Содержание

1 Интегральная формула Коши

Теорема 1.1. *<u>Интегральная формула Коши.</u>*
Пусть функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в односвязной области $\mathcal{D}$, γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в $\mathcal{D}$.
Тогда, если $\mathcal{G}$ — ограниченная область с границей γ, γ ориентирована в положительном направлении относительно $\mathcal{G}$, то $\forall z \in \mathcal{G}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (*)$$

Напомним, что кривая γ ориентирована положительно относительно области $\mathcal{G}$, если при обходе γ согласно ориентации область $\mathcal{G}$ остается слева.

Доказательство. При фиксированном $z \in \mathcal{G}$ функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ является аналитической (регулярной) по переменной $\zeta \neq z$. Для данного z найдётся такое ε_0, что круг $B(z, \varepsilon_0) \subset \mathcal{G}$ (в силу того, что $\mathcal{G}$ — открытое множество). Обозначим за

$$\mathcal{G}_{\varepsilon_0} = \mathcal{G} \setminus \overline{B(z, \varepsilon_0)}$$

Очевидно, что $\mathcal{G}_{\varepsilon_0}$ — область с кусочно-гладкой границей и

$$\partial\mathcal{G}_{\varepsilon_0} = \partial\mathcal{G} \cup \gamma_{\varepsilon_0}^{-1}, \quad \text{где} \quad \gamma_{\varepsilon_0} = \{\zeta : |\zeta - z| = \varepsilon_0\} \quad \text{— окружность,}$$

пробегаемая против хода часовой стрелки ($\gamma_{\varepsilon_0}^{-1}$ — по часовой стрелке соответственно).

Функция $\frac{1}{\zeta - z}$ при фиксированном z регулярна (аналитична) и непрерывна в $\mathbb{C} \setminus B(z, \varepsilon)$, $\quad \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Следовательно функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ будет регулярной (аналитичной) и непрерывной вплоть до границы $\partial\mathcal{G}_\varepsilon$, $\quad \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Поэтому по основополагающей теореме Коши (см. предыдущую лекцию) получаем

$$\int\limits_{\partial\mathcal{G}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{\partial\mathcal{G}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Таким образом интеграл по границе области $\partial\mathcal{G}$ равен интегралу по окружности γ_ε. Займемся интегралом по окружности γ_ε.

Представим указанный интеграл в виде

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (1)$$

Сделав замену переменных $\zeta = z + \varepsilon e^{i\varphi},\ d\zeta = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$, получаем, что $\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно установить, что второй интеграл в соотношении (1) стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$.
В силу дифференцируемости функции $f(\zeta)$ в точке z имеем

$$f(\zeta) - f(z) = f'(z)(\zeta - z) + \overline{o}(\zeta - z) \quad (2)$$

Поскольку $|\overline{o}(\zeta - z)| \le M|\zeta - z|,\ \forall \zeta \in B(z, \varepsilon_0),\ M = const \ge 0$, из соотношения (2) получаем

$$|f(\zeta) - f(z)| \le (|f'(z)(\zeta - z)| + M)|\zeta - z|,\ \forall \zeta \in B(z, \varepsilon_0)$$

Обозначим $M_1 = |f'(z)(\zeta - z)| + M$, отсюда $\forall\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$

$$\left| \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \le \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \le \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{M_1|\zeta - z|}{|\zeta - z|}\, |d\zeta| = M_1 \cdot 2\pi\varepsilon \to 0$$

Таким образом, переходя к пределу по $\varepsilon \to +0$, получаем утверждение теоремы.

$\square$

Следствие 1.2 (теорема о среднем для аналитических функций). *Пусть функция $f(z)$ аналитична (регулярна) в круге $B(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ и непрерывна вплоть до границы. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi \qquad (**)$$

Доказательство. Согласно интегральной формуле Коши, примененной к области $\mathcal{G} = B(z_0, r)$, имеем, сделав замену $\zeta = z_0 + re^{i\varphi},\ d\zeta = ire^{i\varphi} d\varphi$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{G}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}}\, ire^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi$$

$\square$

Замечание 1.3. *Замечательная формула Коши $(*)$ показывает, что значение $f(z)$ в любой точке области $\mathcal{G}$ определяется значением функции $f(\zeta),\ \zeta \in \partial\mathcal{G}$ только на границе области $\partial\mathcal{G}$. В курсе комплана будет показано, что функция $f(z)$, регулярная в области $\mathcal{G}$, будет являться бесконечно дифференцируемой в этой области ($f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$), как правило это напрямую доказывается дифференцированием функции $f(z)$ по формуле $(*)$.*

Пример 1.4. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$
(хорошо известный вам интеграл Дирихле).

Доказательство. Попробуем вычислить этот интеграл, используя контурное интегрирование. Пусть $\gamma_{\rho,R}$ — контур, состоящий из верхней полуокружности C_R радиуса R с центром в нуле, отрезка $[-R,-\rho]$, верхней полуокружности C_ρ радиуса ρ с центром в нуле и отрезка $[\rho,R]$. Согласно интегральной теореме Коши (см. предыдущую лекцию) $\int\limits_{\gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

где обход полуокружностей совершается против часовой стрелки. Таким образом

$$2i\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

(здесь мы воспользовались формулой Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ x \in \mathbb{R}$)

Покажем, что $\lim\limits_{\rho\to+0}\int\limits_{C_\rho} \dfrac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i$.

Очевидно, полуокружность $C_\rho = \{z : z = \rho e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi\}$ параметризуется следующим образом: $z = \rho e^{i\varphi}, dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$. Отсюда

[*Примечание редактора*: $e^{iz} = 1 + iz + \overline{o}(z)$, тогда $\int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z} + \int\limits_{0}^{\pi}(i + \overline{o}(1))i\rho e^{i\varphi}d\varphi$, и последний интеграл в правой части равенства $\to 0$ при $\rho \to +0$.]

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{\rho e^{i\varphi}}\,i\rho e^{i\varphi}d\varphi = \pi i \quad \Longrightarrow \quad 2i\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi i - \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

Последний интеграл стремится к нулю при $R \to +\infty$. Действительно:

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le \int\limits_{0}^{\pi} \left|\frac{e^{i(Re^{i\varphi})}}{Re^{i\varphi}}\right| |iRe^{i\varphi}d\varphi| = \int\limits_{0}^{\pi} |e^{iR\cos\varphi - R\sin\varphi}|\,d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi$$

а так как $\sin\varphi \ge \frac{2\varphi}{\pi},\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$2\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi \le 2\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-R\frac{2\varphi}{\pi}}\,d\varphi = \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty$$

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Вот как, используя контурное интегрирование, можно вычислить интеграл Дирихле. Я надеюсь ещё вычислить интегралы Френеля и Эйлера-Пуассона.

2 Площадь поверхности

Пусть дана гладкая поверхность $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v)|\ (u,v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$, где $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$ — измеримая по Жордану область. Возьмем разбиение $\mathcal{D}$, образованное прямыми, параллельными осям координат, и рассмотрим брусы разбиения , целиком лежащие в $\overline{\mathcal{D}}$. Пусть P_{ij} — один из таких брусов, и длины его сторон равны Δu_i и Δv_j соответственно. При отображении $\vec{r}(u,v)$ этот прямоугольник отображается к криволинейный четырехугольник $\vec{r}(P_{ij})$. Пусть $M_{ij}(u_i,v_j)$ — левая нижняя вершина P_{ij}. Ввиду дифференцируемости $\vec{r}(u,v)$:

$$\vec{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) = \vec{r}_u{}'(M_{ij})\Delta u_i + \overline{o}(\Delta u_i)$$

$$\vec{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) = \vec{r}_v{}'(M_{ij})\Delta v_j + \overline{o}(\Delta v_j), \quad \Delta u_i, \Delta v_j \longrightarrow 0$$

Обозначим через σ_{ij} площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{r}_u{}'(M_{ij})\Delta u_i$, $\vec{r}_v{}'(M_{ij})\Delta v_j$ (этот параллелограмм мало отличается от криволинейного четырехугольника $\vec{r}(P_{ij})$). Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \|[\vec{r}_u{}'(M_{ij})\Delta u_i,\ \vec{r}_v{}'(M_{ij}\Delta v_j]\| = \\ &= \|[\vec{r}_u{}'(M_{ij}),\ \vec{r}_v{}'(M_{ij})]\|\Delta u_i \Delta v_j = \|[\vec{r}_u{}'(M_{ij}),\ \vec{r}_v{}'(M_{ij})]\|\ \mu P_{ij}\end{aligned}$$

Определим площадь (меру) $\mu\mathcal{S}$ поверхности $\mathcal{S}$ как

$$\mu\mathcal{S} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \sum_j \|[\vec{r}_u{}'(M_{ij}),\ \vec{r}_v{}'(M_{ij})]\|\ \mu P_{ij} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}$$

Стоящая под знаком предела сумма является интегральной суммой функции $\|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\| \in R(\overline{\mathcal{D}})$. Потому интеграл существует и равен $\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\|\,dudv$.

