнено $|y_n - y_0| < \delta$. Тогда при тех же условиях для всех $n > N$ неравенство $|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$, и мы вписались в определение равномерной сходимости. $\square$

Следствие 3.1.6. Пусть $x_0 \in X$ и семейство функций $f(x, y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \rightarrow y_0$. Тогда:

(1) если для всякого $y \in Y$ существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, то существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right);$$

(2) если для всякого $y \in Y$ $f(x, y)$ непрерывна в точке x_0 , то и $\varphi(x)$ непрерывна в x_0 .

Доказательство. Для произвольной последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (3.1.5), утверждение следует из (2.3.3). $\square$

Теорема 3.1.7. (Обобщенная теорема Дини). Пусть при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ непрерывна по x на компакте X и при возрастании y к y_0 , монотонно возрастающая, стремится к предельной функции $\varphi(x)$, также непрерывной на X . Тогда это стремление будет равномерным на X .

Доказательство. Выделим из Y возрастающую последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям (3.1.5), тогда по (2.1.4) $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{f(x, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow \varphi(x)$ на множестве X . По определению это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех $n > N$ неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y_n)| < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$. Тогда для $y > y_n$ по условию $f(x, y) > f(x, y_n)$, поэтому для всех y таких, что $|y - y_0| < |y_n - y_0|$ неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < |\varphi(x) - f(x, y_n)| < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$, и мы вписались в определение равномерной сходимости. $\square$

3.2. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Теорема 3.2.1. Пусть функция $f(x, y)$ определена на $[a, b] \times Y$ и при каждом значении y интегрируема по x на $[a, b]$. Если семейство функций $f(x, y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на $[a, b]$ при $y \rightarrow y_0$, то $\varphi(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Доказательство. Для произвольной последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (3.1.5), интегрируемость $\varphi(x)$ следует из (2.4.3).

В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in [a, b]$. Тогда при тех же условиях

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < \varepsilon(b - a),$$

откуда по определению предела следует условие теоремы. $\square$

Лемма 3.2.2. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

есть непрерывная на $[c, d]$ функция.

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [c, d]$.

По теореме Кантора о равномерной непрерывности функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на компакте $[a, b] \times [c, d]$. В частности, из равномерной непрерывности по y по определению следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in [a, b]$.

Следовательно, $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} f(x, y_0)$ на $[a, b]$, и по (3.2.1) справедливо равенство:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = I(y_0).$$

В силу произвольного выбора y_0 функция $I(y)$ непрерывна на всем отрезке $[c, d]$. □

Теорема 3.2.3. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, а $u(y)$ и $v(y)$ – такие непрерывные функции, что для всех $y \in [c, d]$ значения $u(y)$ и $v(y)$ лежат на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$

есть непрерывная на $[c, d]$ функция.

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [c, d]$. Тогда:

$$I(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y) dx + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx - \int_{u(y_0)}^{u(y)} f(x, y) dx.$$

Первый интеграл по (3.2.2) при $y \rightarrow y_0$ стремится к $I(y_0)$, остальные два допускают оценку

$$\begin{cases} \left| \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx \right| \leq M |v(y) - v(y_0)| \\ \left| \int_{u(y_0)}^{u(y)} f(x, y) dx \right| \leq M |u(y) - u(y_0)| \end{cases},$$

где $M = \max |f(x, y)|$, и – в силу непрерывности функций $u(y)$ и $v(y)$ – стремятся к 0 при $y \rightarrow y_0$.

Таким образом, $I(y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} I(y_0)$ для любого $y_0 \in [c, d]$. □

Лемма 3.2.4. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе с производной $f'_y(x, y)$ в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

имеет производную по параметру y , выражаемую формулой:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Доказательство. По формуле Лагранжа конечных приращений

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y + \theta \Delta y),$$

где $0 < \theta < 1$, откуда имеем:

$$\left| \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} - f'_y(x, y) \right| = |f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)| \leq \sup_{|y_2 - y_1| < \Delta y} |f'_y(x, y_2) - f'_y(x, y_1)| \xrightarrow{|\Delta y| \rightarrow 0} 0$$

в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности.

Стало быть,

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx \xrightarrow{|\Delta y| \rightarrow 0} \int_a^b f'_y(x, y) dy.$$

□

Теорема 3.2.5. (Формула Лейбница). Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе с производной $f'_y(x, y)$ в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, а $u(y)$ и $v(y)$ – такие дифференцируемые функции, что для всех $y \in [c, d]$ значения $u(y)$ и $v(y)$ лежат на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$

имеет производную по параметру y , выражаемую формулой:

$$I'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f'_y(x, y) dx + v'(y) \cdot f(v(y), y) - u'(y) \cdot f(u(y), y).$$

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [c, d]$. Тогда:

$$I(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y) dx + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx - \int_{u(y_0)}^{u(y)} f(x, y) dx.$$

Первый интеграл в точке y_0 по (3.2.4) имеет производную, равную $I'(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f'_y(x, y_0) dx$. Для второго интеграла (значение которого в точке y_0 равно 0) по теореме о среднем имеем:

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx = \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \cdot f(v(\mu), y),$$

где $v(\mu)$ содержится между $v(y_0)$ и $v(y)$. Отсюда производная второго интеграла в точке y_0 равна

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{1}{y - y_0} \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y) dx \right) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \cdot f(v(\mu), y) \right) = v'(y_0) \cdot f(v(y_0), y_0).$$

Аналогично, производная третьего интеграла в точке y_0 равна $-u'(y_0) \cdot f(u(y_0), y_0)$.

Объединяя результаты, получаем искомую формулу. □

Теорема 3.2.6. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интегрируем по параметру y на отрезке $[c, d]$ и справедливо равенство:

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Доказательство. Интегрируемость напрямую следует из (3.2.2). Осталось обосновать возможность перестановки повторных интегралов.

Рассмотрим функцию $\varphi(x, y) = \int_c^y f(x, t) dt$, причем $\varphi(x, c) = 0$. Она непрерывна по (3.2.3), ее частная производная по y равна $\varphi'_y(x, y) = f(x, y)$ и непрерывна по условию. Значит, по (3.2.4):

$$\left(\int_a^b \varphi(x, y) dx \right)' = \int_a^b \varphi'_y(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx,$$

откуда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^d dy \left(\int_a^b \varphi(x, y) dx \right)' = \int_a^b \varphi(x, d) dx - \int_a^b \varphi(x, c) dx = \int_a^b \varphi(x, d) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

□

3.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Везде далее предполагается, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ имеет единственную особенность в верхнем пределе интегрирования, то есть $f(x, y)$ определена на $[a, b) \times Y$ и при каждом фиксированном y интегрируема как функция от x на любом отрезке $[a, \xi] \subset [a, b)$.

Определение 3.3.1. Говорят, что н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится на множестве Y :

(1) *поточечно*, если при фиксированном $y \in Y$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\xi_0 < b$, что для всех ξ таких, что $\xi_0 < \xi < b$, выполнено $\left| \int_{\xi}^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon$;

(2) *равномерно*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\xi_0 < b$, что для всех ξ таких, что $\xi_0 < \xi < b$, неравенство $\left| \int_{\xi}^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon$ выполнено для всех $y \in Y$.

Теорема 3.3.2. (Критерий Коши равномерной сходимости). Н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно на множестве Y тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое ξ_0 , что для всех ξ', ξ'' таких, что $\xi_0 < \xi' < \xi'' < b$, неравенство $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$ выполнено для всех $y \in Y$.

