Замена переменных в кратном интеграле.

Геометрический смысл модуля якобиана отображения.

Рассмотрим отображение F:

$$F = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

открытого множества $G \in \mathbb{R}^2_{u,v}$ на открытое множество $G^* \in \mathbb{R}^2_{x,y}$. Отображение F обладает следующими свойтвами:

1. F отображает G на G^* взаимно однозначно.
2. F непрерывно дифференцируемо на G.
3. Якобиан отображения F:
   $$J(u,v) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$
   на G.

Лемма 1. *Пусть E – отрезок с концами в точках (u_1,v_1), $(u_2,v_2) \in G$, $E \subset G$, причём*

$$\max_E \max(|x'_u|,|x'_v|,|y'_u|,|y'_v|) \leq \varkappa.$$

Тогда

$$\|F(u_2,v_2) - F(u_1,v_1)\| \leq 2\varkappa\|(u_2,v_2)-(u_1,v_1)\| = 2\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$(x_i,y_i) = F(u_i,v_i),\ i = 1,2.$$

Рассмотрим функцию $x(t) = x(u_1+t(u_2-u_1), v_1+t(v_2-v_1))$, $t \in [0,1]$, дифференцируемую на $[0,1]$, в силу свойства 2 отображения F. По теореме Лагранжа о конечных приращениях,

$$|x_2 - x_1| = \left|x(u_1+t(u_2-u_1), v_1+t(v_2-v_1))|_0^1\right| = |x'_u(\tilde{u},\tilde{v})(u_2-u_1) + x'_v(\tilde{u},\tilde{v})(v_2-v_1)| \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}.$$

Аналогично, рассматривается $y(t) = y(u_1+t(u_2-u_1), v_1+t(v_2-v_1))$ $t \in [0,1]$, и доказывется

$$|y_2 - y_1| \leq \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}.$$

□

Лемма 2. *Пусть E – ограниченное множество, $\overline{E} \subset G$ и пусть $Q = \{(u,v) : u_0 \leq u \leq u_0+h,\ v_0 \leq v \leq v_0+h\}$, где $h > 0$ такое, что $Q \subset G$, тогда:*

1. *$\partial F(E) = F(\partial E)$, $F(\overline{E})$ – замкнуто.*
2. *$F(Q)$ – замкнутое измеримое множество.*

3. Если $\mu(E) = 0$, то $\mu F(E) = 0$.

4. Если E – измеримо, то $F(E)$ – измеримо.

Доказательство. В силу теоремы о локальном взаимно однозначном соответствии точек $(u, v) \in G$ и $(x, y) = F(u, v)$, существуют их окрестности, взаимно однозначно соответствующие друг другу, причём окрестности эти можно выбирать сколь угодно малыми по диаметру. Следовательно, для E и $F(E)$ точки (u, v) и (x, y) будут либо внутренними, либо граничными, либо предельными одновременно. Отсюда непосредственно следуют утверждение 1 леммы и утверждение о замкнутости множества $F(Q)$.

Ограниченность множества $F(Q)$ следует из теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на компакте, применённой к функциям $x(u, v)$ и $y(u, v)$.

Заметим, что $\partial F(Q) = F(\partial Q)$ состоит из четырёх гладких кривых, поэтому $\mu(\partial F(Q)) = 0$. В силу критерия измеримости, из последнего следует измеримость множества $F(Q)$ и утверждение 2 доказано.

Установим справедливость 3. Докажем, что $\mu(F(E)) = 0$. Пусть $\rho > 0$ таково, что $\overline{U}_\rho(E) \subset G$, $U_\rho(E) = \{(u, v) : \mathrm{dist}((u, v), \overline{E}) < \rho\}$. В качестве ρ можно взять $\rho = 1$, если $G = \mathbb{R}^2$, иначе $\rho = 1/2\, \mathrm{dist}(\overline{E}, \mathbb{R}^2 \backslash G) > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \cup_{k=1}^m P_k$ – блочное множество, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся блоков, $E \subset B_\varepsilon$, $\mu(B_\varepsilon) < \varepsilon$. Блок P будем называть регулярным, если

$$(a, b) \times (c, d) \subset P \subset [a, b] \times [c, d]$$

$$1/2(b - a) \leq (d - c) \leq 2(b - a).$$

Можно считать, что в представлении $B_\varepsilon = \cup_{k=1}^m P_k$ все P_k регулярны и $\mathrm{diam}\ P_k \leq \rho$.

$$B_\varepsilon \subset \overline{U}_\rho(E) \subset G$$

Пусть $\varkappa = \max_{\overline{U}_\rho(E)} \max\{|x'_u|, |x'_v|, |y'_u|, |y'_v|\}$. В силу (1), образ каждого из блоков P_k с длиной меньшей стороны h_k содержится в некотором замкнутом квадрате R_k с длиной стороны $2\sqrt{5}\varkappa h_k$, так что

$$F(P_k) \subset R_k,\ \mu(R_k) \leq 20\varkappa^2 \mu(P_k).$$

Отсюда из полуаддитивности меры следует

$$\mu(F(E)) \leq \mu(\cup_{k=1}^m R_k) \leq \sum_{k=1}^m \mu(R_k) = 20\varkappa^2 \sum_{k=1}^m \mu(P_k) = 20\varkappa^2 \mu(B_\varepsilon) < 20\varkappa^2 \varepsilon$$

.