Определение 2.1. *<u>Площадью</u> гладкой поверхности $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v)|\ (u,v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$, где $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$ — измеримая по Жордану область, называется величина*

$$\mu\mathcal{S} = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\|\,dudv$$

Так как $\|[\vec{r}_u', \ \vec{r}_v']\| = \sqrt{EG - F^2}$*, где* $E = (\vec{r}_u', \vec{r}_u'), G = (\vec{r}_v', \vec{r}_v'), F = (\vec{r}_u', \vec{r}_v')$*, то*

$$\mu\mathcal{S} = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

Выражение $\|[\vec{r}_u', \ \vec{r}_v']\|\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ *называется* *дифференциалом площади поверхности* $\mathcal{S}$ *и обозначается* ds.

Если поверхность задана в виде $z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{G}$, то

$$\mu\mathcal{S} = \iint\limits_{\overline{\mathcal{G}}} \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\, dxdy$$

Действительно,

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \quad r_x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix} \quad r_y' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix}$$

Тогда $E = 1 + (f_x')^2, G = 1 + (f_y')^2, F = f_x' f_y'$.

Чтобы определение площади поверхности было корректно, надо показать, что площадь не зависит от параметризации поверхности. Пусть $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u, v)| \ (u, v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$ непрерывная дифференцируемая поверхность и область $\mathcal{D}$ является образом измеримой по Жордану области $\mathcal{D}'$ при непрерывном дифференцируемом отображении $\vec{\lambda}(s, t) = (\alpha(s, t), \beta(s, t))$, Якобиан которого $\dfrac{D(\alpha, \beta)}{D(s, t)} \neq 0$ отличен от нуля в $\mathcal{D}'$.
Вектор функции $\vec{r}(u, v)$ и $\vec{\rho}(s, t) = \vec{r}(\alpha(s, t), \beta(s, t))$ называются эквивалентными параметризациями поверхности $\mathcal{S}$, а $\vec{\lambda}(s, t)$ называется гладкой заменой параметра.

Лемма 2.2. *Пусть вектор-функции* $\vec{r}(u, v)$ *и* $\vec{\rho}(s, t)$ *являются эквивалентными параметризациями поверхности* $\mathcal{S}$*. Тогда*

$$[\vec{\rho}_s', \ \vec{\rho}_t'] = [\vec{r}_u', \ \vec{r}_v'] \cdot \frac{D(\alpha, \beta)}{D(s, t)} \qquad (*)$$

где частные производные $\vec{\rho}_s', \ \vec{\rho}_t'$ *взяты в точке* (s, t)*, а* $\vec{r}_u', \ \vec{r}_v'$ *— в точке* $(\alpha(s, t), \beta(s, t))$.

Доказательство.

$$\rho_s'(s, t) = (\vec{r}(\alpha(s, t), \beta(s, t)))_s' = \vec{r}_u'\alpha_s' + \vec{r}_v'\beta_s', \text{ аналогично } \rho_t'(s, t) = \vec{r}_u'\alpha_t' + \vec{r}_v'\beta_t'$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
[\vec{\rho}_s{}', \ \vec{\rho}_t{}'] &= [r_u{}'\alpha_s' + \vec{r}_v{}'\beta_s', \quad \vec{r}_u{}'\alpha_t' + \vec{r}_v{}'\beta_t'] = \\
&= [\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_u{}']\alpha_s'\alpha_t' + [\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']\alpha_s'\beta_t' + [\vec{r}_v{}', \ \vec{r}_u{}']\beta_s'\alpha_t' + [\vec{r}_v{}', \ \vec{r}_v{}']\beta_s'\beta_t' = \\
&= [\vec{r}_v{}', \ \vec{r}_u{}'] \cdot \begin{vmatrix} \alpha_s' & \alpha_t' \\ \beta_s' & \beta_t' \end{vmatrix} = [\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}'] \cdot \frac{D(\alpha, \beta)}{D(s,t)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Инвариантность площади поверхности относительно гладкой замены параметра сразу следует из доказанной леммы и теореме о замене переменных в кратном интеграле.
Из формулы $(*)$ также следует независимость от замены переменной определения касательной плоскости и нормали к поверхности.

3 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v) | \ (u,v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$ — гладкая поверхность, $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$ — измеримая по Жордану область, $F(x,y,z)$ непрерывна на $\mathcal{S}$, т.е.
$F(\vec{r}(u,v)) = F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$.

Определение 3.1. *Поверхностным интегралом 1го рода функции F по поверхности $\mathcal{S}$ называется величина*

$$
\iint\limits_{\mathcal{S}} F(x,y,z)\, ds = \iint\limits_{\mathcal{D}} F(\vec{r}(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv
$$

Если $F(x,y,z) \equiv 1$, то $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \mu\mathcal{S}$.
Для поверхности, заданной $z = f(x,y)$

$$
\iint\limits_{\mathcal{S}} F(x,y,z)\, ds = \iint\limits_{\overline{\mathcal{G}}} F(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\, dxdy
$$

Следуя общей схеме, поверхностный интеграл 1го рода можно ввести как интеграл по множеству $\mathcal{S}$ с помощью интегральных сумм Римана. Можно показать, что при сделанных предположениях такое определение совпадает с приведенным выше.
К появлению поверхностных интегралов 1го рода приводит задача вычисления массы поверхности с заданной плотностью.

3.2 Ориентация гладкой поверхности

Пусть задана гладкая поверхность $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v) |\ (u,v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$. В каждой точке поверхности $\mathcal{S}$ имеются две единичные нормали $\vec{\mathbf{n}} = \dfrac{[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']}{\|[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']\|}$ и $\vec{\nu} = \dfrac{-[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']}{\|[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']\|}$ — непрерывные функции

Определение 3.2. *Любая непрерывная нормаль на гладкой поверхности $\mathcal{S}$ называется её ориентацией.*

Определение 3.3. *Поверхность, на которой выбрана ориентация, называется ориентированной поверхностью.*

Как и в случае кривых, будем полагать, что данная параметризация $\vec{r}(u,v)$ поверхности $\mathcal{S}$ определяет её ориентацию.

Пов-ть с нормалью $\vec{\mathbf{n}} = \dfrac{[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']}{\|[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']\|}$ будем обозначать $\mathcal{S}^+$, с нормалью $\vec{\nu}$ — $\mathcal{S}^-$.

Пример 3.4. *Пусть гладкая поверхность задается $z = f(x,y)$, тогда вектор единичной нормали*

$$\vec{\mathbf{n}} = \left(\frac{-f_x'}{\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}}, \frac{-f_y'}{\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}} \right)$$

Следовательно $\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, k}) = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}} > 0$, *т.е. единичная нормаль образует острый угол с осью z. Говорят о внешней стороне поверхности*

$$\vec{r}_x{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x' \end{pmatrix} \quad \vec{r}_y{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y' \end{pmatrix}, \quad [\vec{r}_x{}', \vec{r}_y{}'] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = -i \cdot f_x' - j \cdot f_y' + k \cdot 1$$

4 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть задана гладкая поверхность $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v) |\ (u,v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$, где $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$ — измеримая по Жордану область, ориентированная с помощью нормали $\vec{\mathbf{n}} = \dfrac{[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']}{\|[\vec{r}_u{}', \ \vec{r}_v{}']\|}$.

Пусть задано векторное поле $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ функции $(P(\vec{r}(u,v)), Q(\vec{r}(u,v)), R(\vec{r}(u,v))) \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$

Определение 4.1. *<u>Поверхностным интегралом 2го рода</u> по ориентированной поверхности $\mathcal{S}$ называются величины*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},i})\,ds$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} Q(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} Q(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},j})\,ds$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} R(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} R(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},k})\,ds$$

Если поверхность отрицательно ориентирована, то в определении интегралов вместо нормали $\vec{\mathbf{n}}$ необходимо взять нормаль $\vec{\nu}$, поскольку $\cos(\widehat{-\vec{\mathbf{n}},i}) = -\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},i})$, $\cos(\widehat{-\vec{\mathbf{n}},j}) = -\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},j})$, $\cos(\widehat{-\vec{\mathbf{n}},k}) = -\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},k})$, т.е. при изменении ориентации поверхности интеграл 2го рода меняет знак.