Доказательство. Аналогично доказательствам (2.1.3) и (3.1.3). □

Теорема 3.3.3. (sup-критерий равномерной сходимости). Для того, чтобы н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходился равномерно на множестве Y , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_{\xi}^b f(x, y)dx \right| \xrightarrow{\xi \rightarrow b-0} 0.$$

Доказательство. Аналогично доказательствам (2.1.2) и (3.1.4). □

Пример 3.3.4. Н.и. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^y} dx$ сходится на $Y = (1, +\infty)$ поточечно, но не равномерно, ибо

$$\sup_{y>1} \left| \int_{\xi}^{+\infty} \frac{1}{x^y} dx \right| = \sup_{y>1} \frac{x^{1-y}}{1-y} \Big|_{\xi}^{+\infty} = \sup_{y>1} \frac{\xi^{1-y}}{1-y} = +\infty.$$

Признаки сходимости н.и., зависящих от параметра.

Теорема 3.3.5. (Мажорантный признак Вейерштрасса). Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет на множестве $[a, b) \times Y$ неравенству $|f(x, y)| \leq g(x)$. Если н.и. $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится абсолютно и равномерно на Y .

Доказательство. Для н.и. $\int_a^b g(x)dx$ применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\xi_0 < b$, что для всех ξ', ξ'' таких, что $\xi_0 < \xi' < \xi'' < b$, выполнено $\int_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях для всех ξ', ξ'' таких, что $\xi_0 < \xi' < \xi'' < b$, неравенство

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)dx \right| \leq \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x, y)| dx \leq \int_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx < \varepsilon$$

выполнено для всех $y \in Y$, поэтому по критерию Коши н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно (и абсолютно) на Y . □

Теорема 3.3.6. (Признаки Дирихле и Абеля). Пусть при всех $y \in Y$ функция $f(x, y)$ интегрируема на любом подотрезке промежутка $[a, b]$, а функция $g(x, y)$ монотонна по x на $[a, b]$. Тогда н.и.

$$\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$$

сходится равномерно на Y , если:

- (1) (Дирихле) интеграл $\int_a^\xi f(x, y)dx$ равномерно ограничен константой A при всех $\xi \in [a, b]$ и $y \in Y$, а семейство функций $g(x, y)$ сходится к 0 на множестве Y равномерно при $x \rightarrow b$;
- (2) (Абель) н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y , а функция $g(x, y)$ равномерно ограничена константой B при всех $x \in [a, b]$ и $y \in Y$.

Доказательство. Проверим истинность критерия Коши. Для этого оценим интеграл

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)g(x, y)dx$$

при $a \leq \xi' < \xi'' < b$. По второй теореме о среднем для всякого $y \in Y$ на интервале (ξ', ξ'') найдется такая точка $\eta(y)$, что выполнено равенство

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)g(x, y)dx = g(\xi', y) \int_{\xi'}^{\eta(y)} f(x, y)dx + g(\xi'', y) \int_{\eta(y)}^{\xi''} f(x, y)dx.$$

Отсюда:

- (1) $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq 2A(|g(\xi', y)| + |g(\xi'', y)|) \xrightarrow{\xi' \rightarrow b} 0$ в силу равномерной сходимости семейства $g(x, y)$;
- (2) $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq B \left(\left| \int_{\xi'}^{\eta(y)} f(x, y)dx \right| + \left| \int_{\eta(y)}^{\xi''} f(x, y)dx \right| \right) \xrightarrow{\xi' \rightarrow b} 0$ в силу критерия Коши для равномерно сходящегося н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$.

В любом случае по критерию Коши имеем равномерную на Y сходимость н.и. $\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$. □

Теорема 3.3.7. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $[a, b) \times [c, d]$. Если н.и. $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, то он представляет собой непрерывную на $[c, d]$ функцию.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $I(\xi, y) = \int_a^\xi f(x, y)dx$. По условию $I(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow b} I(y)$ на отрезке $[c, d]$.

По (3.2.3) при всех $\xi \in [a, b)$ функция $I(\xi, y)$ непрерывна по y на $[c, d]$, следовательно, по (3.1.6) и предельная функция $I(y)$ также непрерывна на $[c, d]$. □

Теорема 3.3.8. Пусть в области $[a, b) \times [c, d]$ своей непрерывности функция $f(x, y)$ принимает неотрицательные значения, а н.и. $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится и непрерывен на $[c, d]$. Тогда его сходимость на $c, d]$ равномерная.

Доказательство. Достаточно применить к упомянутому семейству функций $I(\xi, y)$ обобщенную теорему Дини (3.1.7). □

3.4. Теоремы о дифференцировании и интегрировании по параметру

Теорема 3.4.1. (Формула Лейбница). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x, y)$ в области $[a, b) \times [c, d]$. Если на $[c, d]$ н.и. $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ сходится, а н.и. $J(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$ сходится равномерно, то $I(y)$ имеет производную по параметру y , причем $I'(y) = J(y)$.

Доказательство. Зададимся последовательностью $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = b$, и обозначим $I_k(y) = \int_a^{\xi_k} f(x, y) dx$.

Так как $f(x, y)$ и $f'_x(x, y)$ непрерывны на $[a, \xi_k] \times [c, d]$, из (3.2.5) следует, что функции $I_k(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$ и

$$I'_k(y) = \int_a^{\xi_k} f'_y(x, y) dx.$$

Из сходимости на $[c, d]$ н.и. $I(y)$ следует сходимость к нему последовательности $\{I_k(y)\}_{k=1}^{+\infty}$ во всех точках $[c, d]$. Наконец, вновь по (3.2.5)

$$I'_k(y) = \int_a^{\xi_k} f'_y(x, y) dx,$$

и по условию имеем равномерную сходимость последовательности $\{I'_k(y)\}_{k=1}^{+\infty}$ к $J(y)$. Стало быть, по (2.4.1) н.и. $I(y)$ имеет производную по y , равную

$$I'(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_a^{\xi_k} f(x, y) dx \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{\xi_k} f'_y(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

□

Теорема 3.4.2. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $[a, b] \times [c, d]$. Если н.и. $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, то он представляет собой интегрируемую на $[c, d]$ функцию и справедливо равенство:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Доказательство. Существование интеграла в левой части равенства напрямую следует из (3.3.7), существование внутреннего интеграла в правой части очевидно, поэтому необходимо обосновать существование внешнего интеграла в правой части и само равенство.

Введём функцию $\varphi(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$, причем $\varphi(a, y) = 0$.

Заметим, что сама функция $\varphi(t, y)$ и ее производная $\varphi'_t(t, y) = f(t, y)$ непрерывны на $[a, t] \times [c, d]$ при всех $t < b$, поэтому по (3.2.4)

$$\left(\int_c^d \varphi(t, y) dy \right)' = \int_c^d \varphi'_t(t, y) dy = \int_c^d f(t, y) dy,$$

откуда

$$\int_a^b dt \int_c^d f(t, y) dy = \int_a^b dt \left(\int_c^d \varphi(t, y) dy \right)' = \int_c^d \varphi(b, y) dy - \int_c^d \varphi(a, y) dy = \int_c^d \varphi(b, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

□

Лемма 3.4.3. Пусть семейство функций $f(x, y)$ определено на множестве $[a, b] \times Y$, и на каждом подотрезке $[a, b]$ равномерно стремится к предельной функции $g(x)$ при $y \rightarrow y_0$.

