1 Несобственные кратные интегралы.

Определение 1. Пусть G — открытое множество, $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Последовательность множеств $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, будем называть *монотонным исчерпанием* множества G, если

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$ $k = 1, 2, \ldots$,

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Определение 2. Пусть на открытом множестве G задана функция f, интегрируемая по Риману на любом измеримом по Жордану открытом множестве D, таком что $\overline{D} \subset G$. Функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве G, если для любой последовательности открытых измеримых множеств $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int f\, dG_k$, не зависящей от выбора от выбора указанной последовательности.

Этот предел называется *несобственным интегралом* от функции f по множеству G и обозначается $\int f\, dG$ или более подробно

$$\int\int\limits_G \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Таким образом, $\int f\, dG = \lim\limits_{k\to\infty} \int f\, dG_k$.

Это определение отличается от случая $n = 1$. В одномерном случае мы брали одномерные открытые множества весьма специального вида.

Замечание. Если открытое множество G измеримо по Жордану, и функция f интегрируема по Риману на G, то несобственный интеграл от функции f совпадает с обычным интегралом Римана. Это следствие полной аддитивности интеграла Римана.

Определение можно переписать иным образом. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонное исчерпание множества G и существуют интегралы $\int f\, d(G \setminus \overline{G}_k)$. Тогда функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве G, если

$$\exists \lim_{k\to\infty} \int f\, d(G \setminus G_k) = 0.$$

2 Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in G \subset \mathbb{R}^n$, G — открытое множество. Тогда какова бы не была последовательность $\{G_k\}$ открытых измеримых по Жордану множеств G_k, монотонно исчерпывающих множество G, предел*

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dG_k,$$

конечный или равный $+\infty$, всегда существует и не зависит от выбора монотонно исчерпывающей последовательности.

Доказательство 1. Так как $f \geq 0$, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонное исчерпание множества G, и, следовательно, $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$ $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\int f\, dG_k \leq \int f\, dG_{k+1}.$$

Следовательно, существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty}\int f\,dG_k = I_1.$$

Пусть теперь $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ — другое монотонное исчерпание множества G. В силу доказанного существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty}\int f\,dD_k = I_2.$$

Требуется доказать, что $I_1 = I_2$.

Для любого фиксированного элемента G_k существует номер $k_0 = k_0(k)$, такой что $G_k \subset D_{k_0}$. В самом деле, если бы указанного k_0 не нашлось, то для любого $m \in \mathbb{N}$ существует точка $x^{(m)} \in G_k \setminus D_m$. Открытое множество G_k измеримо по Жордану, следовательно, G_k — ограниченное множество, следовательно, $\overline{G_k}$ является компактом. Тогда из последовательности $\left\{x^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x^{(m_\nu)}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$по теореме Больцано-Вейерштрасса.

Обозначим $x^0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} x^{(m_\nu)} \in \overline{G_k} \subset G$. В то же время $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонное исчерпание множества G, следовательно, существует номер m_0, такой что $x_0 \in D_{m_0}$. Так как D_{m_0} открытое множество, оно содержит почти все члены последовательности $\left\{x^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Выберем такой номер ν_0, что $m_{\nu_0} \geq m_0$ и $x^{m_{\mu_0}} \in D_{m_0}$. Тогда получим, что

$$x^{m_{\mu_0}} \in D_{m_{\mu_0}}.$$

Но в то же время $x^{(m_{\nu_0})} \in \overline{G_k}$, и это противоречит выбору последовательности $\{x^{(m)}\}$. Значит, существует номер $k_0 = k_0(k)$, такой что $G_k \subset D_{k_0}$.

Теперь заметим, что в силу того, что $f \geq 0$

$$\int f\,dG_k \leq \int f\,dD_{k_0}. \tag{1}$$

Но, очевидно,

$$\int f\,dD_{k_0} \leq I_2. \tag{2}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1) и учитывая (2), получим $I_1 \leq I_2$. Подобным же образом доказывается неравенство $I_1 \geq I_2$. Тогда $I_1 = I_2$. Что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

и монотонное исчерпание

$$G_k = \{(x,y)\,:\,x^2+y^2 \leq k^2\},\quad k = 1,\,2,\,\ldots,\infty.$$

Сделаем замену переменных $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Тогда

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{k} e^{-r^2}\,dr = -2pi\,\left.\frac{e^{-r^2}}{2}\right|_0^k = \pi(1-e^{-k^2}) \to \pi \quad (k\to\infty).$$

В то же время, если взять другое монотонное исчепание

$$D_k = \{(x,y) : |x| < k,\ |y| < k\}, \quad k = 1,\, 2,\, \dots, \infty,$$

получим

$$I = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{k\to\infty} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-y^2}\, dy\right) = J^2,$$

где

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

что подтверждает теорему, доказанную выше.

Рассмотрим также другое доказательство теоремы 1.

Доказательство 2. Так как $f \geq 0$, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонное исчерпание множества G, и, следовательно, $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$ $k = 1,\, 2,\, \dots,$ то

$$\int f\, dG_k \leq \int f\, dG_{k+1}.$$

Следовательно, существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dG_k = I_1.$$

Пусть теперь $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ — другое монотонное исчерпание множества G. В силу доказанного существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dD_k = I_2.$$

Требуется доказать, что $I_1 = I_2$.