Свойство 4 следует из ограниченности множества $F(E) \subset F(\overline{E})$, вытекающей из теоремы Вейерштрасса, свойств 1 и 3 и критерия измеримости. □

Теорема 1 (геометрический смысл модуля якобиана отображения)**.** *Пусть $(u_0, v_0) \in G$, $h_0 > 0$, такие что*

$$G \supset Q_h = \{(u, v) : u_h \leq u \leq u_h + h,\ v_h \leq v \leq v_h + h\} \ni (u_0, v_0)$$

при всех $h \in (0, h_0]$, тогда

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{\mu(F(Q_h))}{\mu(Q_h)} = |J(u_0, v_0)|.$$

Частично геометрический смысл модуля якобиана отображения поясняет

Лемма 3. *В условиях теоремы 1 при $h \to 0 + 0$*

$$\mu(F(Q_h)) \leq |J(u_0, v_0)| \mu(Q_h) + \overline{o}(h^2)$$

Доказательство. Подчркнём необязательность условия, что точка (u_0, v_0) является центром квадрата Q_h. Отображение F дифференцируемо, следовательно,

$$F = \begin{cases} x = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0) + \varepsilon_1(u-u_0, v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}, \\ y = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0) + \varepsilon_2(u-u_0, v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}, \end{cases}$$

где $a_{11} = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)$, $a_{12} = \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)$, $a_{21} = \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)$, $a_{22} = \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$, $\varepsilon_i(u-u_0, v-v_0) \to 0$, при $(u, v) \to (u_0, v_0)$, $i = 1, 2$.

Сравним отображение F с линейным отображением

$$\hat{F} = \begin{cases} \hat{x} = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0), \\ \hat{y} = y_0 + y = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0). \end{cases}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что справедливо равенство

$$\frac{\mu(\hat{F}(Q_h))}{\mu(Q_h)} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| = |J(u_0, v_0)|.$$

Сравним параллелограмм $\hat{F}(Q_h)$ и искривлённый параллелограмм $F(Q_h)$. Положим

$$\varepsilon(h) = \sup_{|u-u_0|\le h,\ |v-v_0|\le h} \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|),$$

тогда $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$. Для $(u, v) \in Q_h$ в этом случае:

$$|x(u, v) - \hat{x}(u, v)| \le \varepsilon(h)\sqrt{2}h,$$

$$|y(u, v) - \hat{y}(u, v)| \le \varepsilon(h)\sqrt{2}h,$$

откуда вытекает, что

$$F(Q_h) \subset U_{3\varepsilon(h)h}(\hat{F}(Q_h)).$$

Следовательно,

$$\mu(F(Q_h)) \le \mu^*(U_{3\varepsilon(h)h}(\hat{F}(Q_h))) \le \mu(\hat{F}(Q_h)) + o(h^2) = |J(u_0, v_0)|h^2 + o(h^2),$$

что и утверждается в лемме. $\square$

Замена переменных в кратном интеграле.

Рассмотрим отображение F:

$$F = \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

области $G \in \mathbb{R}^2_{u,v}$ на область $G^* \in \mathbb{R}^2_{x,y}$ и функцию f, обладающие следующими свойтвами:

1. F отображает G на G^* взаимно однозначно.

2. F непрерывно дифференцируемо на G.

3. Якобиан отображения F:

   $$J(u, v) := \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \ne 0$$

   на G.

4. Функция f – непрерывна и ограничена на G^*.

5. Произведение $f(F)J(u,v)$ ограничено на G, где

$$f(F)(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)).$$

Теорема 2. *Пусть отображение $F : G \to G^*$, где G и G^* – измеримые области в $\mathbb{R}^2$, и функция $f : G^* \to \mathbb{R}$ обладают свойствами $1-5$, тогда*

$$\iint_{G^*} f(x,y)dxdy = \iint_G f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv \tag{2}$$

Доказательство. Обе части равенства (2) существуют ввиду непрерывности и ограниченности подынтегральных выражений на открытых измеримых множествах интегрирования.

Шаг 1.

До конца доказательства будем считать, что $f > 0$ на G^*. Это ограничение не снижает общности. В самом деле, если $M > \sup_{G^*}|f|$, то $f(x,y)$ можно представить в виде:

$$f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y),$$

где $f_1(x,y) = f(x,y) + M > 0$, а $f_2(x,y) = M > 0$. Если равенство (2) верно для f_1 и f_2, то очевидно, оно верно и для f.

Шаг 2.