Если н.и. $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно на Y , то н.и. $\int_a^b g(x) dx$ сходится на Y , и справедлива формула:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Вновь рассмотрим семейство функций $\varphi(\xi, y) = \int_a^{\xi} f(x, y) dx$. К нему применима теорема (3.2.1), согласно которой

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(\xi, y) = \int_a^{\xi} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{\xi} g(y) dy.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\xi \rightarrow b} \varphi(\xi, y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

причем стремление равномерное на Y . По (3.1.6)

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{\xi \rightarrow b} \varphi(\xi, y) \right) = \lim_{\xi \rightarrow b} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(\xi, y) \right) = \lim_{\xi \rightarrow b} \int_a^\xi g(y) dy = \int_a^b g(y) dy.$$

□

Теорема 3.4.4. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $[a, b] \times [c, d]$, а н.и. $\int_a^b f(x, y) dx$ и $\int_c^d f(x, y) dy$ сходятся равномерно (один по y , другой по x) в любом конечном промежутке. Если сходится один из повторных интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx \text{ или } \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy,$$

то другой интеграл также сходится и справедливо равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Доказательство. Без ограничения общности н.и. $\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$ сходится. По условию для любого $\eta < d$ н.и. $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно на $[c, \eta]$, поэтому по (3.4.2)

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y) dy.$$

Введем функцию $h(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y) dy$. По (3.2.2) $h(x, \eta)$ непрерывна (а, следовательно, и интегрируема) на любом отрезке $[c, \eta] \subset [c, d]$.

С другой стороны,

$$|h(x, \eta)| \leq \int_c^\eta |f(x, y)| dy \leq \int_c^d |f(x, y)| dy,$$

и из сходимости н.и. $\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$ по признаку Вейерштрасса следует равномерная на $[a, b]$ сходимость н.и. $\int_c^b h(x, \eta) dx$.

Наконец, по условию $h(x, \eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow d} \int_c^d f(x, y) dy$ на $[a, \xi] \subset [a, b]$.

Следовательно, по (3.4.3)

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy &= \int_a^b \lim_{\eta \rightarrow d} h(x, \eta) dx = \lim_{\eta \rightarrow d} \int_a^b h(x, \eta) dx = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow d} \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y) dy = \lim_{\eta \rightarrow d} \int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \end{aligned}$$

□

Теорема 3.4.5. Если функция $f(x, y)$ в своей области непрерывности $[a, b] \times [c, d]$ принимает неотрицательные значения, а оба н.и. $\int_a^b f(x, y) dx$ и $\int_c^d f(x, y) dy$ существуют и непрерывны. Тогда если существует один из повторных интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \text{ или } \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

то существует и другой, причем равный первому.

Доказательство. В самом деле, равносильность требований настоящей теоремы и (3.4.4) напрямую следует из (3.3.8). □

3.5. Вычисление некоторых именных интегралов

Пример 3.5.1. *Интеграл Дирихле:*

$$D(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx.$$

В силу нечетности по m достаточно рассмотреть случай $m > 0$, а затем продлить ответ по нечетности. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0)$$

и проверим для него условия правила Лейбница (3.4.1).

- (1) $f(x, m) = \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin mx$ и $f'_m(x, m) = e^{-\alpha x} \cos mx$ непрерывны при $x \geq 0$ и любом m ;
 (2) $I(m)$ сходится при всех m , поскольку

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin mx dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-\alpha x}| |m| \left| \frac{\sin mx}{mx} \right| dx \leq |m| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \left| \frac{m}{\alpha} \right|;$$

- (3) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx dx$ сходится равномерно по m по признаку Вейерштрасса, поскольку

$$|e^{-\alpha x} \cos mx| \leq e^{-\alpha x},$$

а н.и. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ сходится.

Значит, по (3.4.1)

$$I'(m) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} \text{ (проинтегрировали по частям)} \implies I(m) = \arctan \frac{m}{\alpha} + C.$$

Подставляя $m = 0$, находим $C = 0$ и, окончательно, $I(m) = \arctan \frac{m}{\alpha}$.

Теперь зафиксируем m и рассмотрим $I = I(\alpha)$. По признаку Абеля $I(\alpha)$ сходится равномерно при $\alpha \geq 0$, поэтому по (3.3.7) $I(\alpha)$ непрерывен в 0, поэтому можно доопределить $I(\alpha)$ в точке 0 по непрерывности:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \arctan \frac{m}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Итого,

$$D(m) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(m).$$

Пример 3.5.2. *Интеграл Эйлера-Пуассона:*

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Положив $x = ut$, где $u > 0$, получим:

$$K = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

Умножим обе части на e^{-u^2} и проинтегрируем по u :

$$K \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = K^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \implies K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Обоснуем законность перестановки интегралов сначала при $u \geq u_0 > 0$, $t \geq 0$. В самом деле, $f(u, t) = ue^{-(1+t^2)u^2}$ непрерывна при $u \geq u_0 > 0, t \geq 0$, а интегралы

$$\int_{u_0}^{+\infty} ue^{-(1+t^2)u^2} du = \frac{1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)u_0^2} \text{ и } \int_0^{+\infty} ue^{-(1+t^2)u^2} du = K \cdot e^{-u^2}$$

непрерывны по t и u в указанных промежутках. Таким образом, по (3.4.5) доказано, что

$$\int_{u_0}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} dt = \int_0^{+\infty} dt \int_{u_0}^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} du.$$

Осталось перейти в равенстве к пределу при $u_0 \rightarrow 0$, что справа можно сделать под знаком интеграла по (3.4.3).

Пример 3.5.3. *Интегралы Френеля:*

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

Вычислим первый интеграл; второй вычисляется аналогично.

Положив $x^2 = t$, получим

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt \quad (\alpha > 0).$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du$ (из интеграла Эйлера-Пуассона). Подставив в $J(\alpha)$, получим:

$$J(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2}.$$

Законность перестановки порядка интегрирования для $f(u, t) = e^{-(\alpha+u^2)t} \sin t$ проверяется аналогично предыдущему. Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ по непрерывности (справа можно переходить под знаком интеграла), получаем:

$$2J_1 = J(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} J(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{du}{1 + (\alpha + u^2)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

и окончательно

$$J_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Такой же результат будет и для J_2 .

Теорема 3.5.4. (Формулы Фруллани) Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$. Тогда:

(1) если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$, то справедлива формула

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{\beta}{\alpha};$$

(2) если для всякого $A > 0$ сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, то справедлива формула

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln \frac{\beta}{\alpha};$$

(3) если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ и для всякого $A > 0$ сходится интеграл $\int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$, то справедлива формула

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

Доказательство. Проведем доказательство первой формулы; остальные выводятся аналогично.

Пусть $0 < a < b < +\infty$. Тогда существует интеграл

$$\int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx - \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(u)}{u} du - \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du = \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(u)}{u} du - \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du,$$

а тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(u)}{u} du - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du.$$

По первой теореме о среднем существуют точки $\xi \in [a\alpha, a\beta]$ и $\eta \in [b\alpha, b\beta]$ такие, что

$$\int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(u)}{u} du = f(\xi) \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{du}{u} = f(\xi) \ln \frac{\beta}{\alpha} \text{ и } \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du = f(\eta) \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{du}{u} = f(\eta) \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

Но так как $\xi \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$, а $\eta \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow +\infty$, имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

□

3.6. Эйлеровы интегралы

Эйлеров интеграл 2-го рода (гамма-функция)

Определение 3.6.1. Гамма-функция $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$.

Замечание. На отрезке $[A, B] \subset (0, +\infty)$ при $0 < t < 1$ имеем

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{A-1} e^{-t},$$

а при $t > 1$ — соответственно

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{B-1} e^{-t},$$

и по признаку Вейерштрасса $\Gamma(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[A, B] \subset (0, +\infty)$ (и, следовательно, непрерывна на всем луче). Аналогично проверяется равномерная сходимость

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$$

на любом подотрезке $[A, B] \subset (0, +\infty)$, что обосновывает законность дифференцирования по параметру x . Вообще, по индукции таким образом доказывается, что $\Gamma(x)$ бесконечно дифференцируема на $(0, +\infty)$.