4.2 Формулы для вычисления поверхностных интегралов 2го рода

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']}{\|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\|} = \frac{1}{\|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\|}\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

Потому

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} P(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}},i})\,ds =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} P(\vec{r}(u,v))\,\frac{1}{\|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\|}\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\cdot\|[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}']\|\,dudv = \iint\limits_{\mathcal{D}} P(\vec{r}(u,v))\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv$$

Аналогично

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} Q(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\mathcal{D}} Q(\vec{r}(u,v))\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} R(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{\mathcal{D}} R(\vec{r}(u,v))\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} + j\cdot\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = i\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + j\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + k\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

4.3 Физический смысл поверхностного интеграла второго рода

Пусть задано постоянное векторное поле $\vec{\mathbf{v}}$. Можно считать, что $\overline{\mathbf{v}}$ — поле скоростей установившегося течения жидкости (или газа). Вычислим объем жидкости через данную сторону площадки $\mathcal{S}$ в единицу времени. Эта величина называется потоком векторного поля через $\mathcal{S}$.
Пусть площадка $\mathcal{S}$ является параллелограммом, натянутым на векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, а сторона площадки определяется единичной нормалью $\vec{\mathbf{n}}$. Объем жидкости, протекающей через $\mathcal{S}$ за единицу времени, равен объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и $\vec{\mathbf{v}}$, а поток Π жидкости в сторону нормали $\vec{\mathbf{n}}$ равен ориентированному объему параллелепипеда, натянутого на эти векторы, т.е.

$$\Pi = \|[\vec{r}_1, \vec{r}_2]\| \times h = \|[r_1, r_2]\| \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\widehat{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{n}}}) = \|[r_1, r_2]\| \|\vec{\mathbf{v}}\| \frac{(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{n}})}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{n}}\|} = \|[r_1, r_2]\| (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{n}})$$

Пусть теперь в области $V \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ и гладкая ориентированная поверхность $\mathcal{S} = \{r(u, v) | \ (u, v) \in \overline{\mathcal{D}}\}$, где $\mathcal{D}$ — измеримая по Жордану область в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим разбиение области $\mathcal{D}$, образованное прямыми, параллельными осям Ou и Ov. Рассмотрим брусы P_{ij}, целиком лежащие в $\mathcal{D}$, M_{ij} — левая нижняя вершина P_{ij}. Так как векторное поле и единичная нормаль непрерывны, их можно считать локально постоянными на $S_{ij} = \vec{r}(P_{ij})$ и равными $\vec{a}(\vec{r}(M_{ij}))$ и $\vec{\mathbf{n}}(\vec{r}(M_{ij}))$. Поток Π_{ij} через S_{ij} можно считать равным потоку через параллелограмм, натянутый на векторы $\vec{r}_u'(M_{ij})\Delta u_i$, $\vec{r}_v'(M_{ij})\Delta v_j$:

$$\Pi_{ij} = \|[\vec{r}_u'(M_{ij}), \ \vec{r}_v'(M_{ij})]\| \, (\, \vec{a}(\vec{r}(M_{ij})), \vec{\mathbf{n}}(\vec{r}(M_{ij})) \,) \, \Delta u_i \Delta v_j$$

Потому весь поток

$$\Pi = \sum_i \sum_j (\, \vec{a}(\vec{r}(M_{ij})), \ \vec{\mathbf{n}}(\vec{r}(M_{ij})) \,) \, \|[\vec{r}_u'(M_{ij}), \vec{r}_v'(M_{ij})]\| \, \Delta u_i \Delta v_j$$

Эта сумма является суммой Римана для продолжения нулем с $\mathcal{D}$ функции $(\vec{a}, \vec{\mathbf{n}}) \, \|[\vec{r}_u', \vec{r}_v']\|$. Поскольку функция $(\vec{a}, \vec{\mathbf{n}}) \, \|[\vec{r}_u', \vec{r}_v']\|$ является непрерывной, а значит, интегрируемой функцией, то

$$\exists \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_i \sum_j (\, \vec{a}(\vec{r}(M_{ij})), \vec{\mathbf{n}}(\vec{r}(M_{ij})) \,) \, \|[\vec{r}_u'(M_{ij}), \vec{r}_v'(M_{ij})]\| \, \Delta u_i \Delta v_j =$$

$$= \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} (\, \vec{a}(\vec{r}(u, v)), \vec{\mathbf{n}}(\vec{r}(u, v)) \,) \, \underbrace{\|[\vec{r}_u'(u, v), \vec{r}_v'(u, v)]\| \, dudv}_{ds} = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{a}, \vec{\mathbf{n}}) \, ds$$

Определение 4.2. *<u>Потоком</u> непрерывного векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ через сторону гладкой поверхности $\mathcal{S}$, определяемой единичной нормалью $\vec{\mathbf{n}}$, называется число*

$$\Pi = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{a}, \vec{\mathbf{n}})\, ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} (P\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, i}) + Q\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, j}) + R\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, k}))\, ds$$

где $\vec{\mathbf{n}} = (\cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, i}), \cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, j}), \cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, k}))$

5 Формула Гаусса-Остроградского

Пусть $\overline{\mathcal{V}}$ — область в $\mathbb{R}^3$, измеримая по Жордану, с кусочно-гладкой границей. Предположим, что граница $\partial\mathcal{V}$ состоит из двух гладких поверхностей $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, задаваемых уравнениями $z = \varphi(x, y)$, $z = \psi(x, y)$, $\quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ и, быть может, поверхности $\mathcal{S}_0 = \{(x, y, z) |\ (x, y) \in \partial\overline{\mathcal{D}},\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$. То есть граница элементарной относительно оси z области представлена в виде объединения $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ трёх гладких поверхностей.

Определение 5.1. *Область, элементарная относительно всех осей, называется <u>элементарной</u>.*

Теорема 5.2. *<u>Формула Гаусса-Остроградского</u>.*
Пусть $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z), P'_x, Q'_y, R'_z \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{V}})$, где $\overline{\mathcal{V}}$ — замкнутая элементарная область. Тогда

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{V}} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dxdydz \qquad (1)$$

где на поверхности $\partial\overline{\mathcal{V}}$ выбрана внешняя единичная нормаль (точнее на поверхностях $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ выбраны внешние по отношению к $\overline{\mathcal{V}}$ единичные нормали).

Определение 5.3. *Пусть в области $\mathcal{G}$ задано непрерывное векторное поле $\vec{\mathbf{a}} = (P, Q, R)$, причем $P'_x, Q'_y, R'_z \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$. Тогда функция*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется <u>дивергенцией</u> векторного поля $\vec{\mathbf{a}}$ и обозначается символом $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}$.

Если ввести символический вектор $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, то $\operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} = (\nabla, \vec{\mathbf{a}})$.

Таким образом формула (1) может быть переписана в виде

$$\iint\limits_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{V}} (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}})\, ds = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}}\, dxdydz\ ,$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ — внешняя нормаль к поверхности $\mathcal{S}$.

Таким образом поток векторного поля через замкнутую поверхность $\mathcal{S}$ в сторону внешней нормали к ней равен интегралу от дивергенции по объему, ограничиваемому поверхностью $\mathcal{S}$.

Доказательство. Рассмотрим $\iint\limits_{\partial\mathcal{V}} R(x,y,z)\, dxdy$. В силу элементарности области $\overline{\mathcal{V}}$ относительно оси z имеем

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{V}} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}_0} + \iint\limits_{\mathcal{S}_1} + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} .$$

По определению поверхностного интеграла 2го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_0} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}_0} R(x,y,z) \cos(\widehat{\vec{\mathbf{n}}, k})\, ds = 0, \quad \text{так как} \quad \vec{\mathbf{n}} \perp k.$$

Далее, используя формулы, выражающие поверхностные интегралы через интегралы Римана

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_1} R(x,y,z)\, dxdy = -\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} R(x,y,\varphi(x,y))\, dxdy\ ,$$

так как интеграл берется по нижней стороне $\mathcal{S}_1$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_2} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} R(x,y,\psi(x,y))\, dxdy\ .$$

Следовательно

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{V}} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} (\, R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\,)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} dxdy \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R'_z(x,y,z)\, dz \right) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} R'_z(x,y,z)\, dxdydz\ .$$

С остальными членами, стоящими в формуле слева, поступаем аналогично. $\square$

Определение 5.4. $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} \overset{def}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}), \quad \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} = (\nabla, \vec{\mathbf{a}})$

5.2 Физический смысл дивергенции

Пусть в открытом множестве $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{\mathbf{a}} = (P, Q, R)$, $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ и точка $M_0 \in \mathcal{G}$. Тогда

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M_0) = \lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu\overline{B}(M_0, r)} \iint\limits_{\partial\overline{B}(M_0,r)} (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}})\, ds\ ,$$

где замкнутый шар $\overline{B}(M_0, r) \subset \mathcal{G}$, $\vec{\mathbf{n}}$ — внешняя нормаль к сфере.

Доказательство. Действительно, применим формулу Гаусса-Остроградского к интегралу по сфере, а затем теорему о среднем к интегралу от дивергенции:

$$\iint\limits_{\partial\overline{B}(M_0,r)} (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}})\, ds = \iiint\limits_{\overline{B}(M_0,r)} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}\, dxdydz = \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M(r))\mu\overline{B}(M_0, r)\ ,$$

где $M(r) \in B(M_0, r)$ — некоторая точка шара.

Так как $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ и $\lim\limits_{r\to+0} M(r) = M_0$, то $\lim\limits_{r\to+0} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M(r)) = \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M_0)$. Потому

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu\overline{B}(M_0, r)} \iint\limits_{\partial\overline{B}(M_0,r)} (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}})\, ds = \lim_{r\to+0} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M(r)) = \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M_0)\ .$$

$\square$

Из полученной формулы следует, что значение дивергенции в точке есть передел отношения объема жидкости, протекающей за единицу времени через сферу, к объему шара при стремлении $r \longrightarrow +0$. <u>Отсюда вытекает независимость дивергенции от выбора системы координат</u>.

Определение 5.5. *Точки области $\mathcal{G}$, в которых $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} \neq 0$, называют <u>источниками векторного поля</u>.*

Если $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M_0) \neq 0$, по формуле Гаусса-Остроградского поток векторного поля $\vec{\mathbf{a}}$ через произвольную сферу достаточно малого радиуса с центром в M_0 также отличен от 0.