Рассмотрим множества $G_n^k = D_k \cap G_n$. Они образуют исчерпание измеримого множества D_k. Верна цепочка неравенств:

$$\int f\, dD_k = \int\limits_{D_k} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int f\, dG_n^k \leq \lim_{n\to\infty} \int f\, dG_n = I_1.$$

Поскольку $f \geq 0$ и $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$, существует

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dD_k = I_2 \leq I_1.$$

Так как исрепания равноправны, то и $I_1 \leq I_2$. Но тогда $I_1 = I_2$. Что и требовалось доказать.

3 Мажорантный признак сходимости.

Теорема 2. *Пусть функции f и g интегрируемы на одних и тех же подмножествах области G, и $|f(x)| \leq g(x)$ там. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int g\, dG$ вытекает сходимость $\int f\, dG$ и $\int |f|\, dG$.*

Доказательство. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонное исчерпание множества G. Тогда

$$\int |f|\,dG_{n+k} - \int |f|\,dG_n = \int\limits_{G_{n+k}\setminus G_n} |f(x)|\,dx \le \int\limits_{G_{n+k}\setminus G_n} g(x)\,dx = \int g\,dG_{n+k} - \int g\,dG_n,$$

где n и k — любые натуральные числа. Из критерия Коши вытекает сходимость интеграла $\int |f|\,dG$.

Рассмотрим теперь функции

$$f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f),\ f_- = \frac{1}{2}(|f| - f). \tag{3}$$

Очевидно, $0 \le f_+ \le |f|,\ 0 \le f_- \le |f|$. В силу доказанного несобственные интегралы от f_+ и f_- сходятся, а значит сходятся и интеграл от функции $f = f_+ - f_-$. Что и требовалось доказать.

4 Несобственные интегралы от функций, меняющих знак.

Определение. Несобственный интеграл $\int f\,dG$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int |f|\,dG$.

Вспомним введенные в (3) функции f_+ и f_-. Легко видеть, что

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0 \\ 0, & \text{если } f(x) < 0 \end{cases},$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \le 0 \\ 0, & \text{если } f(x) > 0 \end{cases}.$$

Тогда выполняются равенства

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),\ |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{4}$$

Из теоремы 2 следует, что абсолютно сходящийся несобственный интеграл сходится в обычном смысле. Докажем обратное утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\int f\,dG$ сходится ($n \ge 2$), тогда сходится и $\int |f|\,dG$. То есть из сходимости вытекает абсолютная сходимость.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть интеграл $\int |f|\,dG$ расходится. Тогда существует исчерпание $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества G, такое что

$$\lim_{k\to\infty} \int |f|\,dG_k = +\infty. \tag{5}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\int |f|\,dG_{k+1} > 3\int |f|\,dG_k + 2k. \tag{6}$$

Если неравенство (6) не выполняется, всегда можно проредить последовательность $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, так что условие (6) будет выполняться, то есть выбросить некоторые промежуточные члены последовательности $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, так что условие (6) будет выполняться. Это возможно в силу (5).

Пусть $A_k = G_{k+1} \setminus \overline{G_k}$. Это открытое измеримое множество, и $G_{k+1} = A_k \cup \overline{G_k}$. Тогда

$$\int |f|\, dG_{k+1} = \int |f|\, dG_k + \int |f|\, dA_k. \tag{7}$$

Отсюда в силу неравенства (6) получаем

$$\int |f|\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

Учитывая также (4), мы имеем:

$$\int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

Пусть для определенности

$$\int f_+\, dA_k \geq \int f_-\, dA_k,$$

тогда

$$2\int f_+\, dA_k > \int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

Следовательно,

$$\int f_+\, dA_k > \int |f|\, dG_k + k. \tag{8}$$

Наша цель — получить подобное неравенство для функции f.

Из неравенства (8) вытекает, что при любом достаточно малом разбиении множества A_k

$$\sum_{i=1}^{N} f_+(\xi_i)\mu E_i > \int |f|\, dG_k + k,$$

где $\xi_i \in E_i$, а E_i — открытые измеримые множества. Выберем $\{E_i^*\} \subset \{E_i\}$ так, что $f_+(\xi_i) > 0$, $\xi_i \in E_i^*$. То есть нужно просто убрать из разбиения $\{E_i\}$ все такие E_j, что $f_+(\xi_j) = 0$, $\xi_j \in E_j$. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{m} f_+(\xi_i)\mu E_i^* > \int |f|\, dG_k + k. \tag{9}$$

Положим $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i^*$ — открытое измеримое множество; $B_k \subset A_k$. На $\overline{B_k}$ $f_+ > 0$, и, следовательно, $f = f^+$ там. Из неравенства (9) следует, что

$$\underline{S}_\tau \geq \int |f|\, dG_k,$$

где $\underline{S}_\tau$ — нижняя сумма Дарбу. Следовательно,

$$\int f\, dB_k \geq \int |f|\, dG_k + k \tag{10}$$

Заметим, что $f \geq -|f|$, значит

$$\int f\, dG_k \geq -\int |f|\, dG_k. \tag{11}$$

Сложив (10) и (11), получаем

$$\int f\, dG_k + \int f\, dB_k \geq k.$$

Обозначим $D_k = B_k \cup G_k$ — открытое измеримое множество, такое что $G_k \subset D_k \subset G_{k+1}$. Так как $A_k \cap G_k = \varnothing$, то выполняется

$$\int f\, dG_k + \int f\, dB_k = \int f\, dD_k.$$

Следовательно,

$$\int f\, dD_k \geq k$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dD_k = +\infty.$$

Кроме того, последовательность $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ является монотонным исчерпанием множества G, следовательно, $\displaystyle\int f\, dG$ расходится. Это противоречит условию. Значит наше изначальное предположение неверно, и интеграл $\displaystyle\int |f|\, dG$ сходится. Что и требовалось доказать.