Теорема 3.6.2. (Формула приведения для Γ -функции).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Доказательство.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{t^x e^{-t}}{x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x} (-e^{-t}) dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \cdot \Gamma(x+1) \implies \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

□

Замечание. Поскольку

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1,$$

для натуральных n имеем $\Gamma(n+1) = n!$. Поэтому можно рассматривать Γ -функцию как непрерывный аналог функции $n!$.

В силу непрерывности Γ -функции $\Gamma(x+1) \approx 1$ при $x \rightarrow 0$.

Теорема 3.6.3. (Формула Стирлинга). При $n \rightarrow \infty$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство.

(1) Заменой переменной $t = x(1+s)$ перепишем $\Gamma(x+1)$ в виде

$$\Gamma(x+1) = \int_{-1}^{+\infty} x^x (1+s)^x e^{-x(1+s)} x ds = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} (1+s)^x e^{-xs} ds = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))} ds.$$

Рассмотрим функцию $f(s) = s - \ln(1+s)$ на луче $s > -1$. Ее производная:

$$f'(s) = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s},$$

поэтому $f(s)$ убывает на $(-1, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$. Кроме того, $f(0) = 0$ и при стремлении аргумента как к -1 , так и к $+\infty$ значение функции $f(s)$ стремится к $+\infty$. Поэтому имеет место биекция между $s \in (-1, +\infty)$ и $u \in (-\infty, +\infty)$, задаваемая формулой

$$\frac{u^2}{2} = s - \ln(1+s)$$

(при условии, что знаки u и s совпадают). Продифференцировав равенство по u , получим:

$$u = \left(1 - \frac{1}{1+s}\right) \frac{ds}{du}(u) \frac{ds}{du}(u) = \frac{u}{s} + u, \quad s \neq 0.$$

(2) Из разложения Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $\ln(1+s)$ имеем:

$$\ln(1+s) = s - \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{(1+\theta s)^2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u^2}{2} = s - \ln(1+s) = \frac{s^2}{2(1+\theta s)^2}.$$

Но знаки u и s совпадают; следовательно, совпадают знаки u и $1+\theta s > 0$, поэтому можно извлечь корень:

$$u = \frac{s}{1+\theta s} \implies \frac{u}{s} = 1 - \theta u \implies \frac{ds}{du}(u) = \frac{u}{s} + u = 1 + (1-\theta)u, \quad s \neq 0.$$

Условие $s \neq 0$ равносильно условию $u \neq 0$. Однако в силу существования предела $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{ds}{du}(u) = 1$, можно доопределить по непрерывности $\frac{ds}{du}(0) = 1$, откуда для всех u имеет место оценка

$$\left| \frac{ds}{du}(u) - 1 \right| \leq |u|.$$

(3) Перейдем в выражении для $\Gamma(x+1)$ от переменной s к переменной u :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} \left(\frac{ds}{du} - 1 + 1 \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} du + A(x),$$

где

$$|A(x)| < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} \left| \frac{ds}{du} - 1 \right| du < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} |u| du.$$

Первый интеграл сводится к известному нам интегралу Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{x}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

Второй же интеграл вычисляется как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} |u| du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x \frac{u^2}{2}} u du = \int_0^{+\infty} e^{-x \frac{v}{2}} dv = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} e^{-w} dw = \frac{2}{x}.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} + R, \text{ где } |R| < \frac{2}{x},$$

и, окончательно,

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{x}} + R \right) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x (1 + R'), \text{ где } |R'| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

В частности, при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x$, а при $x = n \in \mathbb{N}$ – искомую формулу. $\square$

Эйлеров интеграл 1-го рода (бета-функция)

Определение 3.6.4. Бета-функция $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$, $p, q > 0$.

Замечание.

- (1) При $p, q \geq 1$ интеграл является собственным.
- (2) Заменой переменных $t = 1 - s$ имеем $B(p, q) = B(q, p)$.
- (3) Заменой переменных $t = \frac{s}{1+s}$ имеем

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}} ds.$$

- (4) При всех t для $p \geq p_0 > 0$, $q \geq q_0 > 0$ выполняется $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leq t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}$, поэтому интеграл сходится равномерно на указанном множестве по признаку Вейерштрасса.

Теорема 3.6.5. (Формула приведения для B-функции).

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1} dt = \left. \frac{-t^p(1-t)^q}{q} \right|_0^1 + \frac{p}{q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt = \frac{p}{q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}(1-t) dt = \\ &= \frac{p}{q} \left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt - \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1} dt \right) = \frac{p}{q} B(p, q) - \frac{p}{q} B(p+1, q), \end{aligned}$$

откуда

$$\left(1 + \frac{p}{q} \right) B(p+1, q) = \frac{p}{q} B(p, q) \implies B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q).$$

$\square$

Теорема 3.6.6. (Связь бета- и гамма-функции).

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Доказательство.

Заменой переменной $t = (k+1)y$, $k > -1$ получим:

$$\frac{\Gamma(p)}{(1+k)^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-(1+k)y} dy.$$

Переобозначив p как $p+q$, имеем:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+k)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+k)y} dy.$$

Умножим обе части на k^{p-1} и проинтегрируем по k на луче $[(0, +\infty)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(p+q) \cdot B(p, q) &= \Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{k^{p-1}}{(1+k)^{p+q}} dk = \int_0^{+\infty} k^{p-1} dk \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+k)y} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} k^{p-1} e^{-ky} dk = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(p)}{y^p} dy = \Gamma(p) \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q).\end{aligned}$$

Осталось обосновать законность перестановки интегралов при $k \geq 0$ и $y \geq 0$. Сначала ограничимся случаем $p, q > 1$. Функция $f(k, y) = y^{p+q-1} \cdot e^{-(1+k)y} \cdot k^{p-1}$ непрерывна при $k \geq 0$ и $y \geq 0$, а интегралы

$$\int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+k)y} k^{p-1} dy = \Gamma(p+q) \frac{k^{p-1}}{(1+k)^{p+q}} \text{ и } \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+k)y} k^{p-1} dk = \Gamma(p) y^{q-1} e^{-y}$$

непрерывны по k и y в указанных промежутках. Следовательно, по (3.4.5) перестановка интегралов законна. В общем случае заведомо $p+1 > 1$ и $q+1 > 1$, поэтому по доказанному

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)},$$

откуда можно получить искомую формулу при помощи формул приведения (3.6.2) и (3.6.5). □

Теорема 3.6.7. (Формула дополнения для Г-функции). При $0 < a < 1$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3.6.6):

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a)\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = I_1 + I_2.$$

В силу непрерывности

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt.$$

Воспользуемся разложением $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k$ (ряд сходится равномерно на $[0, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$) и почленным интегрированием:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_0^{1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{k+a-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} (-1)^k t^{k+a-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+a}}{k+a} \Big|_0^{1-\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a}.$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+a}$ сходится по признаку Лейбница, поэтому по (2.5.7) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a}$ сходится равномерно на $[0, 1-\varepsilon]$. Стало быть, по (2.3.1)

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+a}.$$

Второй интеграл сводится к первому заменой $t = \frac{1}{x}$:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-a} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}.$$

Итого:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} - \frac{1}{a-k} \right).$$

Из теории рядов Фурье (см. (4.3.9)) отсюда напрямую будет следовать утверждение теоремы. □

4. Элементы гармонического анализа

4.1. Финитные функции. Лемма Римана

Под $L_R(A)$ подразумевается класс абсолютно интегрируемых в несобственном смысле функций на множестве A .