Теорема 5.6. *Пусть*
1) область $\mathcal{V}$ можно представить в виде объединения конечного числа не пересекающихся элементарных областей $\mathcal{V}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и кусочно-гладких поверхностей $\mathcal{S}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, лежащих на границах областей $\mathcal{V}_j$ $(\mathcal{S}_j = \partial\mathcal{V}_j)$.
2) Граница $\partial\mathcal{V}^+$ области $\mathcal{V}$ является кусочно-гладкой поверхностью, ориентированной полем внешних нормалей.
3) Векторное поле $\vec{\mathbf{a}}(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемо в замыкании области $\mathcal{V}$.
Тогда справедлива формула Гаусса-Остроградского (1).

Доказательство. В силу теоремы 5.2 для каждой элементарной области $\mathcal{V}_j$ справедлива формула Гаусса-Остроградского:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}_j} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}_j^+} (\vec{\mathbf{a}}(x, y, z), \vec{\mathbf{n}})\, ds \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Поскольку элементарные области $\mathcal{V}_j$ измеримы, то $\mu(\partial\mathcal{V}_j) = 0$. Отсюда и из условия $\mathcal{V} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{V}_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} \partial\mathcal{V}_j$ следует, что $\mu(\mathcal{V} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{V}_j) = 0$ и в силу аддитивности кратного интеграла

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(x, y, z)\, dxdydz = \sum_{j=1}^{n} \iiint\limits_{\mathcal{V}_j} \operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \iint\limits_{\partial\mathcal{V}_j^+} (\vec{\mathbf{a}}(x, y, z), \vec{\mathbf{n}})\, ds \qquad (2)$$

Через $\partial\mathcal{V}_{ij}^+$ обозначим общую границу соседних областей $\mathcal{V}_i$ и $\mathcal{V}_j$, ориентированную полем нормалей, внешних по отношению к области $\mathcal{V}_i$. Тогда ориентации $\mathcal{V}_{ij}^+$ и $\mathcal{V}_{ji}^+$ взаимно противоположны и следовательно

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{V}_{ij}^+} (\vec{\mathbf{a}}(x, y, z), \vec{\mathbf{n}})\, ds = -\iint\limits_{\partial\mathcal{V}_{ji}^+} (\vec{\mathbf{a}}(x, y, z), \vec{\mathbf{n}})\, ds$$

Поэтому при суммировании интегралов по поверхностям $\partial\mathcal{V}^+$ интегралы по общим границам соседних областей взаимно уничтожаются и остается интеграл по границе области $\mathcal{G}$. Таким образом, из формулы (2) следует формула Гаусса-Остроградского для области $\mathcal{G}$.

$\square$

Определение 5.7. *Непрерывное векторное поле* $\vec{\mathbf{a}}(x, y, z)$ *называется* *<u>солиноидальным</u> в области* Ω*, если поток поля* $\vec{\mathbf{a}}$ *через* $\forall$ *замкнутую кусочно-гладкую поверхность* $\mathcal{S}$*, лежащую в области* Ω *равен нулю:*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{\mathbf{a}}(x,y,z), \vec{\mathbf{n}})\, ds = 0\ , \quad \forall \text{ замкнутой кусочно-гладкой } \mathcal{S} \subset \Omega$$

Определение 5.8. *Область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *называется <u>объемно односвязной</u>, если для* $\forall$ *замкнутой кусочно-гладкой поверхности* $\mathcal{S} \subset \Omega$ *область* $\mathcal{G}$*, ограниченная поверхностью* $\mathcal{S}$*, содержится в* Ω*.*

Образно говоря, объемная односвязность области Ω означает, что Ω не имеет «внутренних полостей».

Теорема 5.9. *Пусть векторное поле* $\vec{\mathbf{a}}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *непрерывно дифференцируемо в области* Ω*. Тогда условие*

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{a}}(x,y,z) = 0, \quad \forall\, (x,y,z) \in \Omega \qquad (3)$$

является необходимым, а в случае объемной односвязности области Ω *и достаточным условием соленоидальности поля* $\vec{\mathbf{a}}$*.*

Доказательство. «$\Longrightarrow$»
Необходимость условия (3) для соленоидальности поля $\vec{\mathbf{a}}$ следует из теоремы 5.6 (теоремы 5.2).

«$\Longleftarrow$»
Пусть выполнено условие (3) и область Ω объемно односвязна. Пусть замкнутая кусочно-гладкая поверхность $\mathcal{S}$ ограничивает область $\mathcal{G}$. Тогда в силу объемной односвязности Ω имеем $\mathcal{G} \subset \Omega$, поэтому $\operatorname{div} \vec{\mathbf{a}}(x,y,z) = 0$, $\forall\, (x,y,z) \in \mathcal{G}$. Отсюда и из формулы Гаусса-Остроградского следует, что поток поля $\vec{\mathbf{a}}$ через поверхность $\mathcal{S}$ <u>равен 0</u>: $\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{\mathbf{a}}(x,y,z), \vec{\mathbf{n}})\, ds = \iiint\limits_{\mathcal{G}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}}(x,y,z)\, dxdydz = 0.$ $\square$

Замечание 5.10. *Из условия (3) для объемно неодносвязной области* Ω *<u>не</u> следует соленоидальность поля* $\vec{\mathbf{a}}$*.*

Доказательство. Пусть, например, $\vec{\mathbf{a}}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ — электрическое поле точечного заряда,
$\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \le \|\vec{r}\| \le 3\}$, $\mathcal{S} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 :\ \|\vec{r}\| = 2\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} = \left(\nabla, \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\right) = \frac{(\nabla,\vec{r})}{\|\vec{r}\|^3} + \left(\vec{r}, \nabla(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3})\right) = \\
= \frac{3}{\|\vec{r}\|^3} - \left(\vec{r}, \frac{3\nabla\|\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|^4}\right) = \frac{3}{\|\vec{r}\|^3} - 3\left(\vec{r}, \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right) = 0
\end{aligned}
$$

то есть условие (3) выполнено.

Однако

$$
\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}})\, ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) ds = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{ds}{\|\vec{r}\|^2} = \frac{2^2 4\pi}{2^2} = 4\pi \neq 0
$$

$\square$

6 Формулы Грина для оператора Лапласа

Пусть $\mathcal{G}$ — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей $\mathcal{S}^+ = \partial G$, ориентированной внешней нормалью $\vec{\mathbf{n}}$ (область и её граница таковы, что для них справедлива формула Гаусса-Остроградского).

Теорема 6.1. *Первая формула Грина.*
Пусть функции $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{G}})$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{G}} (v\Delta u)\, dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{G}} v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz = \\
= \iint\limits_{\mathcal{S}^+=\partial\mathcal{G}} v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\, ds - \iiint\limits_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) dxdydz \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Доказательство.

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} (v\Delta u)\,dxdydz + \iiint\limits_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) dxdydz \overset{\boxed{1}}{=}$$

$$= \iiint\limits_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\mathcal{G}} \operatorname{div}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}, v\frac{\partial u}{\partial y}, v\frac{\partial u}{\partial z}\right) dxdydz \overset{\boxed{2}}{=}$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + v\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) ds = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds\,,$$

что и равносильно равенству (1):
$\iiint\limits_{\mathcal{G}} (v\Delta u)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds - \iiint\limits_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) dxdydz.$

В данной выкладке первое равенство [1] следует прямой проверкой: $\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, а второе [2] — из формулы Гаусса-Остроградского.

Здесь через $\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$ обозначена производная вдоль внешней нормали: $\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = (\operatorname{grad} u, \vec{\mathbf{n}})$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали $\vec{\mathbf{n}}$ к поверхности $\mathcal{S}^+$.

$\square$

Теорема 6.2. *Вторая формула Грина.*
При сделанных предположениях относительно области $\mathcal{G}$, её границы $\mathcal{S} = \partial\mathcal{G}$ и функций u, v справедлива формула

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} (v\Delta u - u\Delta v)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right) ds \qquad (2)$$

Доказательство. В соответствии с формулой (1) (функции u и v равноправны):

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} (u\Delta v)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds - \iiint\limits_{\mathcal{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dxdydz\,. \quad (3)$$

Вычитая из формулы (1) формулу (3), мы и получаем формулу (2). $\square$

Определение 6.3. *Функция $u(x,y,z)$ называется функцией, гармонической в области $\mathcal{G}$, если $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G})$ и*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathcal{G}$$

Теорема 6.4. *Теорема о среднем для гармонических функций в $\mathbb{R}^3$. Пусть $u(x,y,z)$ — функция, гармоническая в шаре $B((x_1,y_1,z_1),R)$ с центром в точке (x_1,y_1,z_1) радиуса R. Тогда*

$$u(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\mathcal{S}^+} u\,ds\,, \text{ где } \quad \mathcal{S}_R^+ = \partial B((x_1,y_1,z_1),R) \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим шаровой слой

$$V_{\rho,R} = \{0 < \rho \le \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \le R\}\,.$$

Непосредственной проверкой (проверьте!) можно убедиться в том, что функция $v = \frac{1}{r}$ является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus (x_1,y_1,z_1)$.
Обозначим через S_ρ сферу с центром в (x_1,y_1,z_1) радиуса ρ. Согласно второй формуле Грина для оператора Лапласа

$$0 = \iiint\limits_{V_{\rho,R}} (v\Delta u - u\Delta v)\,dxdydz = \iint\limits_{\partial V_{\rho,R}} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right) ds \qquad (5)$$

На сферах S_ρ и S_R величина $v = \frac{1}{r}$ постоянна.
Заметим, что из первой формулы Грина для оператора Лапласа вытекает, что

$$\iint\limits_{S_R^+} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds = 0 \quad \text{и} \quad \iint\limits_{S_\rho^-} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds = 0 \qquad (6)$$

В самом деле, если в первой формула Грина взять в качестве $v \equiv 1$, то мы получим

$$0 = \iiint\limits_{\mathcal{G}} (1 \cdot \Delta u)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds - 0\,.$$

Замечание 6.5. *Сам по себе этот факт заслуживает внимания, поскольку он означает, что для любой гармонической функции u в области $\mathcal{G}$ справедливо соотношение*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds = 0\,,$$

это важный факт при изучении задачи Неймана для оператора Лапласа.