Покажем, что

$$\iint_Q f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv \geq \iint_{F(Q)} f(x,y)dxdy, \tag{3}$$

где Q – квадрат $Q = \{(u,v) : u_1 \leq u \leq u_1 + h,\ v_1 \leq v \leq v_1 + h\}$. От противного. Предположим, что неравенство (3) нарушается, то есть при некотором $\varepsilon_0 > 0$:

$$(1+\varepsilon_0)\iint_Q f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv \leq \iint_{F(Q)} f(x,y)dxdy. \tag{4}$$

Разобьём Q на четыре замкнутых равных квадрата. Обозначим $Q^{(k)}$ $(k=1)$ тот из них, для которого

$$(1+\varepsilon_0)\iint_{Q^{(k)}} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv \leq \iint_{F(Q^{(k)})} f(x,y)dxdy. \tag{5}$$

Такой квадрат $Q^{(1)}$ существует. Предположив противное (5) при $k=1$, придём к противоречию с (4). Разбив квадрат $Q^{(1)}$ на четыре квадрата, обозначим через $Q^{(2)}$ квадрат, для которого выполнено (5), при $k=2$.

Продолжая процесс деления, получим систему вложенных квадратов $\left\{Q^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty}$, для которых выполнено неравенство (5). В силу теоремы о вложенных отрезках, каковыми являются проекции квадратов на координатные оси, существует точка $(u_0, v_0) \in Q^{(k)}$ для любого натурального $k \in \mathbb{N}$. Из 1, в силу теоремы о среднем для интеграла, имеем

$$(1+\varepsilon_0) f(x(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), y(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k))|J(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)|\mu(Q^{(k)}) \leq f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\mu(F(Q^{(k)})).$$

Оценивая, $\mu(F(Q_k))$ с помощью леммы 3, при $k \to +\infty$ имеем

$$(1+\varepsilon_0)[f(x_0,y_0) + o(1)][J(u_0,v_0) + o(1)] \leq [f(x_0,y_0) + o(1)][J(u_0,v_0) + o(1)],$$

что неверно при $f > 0$ и $J \neq 0$. Таким образом, неравенство (3) установленно.

Шаг 3.

Пусть A – блочное множество, составленное из попарно непересекающихся квадратных блоков, $\overline{A} \subset G$. В силу аддитивности интеграла по множествам, почленным сложением неравенств вида (3) получаем, что

$$\iint_G f(x(u,v),y(u,v)|J(u,v)|dudv \geq \iint_A f(x(u,v),y(u,v)|J(u,v)|dudv \geq \iint_{F(A)} f(x,y)dxdy \qquad (6)$$

Шаг 4.

Пусть A^* – блочное множество, причём $A^* \subset \overline{A^*} \subset G^*$. Покажем, что

$$\iint_G f(x(u,v),y(u,v)|J(u,v)|dudv \geq \iint_{A^*} f(x,y)dxdy. \qquad (7)$$

В силу (6), достаточно установить, что найдтся такое составленное из квадратных блоков множество $A \subset \overline{A} \subset G$, что

$$F(A) \supset \overline{A^*}, \text{ т. е. } F^{-1}(A^*) \subset A \subset G. \qquad (8)$$

Покажем это. Множество $F^{-1}(A^*)$ замкнуто, по лемме 2, следовательно,

$$\rho = \operatorname{dist}[F^{-1}(\overline{A^*}), \mathbb{R}^2_{u,v} \backslash G] > 0.$$

Построим множество A следующим образом. Разобьём плоскость $\mathbb{R}^2_{u,v}$ с помощью координатной сетки на квадраты с диагональю, не превышающей $\rho/2$, и в качестве A возьмём объединение всех таких квадратов, что их пересечение с множеством $F^{-1}(\overline{A^*})$ непусто. Соотношение (8) выполнено.

Шаг 5.

Установим неравенство

$$\iint_G f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv \geq \iint_{G^*} f(x,y)dxdy. \qquad (9)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ можно построить блочное множество A^*_k со свойтствами:

$$A^*_k \subset \overline{A^*_k} \subset G^*, \ \mu(G^* \backslash A^*_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Поскольку $0 < f \leq M$ на G^*:

$$\iint_{G^*} f(x,y)dxdy - \iint_{A^*_k} f(x,y)dxdy = \iint_{(G^* \backslash A^*_k} f(x,y)dxdy \leq \frac{M}{k} \to 0, \text{ при } k \to +\infty. \qquad (10)$$

Подставив в (7), A^*_k, вместо A^*, и переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем, с учётом (10), оценку (9).

Шаг 6.

Установим равенство (2). Применив доказанное неравенство (9) к обратному отображению F^{-1}, якобиан которого $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{J(u,v)}$ непрерывен, и к функции $g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|$, получим

$$\iint_{G^*} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv \leq \iint_{G^*} f(x,y)dxdy. \qquad (11)$$

Неравенство (11) противоположно неравенству (9). Из (9) и (11), очевидно, следует (2). □

Следствие 1. *В условиях теоремы 2,*

$$\mu(G^*) = \iint_{G^*} 1dxdy = \iint_G |J(u,v)|dudv \tag{12}$$

Применим (12) к $\mathrm{int}Q_h$. По теореме о среднем,

$$\mu(F(Q_h)) = |J(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)|\mu(Q_h)$$

$Q_h \ni (\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) \to (u_0, v_0)$ при $h \to 0$. Отсюда и вытекает утверждение о модуле якобиана отображения.