Определение 4.1.1. Носитель функции $f(x)$ — это замыкание множества, на котором $f(x) \neq 0$.

Определение 4.1.2. Функция $f(x)$ называется *финитной*, если ее носитель является компактом.

Лемма 4.1.3. Для всякой функции $f(x)$ класса $L_R[a, b]$ существует последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ финитных ступенчатых функций такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = 0.$$

Доказательство. Устроим разбиение T отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ мелкостью $\delta = \frac{1}{n}$. Определим

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

и зададим функцию

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} m_i, & x \in (x_{i-1}, x_i), \quad 0 \leq i \leq n \\ 0, & x \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \end{cases}.$$

Выберем $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Тогда очевидно, что при $\delta \rightarrow 0$ (или, что то же самое, при $n \rightarrow \infty$) $|f(\xi_i) - m_i| \rightarrow 0$. Но в таком случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(\xi_i) - \varphi_n(\xi_i)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(\xi_i) - m_i}{n} = 0.$$

□

Лемма 4.1.4. (Римана). Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0.$$

Доказательство. Проведем доказательство первого утверждения; второе доказывается аналогично. На подотрезке $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ введем характеристическую функцию

$$\chi_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}.$$

Для нее:

$$\int_a^b \chi(x) \cos \nu x dx = \int_{\alpha}^{\beta} \cos \nu x dx = \frac{\sin \nu \beta - \sin \nu \alpha}{\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку $\frac{1}{\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$, а $|\sin \nu \beta - \sin \nu \alpha| \leq 2$.

Следовательно, теорема верна для всякой характеристической, а, стало быть, и всякой финитной ступенчатой функции. Для произвольной функции $f(x)$ и для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ по (4.1.3) выберем такую финитную ступенчатую функцию $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\varphi(x)$ существует такое ν_0 , что для всех $\nu > \nu_0$ выполнено

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \cos \nu x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \nu x dx \right| \leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos \nu x dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \cos \nu x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

и по определению предела $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = 0$. □

4.2. Преобразование Фурье

Определение 4.2.1. Оператор $\mathcal{F}$, ставящий в соответствие функции $f(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$ функцию

$$[\mathcal{F}f](y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx,$$

называется *преобразованием Фурье*.

Теорема 4.2.2. Пусть функция $f(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$. Тогда:

(1) для всех y справедлива оценка

$$|\hat{f}(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx;$$

(2) функция $\hat{f}(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$;

(3) $\lim_{y \rightarrow \infty} \hat{f}(y) = 0$.

Доказательство.

(1)

$$|\hat{f}(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ixy} f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

(2) Имеем: $|e^{-ixy} f(x)| = |f(x)|$, а интеграл по $\mathbb{R}$ от $|f(x)|$ сходится по условию. Значит, по признаку Вейерштрасса $\hat{f}(y)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, и по (3.3.7) представляет собой непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию.

(3) Представим $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – также класса $L_R(\mathbb{R})$ функции, тогда имеем:

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos yx - i \sin yx)(u(x) + iv(x)) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x) \cos yx + v(x) \sin yx) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x) \sin yx - v(x) \cos yx) dx, \end{aligned}$$

и по лемме Римана $\hat{f}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$. □

Следствие 4.2.3. Если для функций $f(x)$ и $f_n(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

то последовательность $\{\hat{f}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $\hat{f}(y)$.

Доказательство. Имеем:

$$|[\mathcal{F}f_n](y) - [\mathcal{F}f](y)| = |[\mathcal{F}(f_n - f)](y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

причем стремление равномерное, поскольку правая часть неравенства не зависит от параметра y . Значит, и левая часть стремится к 0 равномерно по y при $n \rightarrow \infty$, откуда непосредственно следует утверждение следствия. □

Определение 4.2.4. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$. Их *свертка* – это функция

$$(\varphi * \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi(x - t) dt.$$

Теорема 4.2.5. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$, непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Тогда свертка $(\varphi * \psi)(x)$ также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, причем

$$[\mathcal{F}(\varphi * \psi)](y) = [\mathcal{F}\varphi](y) \cdot [\mathcal{F}\psi](y).$$

Доказательство. Пусть функция $\psi(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ константой M . Тогда

$$|\varphi(t)\psi(x-t)| \leq M|\varphi(t)|,$$

и в силу абсолютной интегрируемости на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(t)$ по признаку Вейерштрасса свертка $(\varphi * \psi)(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, откуда по (3.3.7) следует ее непрерывность.

Ограниченность свертки также следует из абсолютной интегрируемости на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(t)$:

$$|(\varphi * \psi)(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt \leq \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\varphi * \psi)(x)|dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|ds. \end{aligned}$$

Перестановка интегралов законна, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt$$

по доказанному сходится равномерно на $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|dx$ сходится равномерно на любом конечном отрезке по признаку Вейерштрасса, а повторный интеграл существует из последнего равенства цепочки. Наконец, проверим свойство преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(\varphi * \psi)](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}(\varphi * \psi)(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t)e^{-ixy}dx \stackrel{x=t+s}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-ity}dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)e^{-isy}ds = [\mathcal{F}\varphi](y) \cdot [\mathcal{F}\psi](y). \end{aligned}$$

Законность перестановки интегралов проверяется аналогично. □

Теорема 4.2.6. Пусть функция $f(x)$ вместе со своей производной класса $L_R(\mathbb{R})$. Тогда

$$[\mathcal{F}f'](y) = (iy)[\mathcal{F}f](y).$$

Доказательство. Из абсолютной интегрируемости на $\mathbb{R}$ функций $f(x)$ и $f'(x)$ следует существование конечного предела

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(x)dx = \int_0^{+\infty} f'(x)dx.$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(x)dx = A.$$

Покажем, что $A = 0$. Если, например, $A > 0$, то существует такое число a , что для всех $x > a$ выполнено $f(x) > \frac{A}{2}$, откуда по признаку сравнения несобственных интегралов (аналогичному (1.2.3)) имеем расходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

что противоречит условию. Значит, $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Аналогично $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Тогда имеем:

$$[\mathcal{F}f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx = (iy)[\mathcal{F}f](y).$$

□

Следствие 4.2.7. Пусть функция $f(x)$ вместе со своими производными вплоть до $f^{(n)}$ класса $L_R(\mathbb{R})$. Тогда для всех $k \leq n$

$$[\mathcal{F}f^{(k)}](y) = (iy)^k [\mathcal{F}f](y).$$

Доказательство. Индуктивно следует из (4.2.6)

□

Следствие 4.2.8. Пусть функция $f(x)$ вместе со своими производными вплоть до $f^{(n)}$ класса $L_R(\mathbb{R})$ и непрерывны. Тогда имеет место оценка

$$|[\mathcal{F}f](y)| \leq \frac{M}{|y|^n},$$

где $M = \sup_{\mathbb{R}} |[\mathcal{F}f^{(n)}](y)| < +\infty$.

Доказательство. $[\mathcal{F}f^{(n)}](y)$ ограничена на $\mathbb{R}$ по (4.2.2), поэтому $M = \sup_{\mathbb{R}} |[\mathcal{F}f^{(n)}](y)| < +\infty$. Отсюда по (4.2.6) имеем:

$$[\mathcal{F}f^{(n)}](y) = (iy)^n [\mathcal{F}f](y) \implies |[\mathcal{F}f](y)| = \frac{|[\mathcal{F}f^{(n)}](y)|}{|y|^n} \leq \frac{M}{|y|^n}.$$

□

4.3. Ряды Фурье. Условия сходимости в точке

Определение 4.3.1. Пусть функция $f(x)$ 2π -периодическая и класса $L_R[-\pi, \pi]$. Ее *тригонометрический ряд Фурье* – это функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где коэффициенты $a_k, k \geq 0$, и $b_k, k \geq 1$, определяются как

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt.$$

Определение 4.3.2. Ядром Дирихле порядка n называется тригонометрический многочлен

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt.$$

Лемма 4.3.3.