Заметим, что граница шарового слоя $V_{\rho,R}$ состоит из сфер S_ρ, S_R радиусов ρ и R соответственно, с центром в точке (x_1, y_1, z_1). При этом сфера S_R ориентирована внешней нормалью, а сфера S_ρ ориентирована нормалью, направленной к центру (x_1, y_1, z_1) шара $B((x_1, y_1, z_1), R)$.
Заметим, что из соотношений (5) и (6) вытекает, что

$$0 = -\iint\limits_{S_\rho^-} u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds + \iint\limits_{S_R^+} u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\,ds \qquad (7)$$

Отметим, что $\quad \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = \pm\dfrac{1}{r^2}\,, \quad (8)$
(поскольку производная по внешней (внутренней) нормали сонаправлена с $\frac{\partial}{\partial r}$).
Отсюда из соотношений (7) и (8) получим, что $\quad \dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\iint\limits_{S_\rho^-} u\,ds = \dfrac{1}{R^2}\iint\limits_{S_R^+} u\,ds \quad (9)$

Применяя теорему о среднем к левой части (9), получим

$$\frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{\rho^2}\iint\limits_{S_\rho^-} ds = \frac{1}{R^2}\iint\limits_{S_R^+} u\,ds\,, \text{ где } (\xi,\eta,\zeta) \text{ — точка на поверхности } S_\rho \quad (10)$$

Заключительный шаг: перейдём к пределу в формуле (10) при $\rho \longrightarrow +0$. В силу непрерывности функции $u(x,y,z)$ получим, что $u(\xi,\eta,\zeta) \longrightarrow u(x_1,y_1,z_1)$ при $\rho \to +0$. Следовательно, получаем, что

$$u(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\mathcal{S}^+} u\,ds\,, \text{ то есть искомую формулу (4).}$$

$\square$

Замечание 6.6. *(эмоциональное) Посмотрите, как освоенные Вами результаты из курса матана используются при решении содержательных и актуальных задач математической физики.*

6.2 Интеграл Гаусса

Вычислить интеграл $I(x,y,z) = \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\cos(\vec{r},\vec{\mathbf{n}})}{r^2}\,ds\,, \qquad (11)$

где $\mathcal{S}$ — простая замкнутая поверхность, ограничивающая компакт $T \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial T = \mathcal{S}$), $\vec{\mathbf{n}}$ — внешняя нормаль к поверхности $\mathcal{S}$ в точке (ξ,η,ζ), $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку (x,y,z) с точкой (ξ,η,ζ),
$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$.

Рассмотрим два случая:

1. Поверхность $\mathcal{S}$ не окружает точку (x, y, z),
2. Поверхность $\mathcal{S}$ окружает точку (x, y, z).

1. Заметим, что $\cos(\vec{r}, \vec{\mathbf{n}}) = \frac{(\vec{r}, \vec{\mathbf{n}})}{r}$, применим формулу Гаусса-Остроградского:

$$I(x,y,z) = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \left(\frac{\xi - x}{r^3} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r^3} \cos\beta + \frac{\zeta - z}{r^3} \cos\gamma \right) ds =$$

$$= \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta - z}{r^3} \right) \right) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_{T} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2 + 3(\eta - y)^2 + 3(\zeta - z)^2}{r^5} \right) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_{T} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0$$

2. Во втором случае формулу Гаусса-Остроградского применять нельзя (интеграл содержит особенность, то есть является несобственным).
Вырежем сферу радиуса ε вокруг точки (x, y, z) и применим формулу Гаусса-Остроградского к «дырявой» области $T \setminus \overline{B((x, y, z), \varepsilon)}$:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{\mathbf{n}} \right) ds + \iint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon^-} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{\mathbf{n}} \right) ds = 0 \qquad (12)$$

Из соотношения (12) получаем:

$$I(x,y,z) = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{\mathbf{n}} \right) ds = \iint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon^+} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{\mathbf{n}} \right) ds = \iint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon^+} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \frac{\vec{r}}{r} \right) ds = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon^+} ds = 4\pi.$$

□

Следующий материал является сугубо необязательным и дополнительным.
На основании того, что Вы уже знаете, можно обсуждать более продвинутые вопросы.
Рассмотрим следующие классические задачи для оператора Лапласа:

<u>задача Дирихле</u>:

$$\Delta u = f, \quad u\big|_{\mathcal{S} = \partial\mathcal{G}} = \varphi \qquad (I)$$

задача Неймана:

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\Big|_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{G}} = \psi \qquad (II)$$

Здесь $\mathcal{G}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\mathcal{S}$. Функции f, φ, ψ являются заданными, функция u — искомой.
Задачи $(I), (II)$ — классические задачи математической физики. Из изучению посвящена обширнейшая литература. Однако на основании того, что Вы уже освоили, можно рассмотреть и изучить эти задачи. В одной из последних лекций семестра я рассмотрю задачу (I).

Замечание 6.7. *Следствием 1й формулы Грина для задачи Неймана является* $\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\, ds = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \psi\, ds = 0$ *— необходимое условие разрешимости при* $f = 0$.

7 Приложения формулы Гаусса-Остроградского.

7.1 Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Определение 7.1. *Функция $V(x, x_0)$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа, если $\Delta V(x, x_0) = \delta(x - x_0)$, где $\delta(x - x_0)$ — обобщенная функция Дирака: $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0)$.*

Рассмотрим функцию $\mathcal{E}(x, x_0) = -\dfrac{1}{4\pi\|x - x_0\|}$. Покажем, что $\mathcal{E}(x, x_0)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа.

Так как $\mathcal{E}(x, x_0)$ является локально суммируемой функцией, то $\mathcal{E}(x, x_0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3_x)$.
Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3_x)$. По свойствам обобщенной функции $\langle \Delta\mathcal{E}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{E}, \Delta\varphi \rangle$.
Так как $\mathcal{E}(x, x_0)$ — локально суммируемая функция, то

$$\langle \mathcal{E}, \Delta\varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x, x_0)\Delta\varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(x_0,\varepsilon)} \mathcal{E}(x, x_0)\Delta\varphi(x)\, dx\,,$$

где $B(x_0, \varepsilon)$ — шар с центром в точке x_0 радиуса ε.

Для вычисления второго интеграла воспользуемся 2й формулой Грина:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(x_0,\varepsilon)} \mathcal{E}(x, x_0)\Delta\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ \Delta\mathcal{E}(x, x_0)dx + \int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} \left(\mathcal{E}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\mathbf{n}}} - \varphi\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\right) ds, \qquad (*)$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ — направление внутренней нормали к сфере радиуса ε с центром в x_0.

. В силу того, что $\Delta\mathcal{E} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$, имеем $\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ \Delta\mathcal{E}(x,x_0)dx = 0.$

Покажем, что в соотношении $(*)$ последний интеграл стремится к $\varphi(x_0)$.

. Так как $\mathcal{E}(x,x_0)$ постоянна на $S(x_0,\varepsilon)$ и равна $\mathcal{E}(\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}$, то:

$$\left|\int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} \mathcal{E}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\,ds\right| \le |\mathcal{E}(\varepsilon)| \int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\right| ds \le \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2 \sup_{S(x_0,\varepsilon)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\right| \le \varepsilon\cdot C_1 \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0,$$

где C_1 — константа, не зависящая от ε, так как производные φ ограничены в Ω.

. Так как $\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$ на сфере $S(x_0,\varepsilon)$ (см. выкладки ниже), то:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} -\varphi\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\,ds = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{S(x_0,\varepsilon)}\varphi\,ds = \boxed{\varphi(x_0)}.$$

$$\frac{1}{\|x-x_0\|} = \frac{1}{\sqrt{(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2+(x^3-x_0^3)^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mathcal{E}(x,x_0)) = \frac{x^i-x_0^i}{4\pi\Big((x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2+(x^3-x_0^3)^2\Big)^{3/2}},\quad i=1,2,3.$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}} = \frac{\partial}{\partial x^1}(\mathcal{E}(x,x_0))\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial x^2}(\mathcal{E}(x,x_0))\cos\beta + \frac{\partial}{\partial x^3}(\mathcal{E}(x,x_0))\cos\gamma,$$

где $\vec{\mathbf{n}} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = \Big(-\frac{x^1-x_0^1}{\|x-x_0\|}, -\frac{x^2-x_0^2}{\|x-x_0\|}, -\frac{x^3-x_0^3}{\|x-x_0\|}\Big).$

Тогда получаем $\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}} = -\frac{(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2+(x^3-x_0^3)^2}{4\pi\Big((x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2+(x^3-x_0^3)^2\Big)^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$.

