Интеграл Римана по брусу.

Введём обозначения:

$$z_{k,l} = (u_k, v_l) \in P_{kl},$$

$$T^x = \{x_i\}_{i=1}^m\,,\ T^y = \{y_j\}_{j=1}^n\,,$$

множество $T = T^x \times T^y$ называется разбиением бруса P.

$$P_{kl} = [x_{i-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l].$$

Мера бруса P_{kl}:

$$\Delta x_k \Delta y_l = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) = \mu P_{kl}.$$

Определение 1. Интегральной суммой Римана $f(x,y)$, отвечающей размеченному разбиению $(T, \overline{z})$ бруса P, называется выражение:

$$\sigma(f, (T, \overline{z})) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n f(u_k, v_l) \mu P_{kl}.$$

Определение 2. Диаметром рзбиения называется максимальное значение диаметров брусов P_{kl}, т.е.

$$\lambda(T) = \max \operatorname{diam} P_{kl}.$$

Определение 3. Число I называется пределом интегральных сумм Римана функции f, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall (T, \overline{z}) \text{ бруса } P,\ \text{т ч. } \lambda(T) < \delta,\ \forall \overline{z} :$$

$$|\sigma(f, (T, \overline{z})) - I| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$I = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, (T, \overline{z}) =: \iint_P f(x,y) dx dy$$

Теорема 1 (Необходимое условие интегрируемости.)**.** *Пусть* $f \in R[P] \Rightarrow f$ *ограничена на* P.

(*Доказательство аналогично одномерному случаю.*)

Суммы Дарбу.

Обозначим

$$M_{kl} = \sup_{(x,y) \in P_{kl}} f(x,y),$$

$$m_{kl} = \inf_{(x,y) \in P_{kl}} f(x,y),$$

Определение 4. Нижней суммой Дарбу называется выражение:

$$\underline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n m_{kl}\ \mu P_{kl},$$

верхней суммой Дарбу называется выражение:

$$\overline{S}(f, T) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n M_{kl}\ \mu P_{kl}.$$

Свойства сумм Дарбу.

Лемма 1.

$$\underline{S}(f,T) \le \sigma(f,(T,\overline{z})) \le \overline{S}(f,T)$$

Лемма 2. *Пусть T – произвольное разбиение бруса P, тогда*

$$\underline{S}(f,T) = \inf_{\overline{z}} \sigma(f,(T,\overline{z})),$$

$$\overline{S}(f,T) = \sup_{\overline{z}} \sigma(f,(T,\overline{z})).$$

Определение 5. Разбиение $T_1 = T_1^x \times T_1^y$ называется измельчением (продолжением) разбиения $T = T^x \times T^y$, если T_1^x, T_1^y являются измельчениями соответственно T^x, T^y.

Лемма 3. *Если разбиение T_1 является измельчением разбиения T, то*

$$\underline{S}(f,T) \le \underline{S}(f,T_1) \le \overline{S}(f,T_1) \le \overline{S}(f,T).$$

Следствие 1. Для любых разбиений T_1 и T_2 бруса P справедливо неравенство

$$\underline{S}(f,T_1) \le \overline{S}(f,T_2).$$

Лемма 4. *Для произвольного разбиения T бруса P*

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \omega(f,P_{kl})\mu P_{kl},$$

где

$$\omega(f,P_{kl}) = \sup_{(x',y'),\ (x,y)\in P_{kl}} |f(x',y') - f(x,y)|.$$

Как и в одномерном случае

$$\omega(f,P_{kl}) = M_{kl} - m_{kl}.$$

Теорема 2. *Функция $f:\ P \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ f – ограничена на P и*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall T \text{ бруса } P,\ \text{т ч. } \lambda(T) < \delta :$$

$$\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T) < \varepsilon.$$

Множества меры нуль по Лебегу.

Определение 6. Множество E называется множеством меры 0 по Лебегу, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счётная система открытых брусов, т. ч.

