Мера Жордана и её свойства.

Определение 1. Множество P, удовлетворяющее свойству

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subseteq P \subseteq \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i],$$

называется блоком (брусом).

$\mu P = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ – мера блока (бруса).

Простейшие свойства меры μP:

1. Неотрицательность $\mu P \geq 0$,

2. Аддитивность

$$P = \cup_{i=1}^{m} P_k,\ P_i \cap P_k = \emptyset,\ i \neq k,$$

$$\mu P = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k,$$

где P_k – блоки.

Определение 2. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется блочным, если оно представимо в виде конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Лемма 1. *Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т.е. объединение, пересечение и разность двух блочных множеств является блочным множеством.*

Доказательство. Пересечение двух блоков является блоком, следовательно, пересечение двух блочных множеств является блочным множеством.

Разность двух блоков – блочное множество, следовательно, разность двух блочных множеств – блочное множество.

Если A, B – блочные множества, то

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup B,$$

то есть объединение любых двух блочных множеств можно предсавить в виде объединения двух непересекающихся блочных множеств, тем самым оно тоже является блочным множеством. ☐

Определим меру блочного множества.

Определение 3. Пусть

$$A = \cup_{k=1}^{m} P_k,\ P_i \cap P_j = \emptyset,\ i \neq j,$$

тогда мера множества A определена равенством

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Это определение корректно, то есть мера не зависит от способа представления множетсва A в виде конечного объединения блоков. Действительно, пусть

$$A = \cup_{k=1}^{m} P_k,\ P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j,$$

$$A = \cup_{j=1}^{l} Q_j\ Q_s \cap Q_t = \emptyset,\ s \neq t.$$

Пересечение двух блоков – блок:

$$\sum_{k=1}^{m} \mu P_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{l} \mu Q_j.$$

Лемма 2. *Пусть A и B – блочные множества, тогда:*

1. *Монотонность меры*
$$A \subset B \Rightarrow 0 \leq \mu A \leq \mu B \tag{1}$$

2. *Полуаддитивность меры*
$$\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B \tag{2}$$

3. *Аддитивность меры*
$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B,\ \textit{если}\ A \cap B = \emptyset \tag{3}$$
$$\mu(A \backslash B) = \mu A - \mu B,\ \textit{если}\ B \subset A. \tag{4}$$

Доказательство. (1) очевидно, установим (3).

$$A = \cup_{k=1}^{m} P_k,\ B = \cup_{j=1}^{r} Q_j$$

$$P_i \cap P_j = \emptyset,\ i \neq j,\ Q_s \cap Q_t = \emptyset,\ t \neq s.$$

$$A \cup B = (\cup_{k=1}^{m} P_k) \cup (\cup_{j=1}^{r} Q_j),\ P_k \cap Q_j = \emptyset,\ \forall k, j$$

По определению блочного множества,

$$\mu(A \cup B) = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k + \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j = \mu A + \mu B.$$

из (3) и (1),

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \backslash (A \cap B)) + \mu B \leq \mu A + \mu B.$$

□

Определение 4. Пусть E – ограниченное множество.

$$\mu_*(E) = \sup_{A \subset E} \mu A,\ \mu^*(E) = \inf_{B \supset E} \mu B,$$

где точные верхняя и нижняя грань взяты по блочным множествам. $\mu_*(E)$ – нижняя мера Жордана множества E, $\mu^*(E)$ – верхняя мера Жордана множества E.

Определение 5. Множество называется измеримым по Жордану, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Их общее значение – мера Жордана. Измеримая область в $\mathbb{R}^2$ называется квадрируемой, в $\mathbb{R}^3$ – кубируемой.

Примеры. 1. Конечное число точек – измеримо и имеет меру 0.

2. Множество E – множество рациональных точек из отрезка $[0,1]$ неизмеримо, т.к. $\mu_*(E)=0$, $\mu^*(E)=1$.

3. Множество $E\times\{0\}\subset\mathbb{R}^2$ – измеримо и двумерная мера равна 0.

4. Ограниченная неизмеримая область.

   $\{r_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – последовательность рациональных точек из интервала $(0,1)$

$$D=\cup_{j=1}^{+\infty}(r_j-\frac{\varepsilon}{2^j},r_j+\frac{\varepsilon}{2^j})\subset\mathbb{R}^1$$

$$G=(D\times[0,1))\cup((0,1)\times(-1,0))$$

   G является областью.

   Доказательство. Достаточно показать неизмеримость множества

$$G^+=D\times(0,1).$$

   Это следует из того, что

$$\mu^*(G^+)=1,$$

$$\mu_*(G^+)\le\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2\varepsilon}{2^j}<2\varepsilon<1.$$

□

Свойства множеств, измеримых по Жордану.