□

7.2 Исследование уравнения Лапласа. Приложения формулы Гаусса-Остроградского.

Пусть $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $S(x_0,\varepsilon) = \partial B(x_0,\varepsilon)$. Применим вторую формулу Грина в области $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon)}$ к функциям $u(x)$ и $\mathcal{E}(x,x_0)$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{E}\Delta u - u\Delta\mathcal{E})\,dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left(\mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}} - u\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\right)ds + \int\limits_{S(x_0,\varepsilon)}\left(\mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}'} - u\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{\mathbf{n}}'}\right)ds, \quad (*)$$

где $\vec{\mathbf{n}}'$ — направление внутренней нормали к сфере $S(x_0,\varepsilon)$. Равенство $(*)$ справедливо для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Покажем, что второй интеграл в правой части $(*)$ стремится к $u(x_0)$ при $\varepsilon \longrightarrow +0$.

$$\left| \int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} \mathcal{E}\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}'}\, ds \right| \le |\mathcal{E}(\varepsilon)| \cdot 4\pi\varepsilon^2 \sup_{S(x_0,\varepsilon)} \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}'} \right| \le \varepsilon \cdot C_1 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{где } C_1 \text{ не зависит от } \varepsilon.$$

Так как $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{\mathbf{n}}'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$ на сфере $S(x_0,\varepsilon)$, то:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} u\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{\mathbf{n}}'}\, ds \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} u\ \ ds = u(x_0).$$

Здесь в последнем равенстве мы применили теорему о среднем значении для интеграла $\int\limits_{S(x_0,\varepsilon)} u\ \ ds = 4\pi\varepsilon^2 u(x_\varepsilon)$ и воспользовались непрерывностью $u(x)$ в Ω.

Поэтому при переходе к пределу при $\varepsilon \longrightarrow +0$, получим:

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}\Delta u\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - \mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right) ds, \quad (**)$$

Если $\Delta u = 0$, то получим $u(x_0) = \displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \mathcal{E}(x,x_0)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - \mathcal{E}(x,x_0)\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right) ds. \quad (\triangledown)$

Формула $(\triangledown)$ даёт представление гармонической функции $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ в любой точке $x_0 \in \Omega$ через значения u и $\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$ на $\partial\Omega$.

Если $\Delta u = f$ в Ω, то для формулы $(**)$ имеем

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} f(x)\mathcal{E}(x,x_0)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \mathcal{E}(x,x_0)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - \mathcal{E}(x,x_0)\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right) ds,$$

выражение через интегралы вида

$$u_0(x_0) = \int\limits_{\Omega} a_0(x)\|x-x_0\|^{-1}\, dx \ \text{ — объемный (Ньютонов) потенциал,}$$

$$u_1(x_0) = \int\limits_{\partial\Omega} a_1(x)\|x-x_0\|^{-1}\, ds \ \text{ — простого слоя,}$$

$$u_2(x_0) = \int\limits_{\partial\Omega} a_2(x)\frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(\|x-x_0\|^{-1})\, ds \ \text{ — двойного слоя.}$$

8 Формула Стокса

(изложение близкое к учебнику О.В.Бесова)

Пусть задан дважды дифференцируемый (элемент) кусок поверхности $\mathcal{S} = \{r(u,v) : (u,v) \in \overline{\mathcal{D}}\} \subset \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, где $\mathcal{G}$ — область в $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ — плоская ограниченная область с границей $\partial\mathcal{D} = \{(u(t), v(t)) : a \le t \le b\}$, представляющей собой кусочно-гладкий контур, и пусть $\partial\mathcal{S} = \Gamma = \{r(u(t), v(t)) : a \le t \le b\}$. Говорят, что контур Γ ограничивает поверхность $\mathcal{S}$, а также что поверхность $\mathcal{S}$ натянута на контур Γ.
Будем считать, что контур $\partial\mathcal{D}$ ориентирован положительно относительно области $\mathcal{D}$. Пусть $\mathbf{\vec{n}} = \dfrac{[r'_u,\, r'_v]}{\|[r'_u,\, r'_v]\|}$ — ориентация поверхности $\mathcal{S}$. При этом поверхность $\mathcal{S}$ и контур $\partial\mathcal{S}$ оказываются ориентированны по правилу штопора.

Теорема 8.1. *Формула Стокса.*
Пусть на области $\mathcal{G}$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, и пусть поверхность описанного типа $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$. Тогда, если ориентация контура и поверхности согласованы (по правилу штопора), то

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathrm{rot}\ \vec{a}, \mathbf{\vec{n}})\, ds = \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Другими словами, пусть функции P, Q, R непрерывны вместе со своими первыми частными производными, т.е. $\vec{a} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$, ориентация поверхности и контура согласованы, тогда $\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \mathrm{rot}\ \vec{a}\, ds$ (1), или

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

циркуляция векторного поля по контуру Γ равна потоку ротора (вихря) этого поля через поверхность $\mathcal{S}$, ограниченную контуром Γ.

Доказательство. Рассмотрим, например, $\int\limits_{\Gamma} Pdx$ (для остальных слагаемых рассуждения аналогичны). Обозначим контур $\gamma_0 = \{(u(t), v(t)) : t \in [a,b]\} = \partial\mathcal{D}$, тогда $\Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)) : t \in [a,b]\}$. По определению криволинейного интеграла 2го рода:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \int\limits_{a}^{b} P\big(x(u(t),v(t)),\, y(u(t),v(t)),\, z(u(t),v(t))\big) \cdot \big(x(u(t),v(t))\big)'_t dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma_0} P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)$$

Здесь мы пользовались формулой $\big(x(u(t),v(t))\big)'_t = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}$.

Применив формулу Грина к получившемуся интегралу, получаем следующую цепочку равенств:

$$\int\limits_{\gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}du + P\frac{\partial x}{\partial v}dv = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)dudv =$$
$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \cancel{P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}\right) -$$
$$- \left(\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \cancel{P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}}\right)dudv =$$
$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds.$$

$(*)$ Здесь мы пользовались формулами: $\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \Phi\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \Phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv,$

$$\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Аналогично рассматриваются интегралы $\int\limits_{\Gamma} Q(x,y,z)dy$ и $\int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)dz$. Складывая получившиеся формулы, получим соотношение (1).

□

С помощью rot просто записывается критерий потенциальности векторного поля $\vec{a}$: $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$. В частности $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$. Отметим также, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q'_z - R'_y) + \frac{\partial}{\partial y}(R'_x - P'_z) + \frac{\partial}{\partial z}(P'_y - Q'_x) = (\cancel{Q'_{zx}} - \cancel{R'_{yx}}) + (\cancel{R'_{xy}} - \cancel{P'_{zy}}) + (\cancel{P'_{yz}} - \cancel{Q'_{xz}}) = 0.$$

Распространим формулу Стокса на кусочно-гладкие поверхности.

Определение 8.2. *Поверхность $\mathcal{S}$ называется* <u>*кусочно-гладкой ориентированной поверхностью*</u>*, если*

1. *Она является объединением конечного числа гладких ориентированных поверхностей*

2. *$\mathcal{S}_j$ пересекаются разве что по краям, причем общие участки принадлежат не более чем двум поверхностям, и пробегаются эти участки в противоположных направлениях.*

Второе условие необходимо, так как «склейка» гладких поверхностей может привести к неориентируемой поверхности (пример: лист Мёбиуса).

Теорема 8.3. *Если $\mathcal{S}$ — кусочно-гладкая ориентируемая поверхность, полученная «склейкой» поверхностей, для которых справедлива формула Стокса, то эта формула справедлива для всей поверхности $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Поскольку общие участки границ поверхностей $\mathcal{S}_j$ встречаются дважды и с противоположной ориентацией, то $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial\mathcal{S}_j} = \int_{\partial\mathcal{S}}$.

С другой стороны, применяя формулу Стокса и интеграла по кусочно-гладкой поверхности: $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^{k}\int_{\partial\mathcal{S}_j} = \sum_{j=1}^{k}\iint_{\mathcal{S}_j} = \iint_{\mathcal{S}}$ □

Теорема 8.4. *Пусть в трёхмерной области $\mathcal{G}$ задано векторное поле $\vec{a} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$, M_0 — фиксированная точка $\mathcal{G}$, ν — постоянный единичный вектор,* Π — *плоскость $\perp \nu$ и проходящая через M_0, $\mathcal{S}$ — ограниченная область в плоскости* Π, *$\gamma = \partial\mathcal{G}$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, $d(\mathcal{S})$ — диаметр области $\mathcal{S}$. Тогда*

$$\operatorname{rot}_\nu \vec{a}(M_0) = \lim_{d(\mathcal{S})\to 0} \frac{\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})}{\mu\mathcal{S}} \qquad (*)$$

Доказательство. По формуле Стокса: $\displaystyle\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}_\nu \vec{a}\, ds$.