1. $E \subset \cup_k P_k$,
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(P_k) < \varepsilon$.

Пример 1. Любое не более чем счётное множество является множеством меры 0 по Лебегу.

Доказательство. Пусть $E = \{q_1, q_2, \dots\}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0\ \exists P_k \ni q_k,\ \mu(P_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(P_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon.$$

□

Пример 2.

Лемма 1. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \in C[a,b]$, *тогда график* $\Gamma_f = \{(x,y), a \leq x \leq b,\ y = f(x)\}$ *имеет лебегову меру* 0.

Теорема 3. 1. *Любое подмножество меры нуль является множеством меры нуль.*

2. *Объединение конечного или счётного множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

Доказательство. Докажем 2. Пусть E_j – множества меры нуль.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_k^{(j)} :\ E_j \subset \cup_k P_k^{(j)},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(P_k^{(j)}) < \frac{\varepsilon}{2^j},$$

тогда счётная система $P_k^{(j)}$, такая что:

$$\cup_j E_j \subset \cup_j (\cup_k P_k^{(j)})$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(P_k^{(j)}) < \varepsilon \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} = \varepsilon.$$

□

Определение 7. Некоторое свойство имеет место почти всюду (п.в.) на множестве E, если подмножество $E_1 \subset E$, на котором это свойство не выполняется имеет лебегову меру нуль.

Теорема 4 (критерий Лебега интегрируемости на брусе)**.** $f \in R[P] \Leftrightarrow f$ *ограичена на* P *и непрерывна п.в. на* P.

Определение 8. Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется допустимым, если оно ограничено и его граница ∂E есть множество меры нуль.

Интеграл Римана по множеству.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, E – ограниченное множество. Введём функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x),\ \text{если } x \in E, \\ 0,\ \text{если } x \notin E. \end{cases} \qquad (*)$$

Выясним, как связаны точки разрыва функций $f(x)$ и $f_0(x)$. Пусть $E_d(f)$ – множество точек разрыва f, $\mathbb{R}^2_d(f_0)$ – множество точек разрыва $f_0(x)$. Ясно, что любая точка разрыва f является точкой разрыва f_0:

$$E_(f) \subset \mathbb{R}^2_d(f_0).$$

$f_0(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{E}$, слдовательно, дополнительные точки разрыва могут возникнуть лишь на ∂E:

$$E_d(f) \subset \mathbb{R}^2_d(f_0) \subset E_d(f) \cup \partial E.$$

Определение 9. Функция f интегрируема по ограниченному множеству E, если для некоторого бруса $P \supset E$, функция $f_0(x)$ интегрируема на брусе P. При этом

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_P f_0(x,y)dxdy.$$

Корректность определения.

Теорема 5. *Пусть замкнутые брусы P_1 и P_2 содержат множество E, тогда*

$$\iint_{P_1} f_0(x,y)dxdy = \iint_{P_2} f_0(x,y)dxdy.$$

Доказательство. Рассмотрим брус $P = P_1 \cap P_2$:

1. P – замкнут,

2. $E \subset P = P_1 \cap P_2$

3. Т.к. P – замкнут, то $\overline{E} = E \cup \partial E \subset P$.

4. Т.к. $P_d(f_0) = \mathbb{R}^2_d(f_0) \subset E_d(f) \cup \partial E \subset \overline{E}$

множество точек разрыва $f_0(x,y)$ содержится в каждом из трёх брусов. Отсюда, по критерию Лебега, инегралы от $f_0(x,y)$ по брусам P_1, P_2, P существуют или не существуют одновременно.

Пусть интегралы существуют. Докажем, что они равны. Любое разбиение P порождает соответствующие разбиения P_1 и P_2. Т.к. вне бруса P $f_0(x) = 0$, то интегральные суммы Римана, отвечающие разбиениям P, P_1, P_2 совпадают.