(1) Для частных сумм $S_n(f, x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ справедливо выражение

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds.$$

(2) Если t не кратно 2π , то

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Доказательство.

(1) Подставим выражения для a_k и b_k в частичную сумму ряда Фурье:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t-x) dt \stackrel{s=t-x}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds. \end{aligned}$$

(2) В самом деле,

$$D_n(t) \cdot 2 \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \cos kt \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t \right] = \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right],$$

и если t не кратно 2π , то можно поделить на $2 \sin \frac{t}{2} \neq 0$. $\square$

Замечание. Ядро Дирихле – четная функция. Поэтому формулу для частичных сумм ряда Фурье можно видоизменить:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+s) D_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+s) + f(x-s)] D_n(s) ds.$$

А так как $\int_0^{\pi} D_n(s) ds = \frac{\pi}{2}$, то для произвольного числа A имеет место равенство

$$S_n(f, x) - A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+s) + f(x-s) - 2A] D_n(s) ds.$$

Теорема 4.3.4. (Принцип локализации Римана). *Сходимость или расходимость ряда Фурье в точке, а также значение суммы ряда при условии сходимости определяются значениями функции из сколь угодно малой окрестности этой точки.*

Доказательство. Зафиксируем число δ такое что $0 < \delta < \pi$. Представим частную сумму $S_n(f, x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 согласно (4.3.3) как

$$S_n(f, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+s) D_n(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+s) D_n(s) ds + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+s) D_n(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+s) D_n(s) ds \right].$$

Введем функцию

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(x_0+s)}{2 \sin \frac{s}{2}}, & s \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \\ 0, & s \in (-\delta, \delta) \end{cases},$$

тогда два интеграла в квадратных скобках можно выразить как

$$\rho_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right] g(s) ds,$$

и по лемме Римана (4.1.4) $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Таким образом, при больших n

$$S_n(f, x_0) \sim \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+s) D_n(s) ds,$$

и факты сходимости или расходимости в точке x_0 , а также значение суммы в этой точке при условии сходимости определяются только значениями функции на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. В силу произвольного выбора δ теорема доказана. $\square$

Следствие 4.3.5. *Если значения функций $f(x)$ и $g(x)$ класса $L_R[-\pi, \pi]$ на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ совпадают, то в каждой точке интервала (α, β) ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, а если они сходятся, то к одной и той же сумме.*

Доказательство. Действительно, это всего лишь переформулировка основного принципа локализации. $\square$

Теорема 4.3.6. (Признак Дини). *Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[-\pi, \pi]$ и при некотором A в точке x_0 сходится интеграл*

$$\int_0^{\pi} |f(x_0+s) + f(x_0-s) - 2A| \frac{ds}{s}.$$

Тогда ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к A в точке x_0 .

Доказательство. Из условия принадлежности $f(x)$ классу $L_R[-\pi, \pi]$ ясно, что интеграл имеет единственную особенность при $s = 0$. Исследуем ее.

При $0 \leq s \leq \pi$ справедливо неравенство

$$\sin \frac{s}{2} \geq \frac{s}{\pi},$$

откуда немедленно следует

$$|f(x_0 + s) + f(x_0 - s) - 2A| \frac{1}{2 \sin \frac{s}{2}} \leq |f(x_0 + s) + f(x_0 - s) - 2A| \frac{\pi}{2s},$$

и из условия по признаку сравнения несобственных интегралов функция

$$g(s) = |f(x_0 + s) + f(x_0 - s) - 2A| \frac{1}{2 \sin \frac{s}{2}}$$

класса $L_R[0, \pi]$. Тогда имеем:

$$S_n(f, x_0) - A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + s) + f(x_0 - s) - 2A] \frac{1}{2 \sin \frac{s}{2}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(s) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right] ds,$$

откуда по лемме Римана (4.1.4) $S_n(f, x_0) - A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, и мы вписались в определение предела. $\square$

Следствие 4.3.7. Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[-\pi, \pi]$ непрерывна или терпит разрыв I рода в точке x_0 . Если при малых положительных значениях s существуют положительные константы M и α такие, что

$$\begin{cases} |f(x_0 + s) - f(x_0 + 0)| \leq Ms^\alpha \\ |f(x_0 - s) - f(x_0 - 0)| \leq Ms^\alpha \end{cases},$$

то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к $A = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ в точке x_0 .

Доказательство. Из условия

$$|f(x_0 + s) + f(x_0 - s) - 2A| \leq |f(x_0 + s) - f(x_0 + 0)| + |f(x_0 - s) - f(x_0 - 0)| \leq 2Ms^\alpha,$$

откуда, поскольку $\alpha > 0$, утверждение следует из (4.3.6). $\square$

Следствие 4.3.8. Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке x_0 интервала $(-\pi, \pi)$ к значению

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ к значению

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Доказательство. Действительно, для такой функции условие (4.3.7) очевидным образом выполнено. $\square$

Пример 4.3.9. Рассмотрим ряд Фурье для функции $f(x) = \cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, где a — нецелое число. Поскольку $f(x)$ четна, коэффициенты b_k ряда Фурье равны 0. В свою очередь,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos at \cos ktdt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(a - k)t + \cos(a + k)t] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(a - k)\pi}{a - k} + \frac{\sin(a + k)\pi}{a + k} \right) = (-1)^k \frac{\sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{a - k} + \frac{1}{a + k} \right). \end{aligned}$$

А по (4.3.8) в каждой точке отрезка ряд Фурье для $f(x)$ сходится к значению функции в этой точке, то есть

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{\sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a - k} + \frac{1}{a + k} \right).$$

Положим $x = 0$, тогда получим:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a - k} + \frac{1}{a + k} \right).$$

Это равенство использовалось при доказательстве (3.6.7).

4.4. Метод Фейера суммирования рядов Фурье

Определение 4.4.1. Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[\pi, \pi]$, а $S_n(f, x)$ – частичные суммы ее ряда Фурье. Тогда суммы

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x)$$

называются *суммами Фейера* функции $f(x)$.

Определение 4.4.2. Ядром Фейера порядка n называется функция

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t).$$

Лемма 4.4.3.

(1) Для сумм Фейера $\sigma_n(f, x)$ функции $f(x)$ справедливо выражение

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) F_n(s) ds.$$

(2) Если t не кратно 2π , то

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \left(\frac{\sin \left[(n+1) \frac{t}{2} \right]}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \geq 0.$$

Доказательство. Воспользуемся результатами (4.3.3).

(1) Подставим выражения для $S_k(f, x)$ в частичную сумму ряда Фурье:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_k(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) F_n(s) ds.$$

(2) В самом деле,

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} \sum_{k=0}^n D_k(t) = \sum_{k=0}^n \sin \frac{t}{2} \sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\cos kt - \cos (k+1)t) = \sin^2 \left[(n+1) \frac{t}{2} \right],$$

и если t не кратно 2π , то можно поделить на $2 \sin^2 \frac{t}{2} \neq 0$. □

Замечание. Заметим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \pi = 1,$$

поэтому для любой функции $f(x)$ класса $L_R[-\pi, \pi]$ справедливо

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+s) - f(x)] F_n(s) ds.$$

Лемма 4.4.4. Для любого $\delta \in (0, \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) = 0.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) = \max_{t \in [\delta, \pi]} \frac{1}{2(n+1)} \cdot \left(\frac{\sin \left[(n+1) \frac{t}{2} \right]}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Теорема 4.4.5. (Фейера). Последовательность сумм Фейера 2π -периодической непрерывной на всей оси функции $f(x)$ сходится равномерно по x к $f(x)$.