Упражнение. *Пусть E и $F\subset\mathbb{R}^n$ – измеримы*

1. *Измеримы множества $E\cup F$, $E\cap F$,*

2. *Измеримо множество $E\backslash F$, $F\subset E$*

$$\mu(E\backslash F)=\mu(E)-\mu(F).$$

Указане. Сначала получить равенства для блочных множеств, затем оценить снизу нижние и сверху верхние меры множеств из левых частей равенств через сумму мер блочных множеств, аппроксимирующих E и F. □

В дальнейшем потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, $x^{(0)}\in E$, $y^{(0)}\notin E$. Тогда на отрезке, соединяющим $x^{(0)},y^{(0)}$, найдётся $z^{(0)}\in\partial E$.*

Лемма 2. *Пусть ограниченное множество $E\subset\mathbb{R}^n$, блочное множество $D\subset\mathbb{R}^n$, $\partial E\subset D$. Тогда $E\cup D$ – блочное множество.*

Доказательство. Пусть блок $Q\supset E\cup D$, тогда $Q\backslash D$ – блочное множество

$$Q\backslash D=(\cup_{k=1}^{l}P_k)\cup(\cup_{k=l+1}^{m}P_k),$$

P_k – попарно непересекающиеся множества (блоки)

$$E\cap P_k\neq\emptyset,\ 1\le k\le l,$$

$$E \cap P_k \neq \emptyset,\ l+1 \leq k \leq m.$$

На самом деле, $P_k \subset E$ при $1 \leq k \leq l$, в силу леммы 1. Действительно, предположим противное, то есть найдётся $k_0 : 1 \leq k_0 \leq l$, что $P_{k_0} \not\subset E$, тогда найдутся $x^{(0)}, y^{(0)} \in P_k$, $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \notin E$. Отрезок, соединяющий $x^{(0)}, y^{(0)}$, содержится целиком в P_k, с другой стороны, на нём найдётся $z^{(0)} \in \partial E \subset D$, но $P_{k_0} \cap D = \emptyset$. Противоречие.

Пусть $P := \cup_{k=1}^{l} P_k \subset E$, тогда $P \cup D$ – блочное множество, но $E \cup D = P \cup D$, так как $x \in E$, $x \notin D \Rightarrow x \in P$. □

Теорема 1 (Критерий измеримости ограниченного множества)**.** *Для измеримости ограниченного множества необходимо и достаточно, чтобы мера границы* $\mu(\partial E) = 0$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть E – измеримо. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют блочные множества A_ε и B_ε

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$$

$$\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

При этом множество A_ε можно считать открытым, а B_ε – замкнутым. Тогда

$$\partial E \subset B_\varepsilon \backslash A_\varepsilon.$$

В силу определения верхней меры,

$$\mu^*(\partial E) \leq \mu(B_\varepsilon \backslash A_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, $\mu^*(\partial E) = 0$, следовательно, ∂E – измеримо и $\mu(\partial E) = 0$.

Достаточность. Пусть E – ограничено и $\mu(\partial E) = 0$, пусть $\varepsilon > 0$. Существует блочное множество D_ε, такое что $\partial E \subset D_\varepsilon$, $\mu(D_\varepsilon) < \varepsilon$. Построим $B_\varepsilon = E \cup D_\varepsilon$, $A_\varepsilon = B_\varepsilon \backslash D_\varepsilon$. Это блочные множества

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \mu_* E \leq \mu^* E = \mu A_\varepsilon + \mu D_\varepsilon < \mu A_\varepsilon + \varepsilon.$$

Отсюда $0 \leq \mu^* E - \mu_* E < \varepsilon$. В силу произвольности ε,

$$\mu_* E = \mu^* E.$$

□

Теорема 2. *Совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т.е.* $E \cup F$, $E \cap F$, $E \backslash F$ *– измеримы, если* E *и* F *измеримы.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F,$$

$$\partial(E \cap F) \subseteq \partial E \cup \partial F,$$

$$\partial(E \backslash F) \subseteq \partial E \cup \partial F.$$

Докажем для объединения. Пусть $x^{(0)} \in \partial(E \cup F)$, тогда в любой окрестности $U(x^{(0)})$ находятся точки из $E \cup F$, так и точки не из $E \cup F$, следовательно, в окрестности $U(x^{(0)})$ найдутся либо точки из E, либо точки из F, поэтому $x^{(0)} \subset \partial E \cup \partial F$, следовательно, $\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F$.