Устроим измельчение разбиений так, чтобы

1. Диаметры разбиений $\lambda(T_1)$ и $\lambda(T_2)$ не превосходили $\lambda(T)$.

2. Полученные разбиения $T_1(P_1)$ и $T_2(P_2)$ являлись измельчениями разбиений, порождённых разбиением T бруса P.

При этом все слагаемые интегральных сумм Римана для $T(P)$ являются слагаемыми и для интегральных сумм, соответствующих разбениям $T_1(P_1)$ и $T_2(P_2)$. В результате все интегральные суммы оказываются равными. Предельный переход при $\lambda(T) \to 0$ завершает доказательство. □

Свойства кратного интеграла Римана.

1. Линейность интеграла.
Если $f,\ g \in R(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *— произвольно, то*

$$\lambda f \in R(E),\ \ f+g \in R(E)$$

и

$$\iint_E \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_E f(x,y)dxdy,$$

$$\iint_E \left(f(x,y)+g(x,y)\right)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy + \iint_E g(x,y)dxdy.$$

Доказательство. Так как $f,\ g \in R(E)$, то $f,\ g$ ограничены на E, следовательно, ограничены $\lambda f,\ f+g$.

Далее, обозначим через $E_c(f)$ множество точек непрерывности функции f, тогда справедливы соотношения:

$$E_c(f) \subseteq E_c(\lambda f),$$

$$E_c(f) \cap E_c(g) \subseteq E_c(f+g).$$

Соответственно, для множеств точек разрыва $E_d(f) = E \backslash E_c(f)$ функции f:

$$E_d(\lambda f) = E \backslash E_c(\lambda f) \subseteq E \backslash E_c(f) = E_d(f),$$

$$E_d(f+g) = E \backslash E_c(f+g) \subset E \backslash (E_c(f) \cap E_c(g)) = E \backslash E_c(f) \cup E \backslash E_c(g) = E_d(f) \cup E_d(g).$$

Из интегрируемости функций f и g, по критерию Лебега, следует, что множества $E_d(f)$ и $(E_d(g)$ имеют нулевую лебегову меру, следовательно, в силу полученных соотношений, $E_d(\lambda f)$ и $E_d(f+g)$ также являются множествами лебеговой меры нуль.

Докажем равенства интегралов. Рассмотрим прямоугольник $P \supset E$. Спарведливо

$$\iint_E \lambda f(x,y)dxdy = \iint_P \lambda f_0(x,y)dxdy = \lambda \iint_P f_0(x,y) = \iint_E f(x,y)dxdy,$$

где f_0 определена $(*)$. Аналогично,

$$\iint_E (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_P (f_0(x,y)+g_0(x,y))dxdy = \iint_P f_0(x,y)dxdy + \iint_P g_0(x,y)dxdy =$$

$$= \iint_E f(x,y)dxdy + \iint_E g(x,y)dxdy.$$

□

2. $f,\ g \in R(E)$, *тогда* $fg \in R(E)$.

Доказательство. Утверждение следует из критерия Лебега. fg — ограничено на E, поскольку ограничены f и g на E. $E_c(f) \cap E_c(g) \subset E_c(fg)$, следовательно,

$$E_d(fg) \subset E_d(f) \cup E_d(g),$$

отсюда следует, что множество $E_d(fg)$ имеет нулевую лебегову меру. □

3. *Если* $f \in R(E)$, *то* $|f| \in R(E)$ *и*

$$|\iint_E f(x,y)fxdy| \leq \iint_E |f(x,y)|dxdy.$$

Доказательство.

$$E_c(f) \subset E_c(|f|),$$

следовательно,

$$E_d(|f|) \subset E_d(f),$$

значит $|f|$ непрерывна почти всюду на E. В силу ограниченности f $|f|$ ограничена, следовательно $|f| \in R(E)$, по критерию Лебега.