По интегральной теореме о среднем: $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}_\nu \vec{a}\, ds = \operatorname{rot}_\nu \vec{a}(M)\cdot\mu\mathcal{S}, \quad M \in \overline{\mathcal{S}}$.

Следовательно $\displaystyle\frac{\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r})}{\mu\mathcal{S}} = \operatorname{rot}_\nu \vec{a}(M)$.

Заметим, что при $d(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$ будет и $M \to M_0$, поэтому в силу непрерывности функции $\operatorname{rot}_\nu \vec{a}(M)$, переходя к пределу при $d(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$, получим $(*)$. □

Из формулы $(*)$ вытекает, что $\operatorname{rot}_\nu \vec{a}(M_0)$ не зависит от выбора системы координат.

9 Потенциальные векторные поля

Пусть в области $E \subset \mathbb{R}^3$ (или же $\mathbb{R}^2$) задано векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ (или же $\vec{a}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$).

Определение 9.1. *Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным в области E, если существует дифференцируемая функция $u : E \to \mathbb{R}$ такая, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, т.е. $\vec{a} = (u'_x, u'_y, u'_z)$ (соответственно $\vec{a} = (u'_x, u'_y)$). Функция u называется потенциалом векторного поля $\vec{a}$.*

Потенциальность векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ равносильна тому, что выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является дифференциалом du некоторой дифференцируемой функции u.

Теорема 9.2. *Пусть непрерывное векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ потенциально в области E, а A и B — произвольные её точки. Тогда для любой кусочно непрерывно дифференцируемой ориентированной кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B, лежащей в области E:*

$$\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(B) - u(A)\,,$$

где через u обозначен потенциал векторного поля $\vec{a}$.

Доказательство. Пусть $\breve{AB} = \{(x(t), y(t), z(t)) | t \in [a,b]\}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая с началом в точке A и концом в точке B, содержащаяся в E. Тогда

$$\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b \Big(P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t) \Big)\,dt = \\ = \int_a^b u'(\vec{r}(t))\,dt = u(B) - u(A)\,.$$

Если $\breve{AB}$ кусочно непрерывно дифференцируемая кривая, то обозначим через $\breve{A_j A_{j+1}}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $A = A_0, \ldots, A_{k+1} = B$ её непрерывно дифференцируемые куски. В силу определения криволинейного интеграла по кусочно непрерывно дифференцируемой кривой и полученного выше равенства

$$\int_{\breve{AB}} \vec{a}\,d\vec{r} = \sum_{j=0}^{k} \int_{\breve{A_j A_{j+1}}} \vec{a}\,d\vec{r} = \sum_{j=0}^{k} \Big(u(\vec{r}(A_{j+1})) - u(\vec{r}(A_j)) \Big) = u(B) - u(A)\,.$$

$\square$

Замечание 9.3. *Доказанная формула является распространением формулы Ньютона-Лейбница на интегралы по кривым.*

Теорема 9.4. *Для того, чтобы непрерывное векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ было потенциальным в области E, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек $A, B \in E$ интеграл $I = \int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависел от кусочно непрерывно дифференцируемой кривой $\breve{AB} \subset E$ с началом в точке A и концом в точке B, а зависел лишь от начальной и концевой точек этой кривой.*

Доказательство. Необходимость сразу же следует из теоремы 9.2.
Достаточность. Зафиксируем точку $M_0 \in E$. Из условий теоремы следует, равенство $u(M) \overset{def}{=} \int_{\breve{M_0M}} \vec{a}\,d\vec{r}$, где $\breve{M_0M}$ — произвольная ориентированная кусочно непрерывно дифференцируемая кривая, лежащая в E и соединяющая точки M_0 и M, однозначно определяет функцию на множестве E. Покажем, что $u(M)$ является потенциалом векторного поля $\vec{a}$. Для этого найдём её частные производные в произвольной точке M области E.
Поскольку E открыто, то существует окрестность $U(M, \delta) \subset E$. Пусть $M = (x, y, z), M_h = (x + h, y, z), |h| < \delta$. Тогда

$$u(M_h) - u(M) = \int_{\breve{M_0M_h}} \vec{a}\,d\vec{r} - \int_{\breve{M_0M}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\breve{M_0M} \cup \breve{MM_h}} \vec{a}\,d\vec{r} -$$

$$- \int_{\breve{M_0M}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\breve{M_0M}} \vec{a}\,d\vec{r} + \int_{\breve{MM_h}} \vec{a}\,d\vec{r} - \int_{\breve{M_0M}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\breve{MM_h}} \vec{a}\,d\vec{r}$$

Параметризация отрезка $\breve{MM_h}$ имеет вид $x = x + t, y = y, z = z, t \in [0, h]$, если $h > 0$ и $t \in [h, 0]$, если $h < 0$. Поэтому (считаем для определённости, что $h > 0$)

$$u(M_h) - u(M) = \int_0^h P(x + t, y, z)\,dt = P(x + \theta h, y, z)h,\ 0 < \theta < 1\,,$$

(применили теорему о среднем для интеграла от непрерывной функции). Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(M_h) - u(M)}{h} = P(x, y, z), \quad \text{т.е.} \quad u'_x = P.$$

Аналогично проверяется, что $u'_y = Q, u'_z = R$. □

Замечание 9.5. *Условие независимости интеграла $\int_{\breve{AB}} \vec{a}\,d\vec{r}$ от пути интегрирования равносильно тому, что интеграл по любой замкнутой кусочно непрерывно дифференцируемой кривой равен нулю.*
В доказательстве теоремы использовано то, что любые две точки области можно соединить кусочно непрерывно дифференцируемой кривой.

Условие потенциальности векторного поля, содержащееся в теореме, трудно проверяемо. На практике удобно пользоваться теоремой, приводимой ниже.

Теорема 9.6. *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое в области E векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в области E выполнялись равенства: $P'_y = Q'_x$, $Q'_z = R'_y$, $R'_x = P'_z$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть поле $\vec{a}$ потенциально в E, т.е. существует функция $u \in \mathcal{D}(E)$, т.ч. $u'_x = P$, $u'_y = Q$, $u'_z = R$ в E. По условию теоремы $\exists P'_y, Q'_x \in \mathcal{C}(E)$. Но $P'_y = u''_{xy}$, а $Q'_x = u''_{yx}$, следовательно, $u''_{xy}, u''_{yx} \in \mathcal{C}(E)$ и тогда по теореме о равенстве смешанных производных $u''_{xy} = u''_{yx}$, $P'_y = Q'_x$ в E. Оставшиеся соотношения проверяются аналогично.
Достаточность. Для небольшого сокращения выкладок проведём доказательство для двумерного случая. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in E$ является центром шара, а точка $M(x, y) \in E$ — произвольна. Обозначим через $\breve{M_0 M}$ ломанную из 2-х звеньев, $\breve{M_0 M_1}$, где $M_1(x, y_0)$, и $\breve{M_1 M}$, параллельных осям координат. Покажем, что функция $u(x, y) = \int_{\breve{M_0 M}} P dx + Q dy$ является потенциалом векторного поля $\vec{a} = (P, Q)$.
Поскольку $\breve{M_0 M_1} = \{(t, y_0) | t \in [x_0, x]\}$ и $\breve{M_1 M} = \{(x, s) | s \in [y_0, y]\}$, то

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\, ds$$

Найдём u'_x. Фиксируем y: функция $u(x, y)$ как функция переменной x является суммой интеграла с переменным верхним пределом и интеграла, зависящего от параметра x. На основании правил дифференцирования интегралов такого вида

$$\begin{aligned} u'_x(x, y) = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} Q'_x(x, s)\, ds = \quad & (\text{по условию } Q'_x = P'_y) \\ = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} P'_y(x, s)\, ds = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y) & \end{aligned}$$

(воспользовались формулой Ньютона-Лейбница).
Теперь найдём u'_y. Для этого фиксируем x. Тогда функция $u(x, y)$ как функция переменной y является суммой постоянной и интеграла с переменным верхним пределом. Поэтому $u'_y(x, y) = Q(x, y)$.
Наконец, из доказанных равенств и условий теоремы следует, что частные производные функции u непрерывны и, следовательно, $u \in \mathcal{D}(E)$. $\square$

Пример 9.7. *Пусть* $\vec{a} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)$. *Вычислим* $\int_{\Gamma_\rho} \vec{a}\, d\vec{r}$ *по окружности* Γ_ρ *с центром в начале координат, пробегаемой против часовой стрелки.*

Доказательство.

$$P = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}\,,$$

$$Q = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\,.$$

Легко убедиться, что $P'_y = Q'_x$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Но

$$\int_{\Gamma_\rho} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_\rho} \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) - \cos^2 t)\, dt = -2\pi \neq 0$$

□

Определение 9.8. *Область $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ называется* *поверхностно односвязной, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset \mathcal{G}$ существует кусочно-гладкая поверхность $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, краем которой является Γ.*

Определение 9.9. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ называется безвихревым в области $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, если $\operatorname{rot} \vec{a} = 0, \quad \forall (x,y,z) \subset \mathcal{G}$.*

Рассмотрим связь между потенциальностью и безвихревостью векторного поля $\vec{a}$ в области $\mathcal{G}$.