Доказательство. Из непрерывности $f(x)$ на $\mathbb{R}$ следует существование константы M такой, что для всех x выполнено

$$|f(x)| < M.$$

Оценим разность $\sigma_n(f, x) - f(x)$:

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] F_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt.$$

По теореме Кантора о равномерной непрерывности $f(x)$ равномерно непрерывна на компакте $[-\pi, \pi]$, а в силу периодичности — и на всей прямой $\mathbb{R}$. По определению это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого t такого, что $|t| < \delta$, неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнено для любого $x \in \mathbb{R}$. Выберем $\delta \leq \pi$, тогда в силу замечания

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

По (4.4.4) найдем такое N , что для всех $n > N$ выполнено

$$\max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{8M},$$

тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x)|) F_n(t) dt \leq \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt \leq \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} F_n(t) dt < \frac{2M}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon\pi}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда окончательно для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для всех $n > N$ неравенство

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, и мы вписались в определение равномерной сходимости. $\square$

4.5. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье

Теорема 4.5.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$.

Тогда если

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \text{ряд Фурье функции } f(x),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx) - \text{ряд Фурье производной } f'(x).$$

Доказательство. Пусть ряд Фурье функции $f'(x)$ имеет вид

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

тогда по определению

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0;$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos kt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = kb_k;$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt dt = \frac{1}{\pi} f(t) \sin kt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = -k\alpha_k.$$

□

Теорема 4.5.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \text{ее ряд Фурье}.$$

Тогда справедлива формула

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k} (1 - \cos kx) \right),$$

причем сходимость ряда равномерная по x .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0 x}{2}.$$

Она непрерывна на $[-\pi, \pi]$ вместе со своей производной

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

и, кроме того,

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \pi a_0 = 0.$$

Следовательно, ее ряд Фурье

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

сходится к ней равномерно по x на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. (4.6.2)). Найдем его коэффициенты.

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} F(t) \frac{\sin nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] \sin ntdt = -\frac{b_n}{n}.$$

Аналогично $B_n = \frac{a_n}{n}$. Чтобы найти A_0 , подставим в ряд Фурье $x = 0$ и заметим, что $F(0) = 0$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 0 \implies \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Окончательно,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0 x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k} (1 - \cos kx) \right).$$

□

4.6. Зависимость скорости сходимости ряда Фурье от гладкости функции

Лемма 4.6.1. Если $\alpha > 0$ и $n \geq 1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \Big|_n^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

□

Теорема 4.6.2. Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные вплоть до $f^{(m-1)}(x)$ и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}(x)$, причем при $0 \leq k \leq m-1$

$$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi).$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно по x к функции $f(x)$, причем остаток ряда $R_n(x)$ допускает оценку

$$R_n(x) = \bar{o} \left(\frac{1}{\sqrt{n^{2m-1}}} \right).$$

Доказательство. Пусть $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ – коэффициенты ряда Фурье функции $f^{(m)}(x)$. Тогда по (4.5.1)

$$\begin{cases} a_k^{(m)} = \pm k^m a_k \\ b_k^{(m)} = \pm k^m b_k \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} a_k^{(m)} = \pm k^m b_k \\ b_k^{(m)} = \pm k^m a_k \end{cases}.$$

По неравенству Коши-Буняковского для всех x имеем:

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(m)}| + |b_k^{(m)}|}{k^m} \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k^{(m)}| + |b_k^{(m)}|)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}}.$$

Используем очевидное неравенство $(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$ и лемму (4.6.1):

$$|R_n(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} 2 \left[\left(a_k^{(m)} \right)^2 + \left(b_k^{(m)} \right)^2 \right]} \cdot \sqrt{\frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}}} = \frac{\eta_n}{\sqrt{n^{2m-1}}},$$

где

$$\eta_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} 2 \left[\left(a_k^{(m)} \right)^2 + \left(b_k^{(m)} \right)^2 \right]}{2m-1}}.$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k^{(m)} \right)^2 + \left(b_k^{(m)} \right)^2 \right] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f^{(m)}(x) \right]^2 dx < \infty,$$

следовательно, остатки этого ряда стремятся к 0, откуда немедленно следует

$$\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies R_n(x) = \bar{o} \left(\frac{1}{\sqrt{n^{2m-1}}} \right).$$

По (4.3.8) ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ поточечно на $[-\pi, \pi]$, а полученная оценка на остаточный член, не зависящая от x , позволяет говорить и о равномерной сходимости по x .

□

5. Элементы функционального анализа

5.1. Линейные нормированные пространства: определение и примеры

Определение 5.1.1. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *нормированным*, если на нем задана функция $\|\cdot\| : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *нормой*, удовлетворяющая аксиомам:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|; \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \cdot \|x\|; \\ \|x\| &\geq 0, \text{ причем } \|x\| = 0 \iff x = \theta \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

для любых векторов x, y и скаляра α .

5.2. Пространства со скалярным произведением

Определение 5.2.1. Пусть $\mathcal{L}$ – векторное пространство.

Скалярное произведение – это функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая аксиомам:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle}; \\ \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle; \\ \langle x, x \rangle &\geq 0, \text{ причем } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta \in \mathcal{L}\end{aligned}$$

для любых x, y, z из $\mathcal{L}$ и λ, μ из $\mathbb{C}$.

Теорема 5.2.2. (Неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов x, y пространства со скалярным произведением верно

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Доказательство. Пусть $z = \lambda x + \mu y$. Тогда:

$$0 \leq \langle z, z \rangle = \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle + \lambda \bar{\mu} \langle x, y \rangle + \mu \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \mu \bar{\mu} \langle y, y \rangle.$$

Положим $\lambda = \langle y, y \rangle$, а $\mu = -\langle x, y \rangle$, тогда

$$\langle y, y \rangle \left[\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \right] = \langle y, y \rangle \left[\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \right] \geq 0.$$

Если $y = \theta$, то условие теоремы верно. Иначе из полученного неравенства следует, что

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} = |\langle x, y \rangle|^2.$$

□

Следствие 5.2.3. Всякое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным, причем норма может быть задана формулой

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Доказательство. Проверим аксиомы нормы.

- (1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ по третьей аксиоме;
- (2) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$;
- (3) По (5.2.2):

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Следовательно, перед нами действительно норма.

□

Определение 5.2.4. Полное линейное нормированное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым*.

Определение 5.2.5. Система векторов $\{e_i \mid i \in I\}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *ортонормированной*, если для любых индексов i, j справедливо $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Теорема 5.2.6. (Неравенство Бесселя). Для любого вектора x гильбертова пространства $\mathcal{H}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

где векторы e_k образуют ортонормированную систему.

Доказательство. Оценим расстояние между x и частичными суммами ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle = \\ &= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, x \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Эта оценка верна для любого n , а значит, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, заключаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. $\square$

Определение 5.2.7. Коэффициенты $c_k = \langle x, e_k \rangle$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x по ортонормированной системе $\{e_i \mid i \in I\}$.