Для бруса $P \subset E$ имеем:

$$\left|\iint_E f(x,y)dxdy\right| = \left|\iint_P f_0(x,y)dxdy\right| \leq \iint_P |f_0(x,y)|dxdy = \iint_E |f(x,y)|dxdy,$$

где $f_0(x,y)$ определена $(*)$. □

4. (интеграл и неравенства)*Пусть* $f \in R(E)$ *и для любой точки* $(x,y) \in E$, $f(x,y) \geq 0$, *тогда*

$$\iint_E f(x,y)dxdy \leq 0.$$

Доказательство. Если $f \geq 0$ на E, тогда $f_0 \geq 0$ на любом брусе $P \supset E$, тогда

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_P f_0(x,y)dxdy \geq 0,$$

в силу свойств интеграла по брусу. □

Следствие 1. *Пусть* f, $g \in R(E)$ *и* $f \geq g$ *на* E. *Тогда*

$$\iint_E f(x,y)dxdy \leq \iint_E g(x,y)dxdy.$$

Следствие 2. *Пусть* $f \in R(E)$ *и* $\forall (x,y) \in E$: $m \leq f(x,y) \leq M$*б тогда*

$$m\mu(E) \leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq M\mu(E).$$

Следствие 3. *Пусть* $f \in R(E)$. *Если* $\mu(E) = 0$, *то* $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$.

5. (теорема о среднем) *Пусть* f, $g \in R(E)$, $g \geq 0$ *на* E, $m = \inf_E f(x,y)$, $M = \sup_E f(x,y)$, *тогда* $\exists \theta \in [m,\ M]$, *т ч.*

$$\iint_E f(x,y)g(x,y)dxdy = \theta \iint_E g(x,y)dxdy.$$

Доказательство. Доказательство аналогично одномерному случаю. □

Следствие. *Е*сли предположить, что E — линейно связный компакт и $f \in C(E)$, то $\exists (x_0,y_0) \in E$, т. ч.

$$\iint_E f(x,y)g(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\iint_E g(x,y)dxdy.$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о среднем и свойств непрерывных функций. □

6. (интегрируемость по измеримым подмножествам) *Если $f \in R(E)$, $D \subset E$, D — измеримо по Жордану, то $f \in R(D)$.*

Доказательство. Пусть $f_{|D}$ — сужение функции f на D. Очевидно

$$D_d(f) \subset E_d(f)$$

, следовательно, $D_d(f)$ имеет нулевую лебегову меру. Поскольку f ограничено на E, то и на D f также ограничена. Следовательно, по критерию Лебега $f_{|D} \in R(D)$. □

7. (аддитивность интеграла)*Пусть множества E_1 и E_2 измеримы по Жордану, $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in R(E_1)$, $f \in R(E_2)$, то $f \in R(E_1 \cup E_2)$, $f \in R(E_1 \cap E_2)$. При этом*

$$\iint_{E_1 \cup E_2} f dxdy \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy - \iint_{E_1 \cap E_2} f(x,y)dxdy$$

и если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то

$$\iint_{E_1 \cup E_2} f dxdy \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy$$

Доказательство. Множества $E_1 \cup E_2$ и $E_1 \cap E_2$ измеримы по Жордану. Поскольку $E_1 \cap E_2 \in E_1$, то из свойства 6 следует, что $f \in R(E_1 \cap E_2)$.

Любая точка разрыва x функции f в $E_1 \cup E_2$, $x \in (E_1 \cup E_2)_d(f)$ лежит либо в E_1, либо в E_2, причём эта точка либо является внутренней точкой для одного из этих множеств, тогда $x \in E_{1d}(f) \cup E_{2d}(f)$, либо граничной точкой этих множеств. Тогда

$$(E_1 \cup E_2)_d(f) \subset E_{1d} \cup E_{2d} \cup \partial E_1 \cup \partial E_2,$$

отсюда следует, что лебегова мера $(E_1 \cup E_2)_d(f)$ равна нулю. Более того, ввиду ограниченности f на E_1 и E_2, f ограничена на $E_1 \cup E_2$, следовательно, $f \in R(E_1 \cup E_2)$ по критерию Лебега.