Теорема 9.10. *Пусть $\vec{a} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$. Тогда безвихревость является необходимым, а в случае поверхностной односвязности области $\mathcal{G}$ и достаточным условием потенциальности поля $\vec{a}$ в области $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Необходимость. Если поле $\vec{a}$ потенциально, то циркуляция поля $\vec{a}$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой равна нулю. Отсюда из геометрического определения ротора (также из теоремы 8.4) следует безвихревость поля $\vec{a}$ в области $\mathcal{G}$.
Достаточность. Пусть $\vec{a}$ — безвихревое поле. В силу теоремы о потенциальных полях достаточно показать, что циркуляция по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset \mathcal{G}$ равна нулю. Из поверхностной односвязности области $\mathcal{G}$ следует, что для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset \mathcal{G}$ существует кусочно-гладкая поверхность $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, краем которой является Γ. Из формулы Стокса и безвихревости поля $\vec{a}$ следует, что циркуляция поля $\vec{a}$ по кривой Γ равна нулю:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \underbrace{(\operatorname{rot}\ \vec{a}, \mathbf{\vec{n}})}_{=0}\, ds = \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$$

□

Замечание 9.11. *Из безвихревости поля $\vec{a}$ в поверхностно неодносвязной области не следует потенциальность поля $\vec{a}$.*

Пусть, например, $\vec{a}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$,
$\mathcal{G} = \{(x,y,z) : 1 < x^2+y^2 < 9, z \in \mathbb{R}\}$, $\Gamma = (2\cos t, 2\sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right) = 0\,.$$

Однако $\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\Gamma} \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0\,.$
(см. пример 9.7) $\square$

Рассмотрим необходимые и достаточные условия потенциальности двумерного векторного поля $\vec{a} = (P, Q)$, заданного в области $\mathcal{G}$.

Определение 9.12. *Область $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset \mathcal{G}$ область Ω, ограничиваемая кривой Γ, принадлежит $\mathcal{G}$.*

Теорема 9.13. *Пусть поле $\vec{a} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{G})$. Тогда условие*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{G} \quad (*)$$

является необходимым, а в случае односвязности области $\mathcal{G}$ и достаточным условием потенциальности поля $\vec{a}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть поле $\vec{a}$ потенциально в области $\mathcal{G}$, т.е. $\exists u(x, y) : u'_x = P,\ u'_y = Q$. Так как поле непрерывно дифференцируемо,

$$u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G}) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \text{то есть выполнено } (*).$$

Достаточность. Пусть выполнено $(*)$. Достаточно показать, что циркуляция $\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$, $\forall$ замкнутого кусочно-гладкого контура Γ. В силу односвязности области $\mathcal{G}$ область Ω, ограниченная $\Gamma\,(\partial\Omega = \Gamma)$, $\quad \Omega \subset \mathcal{G}$. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dxdy = 0$$

$\square$

10 Элементы теории поля

Математической теорией поля называется часть математического анализа функцией трёх переменных, в которой рассматриваются утверждения и действия, связанные с понятиями градиента, дивергенции, ротора и некоторых происходящих от них понятий, которые будут введены.

Приведём формальные правила операций с $\operatorname{grad}, \operatorname{div}, \operatorname{rot}$, которые используются при выводе различных соотношений теории поля.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \vec{a}), \quad \vec{a} = (P, Q, R)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Приведём некоторые легко проверяемые соотношения:

1°. Линейность:

$$\operatorname{grad}(\lambda u + \mu v) = \lambda \operatorname{grad} u + \mu \operatorname{grad} v$$

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{div} \vec{a} + \mu \operatorname{div} \vec{b}$$

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{a} + \mu \operatorname{rot} \vec{b}$$

2°. $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$, т.к. $\left(\frac{\partial uv}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right)$.

3°. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$.
На формальном уровне: $(\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = (\nabla, \nabla, \vec{a}) = 0$ как скалярное произведение. Доказательство прямой проверкой:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$
$$= \left(\cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}}\right) + \left(\cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}}\right) + \left(\cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}}\right) = 0.$$

4°. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$.
На формальном уровне: $[\nabla, \nabla u] = 0$ как векторное произведение 2х коллинеарных векторов. Доказательство прямой проверкой:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

5°. $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} u, \vec{a})$.

$$(\nabla, u\vec{a}) = (\nabla_u, u\vec{a}) + (\nabla_{\vec{a}}, u\vec{a}) = (\nabla_u u, \vec{a}) + u(\nabla_{\vec{a}}, \vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u \operatorname{div} \vec{a}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что скалярный множитель в одной из компонент скалярного произведения можно вынести за знак скалярного произведения, а также можно перенести как множитель в другую компоненту. Впрочем данное соотношение легко проверяется непосредственно.

В следующем свойстве аналогичные действие проводятся для векторного произведения:

6°. $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad} u,\, \vec{a}]$.

$$[\nabla,\, u\vec{a}] = [\nabla_u,\, u\vec{a}] + [\nabla_{\vec{a}},\, u\vec{a}] = [\nabla_u u,\, \vec{a}] + u[\nabla_{\vec{a}},\, \vec{a}] = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Аналогично предыдущему данное соотношение проверяется непосредственно.

7°. $\operatorname{div}[\vec{a},\, \vec{b}] = (\vec{b},\, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a},\, \operatorname{rot}\vec{b})$.
На формальном уровне:

$$\begin{aligned}(\nabla,\, [\vec{a},\, \vec{b}]) &= (\nabla_{\vec{a}},\, [\vec{a},\, \vec{b}]) + (\nabla_{\vec{b}},\, [\vec{a},\, \vec{b}]) = \\ &= (\vec{b},\, [\nabla_{\vec{a}},\, \vec{a}]) - (\vec{a},\, [\nabla_{\vec{b}},\, \vec{b}]) = (\vec{b},\, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a},\, \operatorname{rot}\vec{b})\end{aligned}$$

При преобразовании первого слагаемого мы воспользовались тем, что для трёх векторов $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ (здесь $\vec{c} = \nabla_{\vec{a}}$) имеют место равенства

$$(\vec{c},\, [\vec{a},\, \vec{b}]) = (\vec{c},\, \vec{a},\, \vec{b}) = (\vec{b},\, \vec{c},\, \vec{a}) = (\vec{b},\, [\vec{c},\, \vec{a}]),$$

циклическая перестановка в смешанном произведении понадобилась для того, чтобы поставить вектор $\vec{b}$ левее вектора $\vec{c} = \nabla_{\vec{a}}$ (этот дифференциальный оператор не действует на $\vec{b}$). После этого оператор $\nabla_{\vec{a}}$ стоит левее вектора $\vec{a}$, на который он действует. Во втором слагаемом мы воспользовались антикоммутативностью векторного произведения для того, чтобы привести его к виду, аналогичному первому слагаемому.

Введём «новую» операцию, применяемую к дважды непрерывно дифференцируемым скалярным и векторным полям:

$$\triangle = (\nabla,\, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{такой оператор называют \underline{Лапласианом}}$$

Для скалярного поля: $\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Для векторного поля: $\vec{a} = (P, Q, R)$, $\triangle\vec{a} = (\triangle P,\, \triangle Q,\, \triangle R)$.

8°. $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \triangle u$.
Формальная проверка: $(\nabla,\, \nabla u) = (\nabla,\, \nabla)u = \triangle u$.

9°. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \triangle\vec{a}$.
Формальная проверка: $[\nabla,\, [\nabla,\, \vec{a}]] = \nabla(\nabla,\, \vec{a}) - (\nabla,\, \nabla)\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \triangle\vec{a}$.

Здесь мы воспользовались известной из аналитической геометрии формулой: $[\vec{A},\, [\vec{B},\, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A},\, \vec{C}) - (\vec{A},\, \vec{B})\vec{C}$.

Так как произведения скалярных или векторных функций здесь нет, то формула применяется однократно. Здесь $\vec{A} = \vec{B} = \nabla$, $\vec{C} = \vec{a}$.

Символ $(\vec{b},\, \nabla)$, где $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, есть дифференциальный оператор:

$$(\vec{b},\, \nabla) = b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

Его можно применять к стоящим справа от него дифференциальным и векторным функциям. Возникают новые операции.

Если u — дифференцируемое скалярное поле, то скаляр

$$(\vec{b},\, \nabla)u \overset{def}{=} b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + b_3\frac{\partial u}{\partial z}$$

называется градиентом скаляра u по вектору $\vec{b}$.

Выражение $(\vec{b},\, \nabla)u$ можно записать в виде $(\vec{b},\, \operatorname{grad} u)$.

Примером такой операции является *производная дифференцируемой функции u по направлению* $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3)^T$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\alpha}} = \alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial u}{\partial z} = (\vec{\alpha},\, \operatorname{grad} u) = (\vec{\alpha},\, \nabla)u.$$

Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ — дифференцируемое векторное поле, то вектор

$$(\vec{b},\, \nabla)\vec{a} = \begin{pmatrix} b_1\dfrac{\partial a_1}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial a_1}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial a_1}{\partial z} \\ b_1\dfrac{\partial a_2}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial a_2}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial a_2}{\partial z} \\ b_1\dfrac{\partial a_3}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial a_3}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial a_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

называется градиентом вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$.

.