Определение 5.2.8. Ортонормированная система $\{e_i \mid i \in I\}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *замкнутой*, если для любого $x \in \mathcal{H}$ верно равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

5.3. Сепарабельные пространства. Теорема Рисса-Фишера

Определение 5.3.1. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}$ называется *сепарабельным*, если в нем существует всюду плотное множество Y , то есть для любого $x \in \mathcal{L}$ по всякому ε можно найти элемент $y \in Y$ такой, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Определение 5.3.2. Система векторов $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ сепарабельного пространства $\mathcal{L}$ называется *полной*, если для всякого $x \in \mathcal{L}$ существует конечная линейная комбинация $\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$ такая, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Теорема 5.3.3. В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ортонормированная система замкнута тогда и только тогда, когда она полная.

Доказательство. Пусть система $\{e_i \mid i \in I\}$ замкнута, тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ сходится к x , то есть для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что выполнено неравенство

$$\left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\| < \varepsilon,$$

и по определению система $\{e_i \mid i \in I\}$ полна.

Обратно, пусть ортонормированная система $\{e_i \mid i \in I\}$ полна, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $S_N = \sum_{k=1}^N c_k e_k$ такая, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &> \|x - S_N\|^2 = \langle x - S_N, x - S_N \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, S_N \rangle - \langle S_N, x \rangle + \langle S_N, S_N \rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N \left(\overline{c_k} \langle x, e_k \rangle + c_k \overline{\langle x, e_k \rangle} \right) + \sum_{k=1}^N |c_k|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^N |c_k - \langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2, \end{aligned}$$

и по определению предела ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ сходится к x , то есть выполнено равенство Парсеваля и система $\{e_i \mid i \in I\}$ замкнута. $\square$

<To be continued>

6. Дополнительные главы

6.1. Аппроксимационные теоремы Вейерштрасса

Теорема 6.1.1. Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π -периодическая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим суммы Фейера $\sigma_n(f, x)$. Согласно определению они являются тригонометрическими полиномами, а по (4.4.5) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся сумма Фейера $\sigma_n(f, x)$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(f, x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, ее и можно взять в качестве $T_n(x)$. $\square$

Теорема 6.1.2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой алгебраический многочлен $P_n(x)$, что

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сначала предположим, что $[a, b] = [0, \pi]$. Четным образом продлим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$, а затем на всю вещественную ось с периодом 2π . Получим четную непрерывную 2π -периодическую функцию, совпадающую с $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По (5.1.1) найдётся тригонометрический многочлен $T_m(x)$ такой, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждая из функций $\sin kx$ и $\cos kx$ является аналитической и потому раскладывается в степенной ряд. Значит, и $T_m(x)$ раскладывается в степенной ряд

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

сходящийся при всех x . Но по (2.5.2) на любом конечном отрезке этот ряд сходится равномерно. Следовательно, существует такое n , что

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |T_m(x) - (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $P_n = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$, тогда заключаем, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |f(x) - T_m(x)| + |T_m(x) - P_n(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_m(x)| + \sup_{x \in [0, \pi]} |T_m(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь отрезок $[a, b]$ произвольный. Вновь зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$F(t) = f\left(a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right),$$

определенную при $t \in [0, \pi]$. Для нее по доказанному существует многочлен $Q_n(t)$ такой, что

$$\sup_{t \in [0, \pi]} \left| f\left(a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right) - Q_n(t) \right| < \varepsilon.$$

Полагая $x = a + \frac{t}{\pi}(b-a)$, а $P_n(x) = Q_n\left(\pi \cdot \frac{x-a}{b-a}\right)$, получаем, что

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

□

6.2. Дельтаобразные семейства функций

Определение 6.2.1. Семейство $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ функций $\Delta_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, зависящих от параметра $\alpha \in A$, называется *дельтаобразным* при $\alpha \rightarrow \omega$, если:

- (а) все функции семейства неотрицательны на $\mathbb{R}$;
- (б) для любой функции Δ_α семейства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\alpha(x) dx = 1;$$

- (с) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \omega} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_\alpha(x) dx = 1.$$

Пример 6.2.2. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная интегрируемая на $\mathbb{R}$ финитная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

При $\alpha > 0$ построим функции

$$\Delta_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Тогда при $\alpha \rightarrow 0+$ семейство $\{\Delta_\alpha\}$ является дельтаобразным.

Пример 6.2.3. Рассмотрим последовательность функций

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n \div \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Для него свойства (а) и (б) очевидным образом верны, остается проверить свойство (с) при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_{\varepsilon}^1 (1-\varepsilon^2)^n dx = (1-\varepsilon^2)^n (1-\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

откуда следует свойство (с). Значит, построенное семейство $\{\Delta_n\}$ является дельтаобразным при $n \rightarrow \infty$.

Пример 6.2.4. Рассмотрим последовательность функций

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \cos^{2n} x \div \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Снова свойства (а) и (б) выполнены, и нужно проверить свойство (с) при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{n} > \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2n},$$

а, с другой стороны,

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \leq \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varepsilon dx < \frac{\pi}{2} (\cos \varepsilon)^{2n},$$

откуда имеем

$$0 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2n} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx < \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx < \frac{\pi}{2} (\cos \varepsilon)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

откуда

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что и доказывает свойство (с). Значит, построенное семейство $\{\Delta_n\}$ является дельтаобразным при $n \rightarrow \infty$

Теорема 6.2.5. Пусть $f(x)$ определена, равномерно непрерывна и ограничена константой M на всей числовой оси, а $\{\Delta_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – дельтаобразное семейство функций при $\alpha \rightarrow \omega$. Если свертка $(f * \Delta_{\alpha})(x)$ существует для каждого $\alpha \in A$, то при $\alpha \rightarrow \omega$ $(f * \Delta_{\alpha})(x)$ сходится равномерно по x к функции $f(x)$.

Доказательство. В силу равномерной непрерывности по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для любого t такого, что $|t| < \delta$, неравенство

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда в силу симметричности свертки для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\begin{aligned} |(f * \Delta_{\alpha})(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \Delta_{\alpha}(t) dt - f(x) \right| \stackrel{(b)}{=} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x)) \Delta_{\alpha}(t) dt - f(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| \Delta_{\alpha}(t) dt + \left[\int_{-\infty}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| \Delta_{\alpha}(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} |f(x-t) - f(x)| \Delta_{\alpha}(t) dt \right] < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_{\alpha}(t) dt + 2M \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_{\alpha}(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} \Delta_{\alpha}(t) dt \right] \stackrel{(b)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + 2M \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_{\alpha}(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} \Delta_{\alpha}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Но по (с) при $\alpha \rightarrow \omega$ выражение в квадратных скобках стремится к 0, поэтому, начиная с какого-то момента, его можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{4M}$. Тогда при всех $x \in \mathbb{R}$

$$|(f * \Delta_{\alpha})(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы вписались в определение равномерной сходимости. □

Замечание. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$. Положим $f(x) = 0$ вне отрезка $[0, 1]$ и обозначим $\rho_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$. Тогда для дельтаобразного семейства из (5.2.3) имеем:

$$(f * \Delta_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Delta_n(x-t) dt = \frac{1}{\rho} \int_0^1 f(t) (1 - (x-t)^2)^n dt = \int_0^1 f(t) \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k(t) x^k \right) dt = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_0^1 f(t) c_k(t) dt \right) x^k.$$

То есть $(f * \Delta_n)(x)$ – это алгебраический многочлен, и для отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$ мы получили другое доказательство теоремы (5.3.2). Остается заметить, что произвольный отрезок можно перевести в подотрезок отрезка $[0, 1]$ линейной заменой, при которой многочлен переходит в многочлен, а непрерывность и равномерность приближения сохраняются.

— Конец демо-версии —