Пусть $f_0 \equiv f$ на $E_1 \cup E_2$ и равна 0 вне этого множества. Справедливо

$$f_0 = f_0 \chi_{E_1} + f_0 \chi_{E_2} - f_0 \chi_{E_1 \cap E_2} \qquad (**).$$

Действительно,

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1) \cup (E_1 \cap E_2).$$

На каждом из множеств в правой части последнего равенства равенство $(**)$ выполняется.

На брусе $P \supset E_1 \cup E_2$ имеем:

$$\iint_{E_1 \cup E_2} f dxdy = \iint_P f_0 dxdy =$$

$$= \iint_P (f_0 \chi_{E_1}(x,y) + f_0 \chi_{E_2}(x,y) - f_0 \chi_{E_1 \cap E_2}(x,y))dxdy =$$

$$\iint_P f_0\chi_{E_1}(x,y)dxdy + \iint_P f_0\chi_{E_2}(x,y)dxdy - \iint_P f_0\chi_{E_1\cap E_2}(x,y)dxdy =$$
$$= \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy - \iint_{E_1\cap E_2} f(x,y)dxdy.$$
Если при этом, если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то $\iint_{E_1\cap E_2} f(x,y)dxdy = 0$. □

Следствие.(монотонность интеграла)*Пусть $f \in R(E)$, $D \subset E$, D измеримо по Жордану. Если $f \geq 0$ на E, то*
$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_E f(x,y)dxdy.$$

Доказательство.
$$E = E\backslash D \cup D.$$
По свойству аддитивности интеграла,
$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E\backslash D} f(x,y)dxdy + \iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D f(x,y)dxdy,$$
так как $\iint_{E\backslash D} f(x,y)dxdy \geq 0$, по свойству 4. □

8. (положительность интеграла) *Пусть $f \in R(E)$, $f(x,y) \geq 0$ на E. Если существует внутренняя точка (x_0,y_0) множества E, т. ч. $f \in C((x_0,y_0))$ и $f(x_0,y_0) > 0$, то $\iint_E f(x,y)dxdy > 0$.*

   Доказательство. По условию, найдётся шар $B \subset E$ с центром в точке (x_0,y_0), т. ч. $\forall(x,y) \in B: \ f(x,y) \geq 1/2f(x_0,y_0) > 0$. Шар измерим по Жордану, следовательно, по свойству монотонности интеграла
   $$\iint_E f(x,y)dxdy \geq \iint_B f(x,y)dxdy \geq \frac{1}{2}f(x_0,y_0)\mu(B) > 0.$$
   □

Следствие. (об обращении в нуль подынтегральной функции)*Пусть $f \in R(E)$ и $f \geq 0$ на E. Если $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$, то $f = 0$ на E почти всюду.*

Доказательство. Если множество E не имеет внутренних точек, то есть $E \subset \partial E$, то E имеет нулевую лебегову меру, следовательно, любое свойств f, которое выполняется на E, выполняется почти всюду.

Пусть множество внутренних точек E не пусто. В силу критерия Лебега, $\exists E_1 \subset E : f \in C(E_1)$, причём лебегова мера $E\backslash E_1$ равна нулю. Отсюда $\hat{E} = E\backslash E_1 \cup \partial E$ имеет нулевую лебегову меру. Покажем, что для любого $(x,y) \in E\backslash\hat{E}$ $f(x,y) = 0$.

Предположим противное: $\exists(x_0,y_0) \in E\backslash\hat{E}$, т. ч. $f(x_0,y_0) > 0$. По построению, множество $E\backslash\hat{E}$ состоит из внутренних точек, в которых $f(x,y)$ непрерывна. В силу свойства 8:
$$\iint_E f(x,y)dxdy \geq \iint_{E\backslash\hat{E}} f(x,y)dxdy > 0$$
противоречие. □