В силу критерия измеримости, $\mu(\partial E) = \mu(\partial F) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$, B_1, B_2 такие блочные множества, что $\partial E \subset B_1$, $\partial F \subset B_2$, $\mu(B_1) < \varepsilon$, $\mu(B_2) < \varepsilon$.

Тогда $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F \subset B_1 \cup B_2$.

$$\mu^* \partial(E \cup F) \leq \mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu^* \partial(E \cup F) = \mu \partial(E \cup F) = 0$. По критерию измеримости, $E \cup F$ – измеримо. Аналогично доказывается, что $E \cap F$ и $E \backslash F$ измеримы. □

Теорема 3. *Пусть множества E, F – измеримы, тогда*

1. *Неотрицательность и монотонность меры*

$$0 \le \mu E \le \mu F, \text{ если } E \subset F$$

2. *Полуаддитивность меры*

$$\mu(E \cup F) \le \mu(E) + \mu(F)$$

3. *Аддитивность меры*

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F), \text{ если } E \cap F = \emptyset.$$

Доказательство. 1. Измеримость множества $E \cup F$ установлена в предыдущей теореме. Свойство 1. следует из аналогичного свойства для блочных множеств.

2. Пусть B_1 и B_2 – блочные множества такие, что

$$E \subset B_1, \ F \subset B_2,$$

тогда

$$\mu(E \cup F) \le \mu(B_1 \cup B_2) \le \mu(B_1) + \mu(B_2)$$

Далее переходим к $\inf$ $B_1 \supset E$ и $B_2 \supset F$.

3. Пусть A_1 и A_2 – блочные множества такие, что

$$A_1 \subset E, \ A_2 \subset F,$$

тогда $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 \subset E \cup F$

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) \le \mu(E \cup F) \le \mu(E) + \mu(F).$$

Переходим к $\sup$ по A_1 и A_2, получим

$$\mu(E) + \mu(F) \le \mu(E \cup F) \le \mu(E) + \mu(F).$$

□

Теорема 4. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, тогда измеримы его замыкание $\overline{E}$ и внутренность $int\ E$. Причём*

$$\mu(\overline{E}) = \mu(int\ E) = \mu(E).$$

Доказательство. Из измеримости E, в силу критерия измеримости, следует, что $\mu(\partial E) = 0$. Поскольку $\overline{E} = E \cup \partial E$, $int\ E = E \backslash \partial E$, то доказательство следует из двух предыдущих теорем. □

Теорема 5. *График непрерывной на компакте функции имеет меру 0.*

Доказательство. Пусть $f : F \to \mathbb{R}$, где F – компакт в $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $(x, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$.

$$E = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ x \in F, \ x_{n+1} = f(x)\}$$

Функция f как непрерывная на компакте равномерно непрерывна на нём, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \ \forall x, y \in E : \ |x - y| < \delta, \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta_\varepsilon > 0$. Пусть блок $\tilde{P}$, $\tilde{P} \supset F$. Разобьём его на попарно непересекающиеся блоки, диаметры которых меньше δ, и обозначим через $P_1, \dots, P_m$ те из них, которые пересекаются с F.

В каждом P_j возьмём какую-либо точку $x^{(j)} \in P_j$ и построим блок

$$Q_j = P_j \times [f(x^{(j)}) - \varepsilon, f(x^{(j)}) + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Очевидно, график сужения f на $F \cap P_j$ содержится в Q_j. Следовательно, $E \subset \cup_{j=1}^m Q_j$ и, в силу монотонности верхней меры,

$$\mu_{n+1}^* E \le \sum_{j=1}^m 2\varepsilon\mu(P_j) \le 2\varepsilon\mu(\tilde{P}).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\mu_{n+1}^* E = 0$ и, значит, $\mu_{n+1} E = 0$. □

Теорема 6. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ и $\mu(F) = 0$. Тогда прямой цилиндр*

$$E = F \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

измерим, и его мера $\mu_{n+1}(E) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть B_ε – такое блочное множество в $\mathbb{R}^n$, что

$$F \subset B_\varepsilon$$

и

$$\mu(B_\varepsilon) < \varepsilon,$$

тогда $B_\varepsilon \times [a, b]$ – блочное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$E \subset B_\varepsilon \times [a, b]$$

$$\mu_{n+1}^*(E) \le \mu_{n+1}(B_\varepsilon \times [a, b]) < \varepsilon(b - a).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем $\mu_{n+1}^*(E) = 0$, а, следовательно, $\mu_{n+1}(E) = 0$. □