1 Дифференциальные формы и общая теорема Стокса. (Элементарное введение)

Более подробное изложение данного вопроса приведено в

- А. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков гл. 21, лекции 16–17
- В. Рудин "Основы математического анализа"

Определение. Пусть G — измеримая область в $\mathbb{R}^m$, отображение $\bar{r} : \bar{G} \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо, и для любой точки $\bar{u} \in \bar{G}$ матрица Якоби $D\bar{r}(\bar{u})$ имеет ранг m.

Тогда множество $S = \bar{r}(\bar{G})$ называется *m-мерным гладким многообразием* в $\mathbb{R}^m$. *Краем многообразия* называется образ границы области G: $\partial S = \bar{r}(\partial G)$.

Например, гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ является одномерным гладким многообразием, простая гладкая поверхность является двумерным гладким многообразием в $\mathbb{R}^3$, измеримая область в $\mathbb{R}^n$ является n-мерным гладким многообразием в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть для любого упорядоченного набора индексов $i_1, \ldots, i_m$, где каждый индекс $i_j \in 1, \ldots, m$ определена функция $a_{i_1 \ldots i_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на $\mathbb{R}^n$ определена *дифференциальная форма порядка m* :

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1 \ldots i_m}(x) dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}. \tag{1}$$

Функции $a_{i_1 \ldots i_m}$ называются *коэффициентами дифференциальной формы ω*.

Определение. *Интегралом* $\int\limits_S \omega$ от дифференциальной формы (1) по гладкому многообразию $S = \bar{r}(\bar{G})$ называется кратный интеграл по области G :

$$\int\limits_S \omega = \int \cdots \int\limits_G F(\bar{u}) du_1 \ldots du_m,$$

где

$$F(\bar{u}) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1 \ldots i_m}(\bar{r}(\bar{u})) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}{\partial(u_1, \ldots, u_m)},$$

$$\frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}{\partial(u_1, \ldots, u_m)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{i_m}}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{i_m}}{\partial u_m} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\bar{r}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} x_1(\bar{u}) \\ \vdots \\ x_m(\bar{u}) \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Заметим, что если коэффициенты дифференциальной формы ω непрерывны, то интеграл $\int\limits_S \omega$ по гладкому многообразию существует.

Поскольку при перестановке индексов $i_j \leftrightarrow i_k,\ j \neq k$ якобиан (2) меняет знак, то при перестановке этих индексов в дифференциальной форме ω интеграл $\int\limits_S \omega$ по любому гладкому многообразию S изменит знак. Потому считается, что при перестановке дифференциалов независимых переменных дифференциальная форма $a_{i_1\ldots i_m}(x)dx_{i_1}\ldots dx_{i_m}$ меняет знак. Например, $dx_1dx_2 = -dx_2dx_1$. Отсюда также следует, что если дифференциальная форма $a_{i_1\ldots i_m}(x)dx_{i_1}\ldots dx_{i_m}$ содержит несколько дифференциалов одной и той же независимой переменной, то эта дифференциальная форма равна 0. Например, $dx_1dx_1dx_2 = 0$.

Примеры.

1) Криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_\Gamma a_1(\bar{x})dx_1 + \cdots + a_n(\bar{x})dx_n$ по гладкой кривой $\Gamma = \{\bar{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ является интегралом от дифференциальной формы $\omega = \sum\limits_{i=1}^n a_i(\bar{x})dx_i$ первого порядка. Действительно,

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\bar{r}(t))\frac{\partial x_i}{\partial t}dt = \int\limits_\Gamma a_1(\bar{x})dx_1 + \cdots + a_n(\bar{x})dx_n.$$

2) Пусть $\bar{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S (\bar{a}(x,y,z), d\bar{S}) = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

по простой гладкой поверхности $S = \bar{r}(\bar{G}) \subset \mathbb{R}^3$, является интегралом от дифференциальной формы второго порядка $\omega = P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$. Действительно,

$$\int\limits_S \omega = \iint\limits_G \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_G \det\begin{pmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} dudv = \iint\limits_S (\bar{a}(x,y,z), d\bar{S}).$$

Определение. Дифференциалом от дифференциальной формы

$$\omega = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1\ldots i_m}(x)dx_{i_1}\ldots dx_{i_m}.$$

порядка m с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами $a_{i_1\ldots i_m}$ называется дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial a_{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_j}dx_j dx_{i_1}\ldots dx_{i_m}$$

порядка $m+1$.

Теорема 1 (Общая теорема Стокса). *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма ω порядка m. Пусть S — гладкое $m+1$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, краем которого является* *кусочно-гладкое m-мерное многообразие ∂S^+, ориентированное согласованно с ориентацией многобразия S. Тогда справедлива общая формула Стокса:*

$$\int\limits_{\partial S^+} \omega = \int\limits_{S} \partial\omega \tag{3}$$

Мы не будем рассматривать общее понятие ориентации гладкого многообразия и её согласованность с ориентацией края многообразия. Это предмет аккуратного изложентия геометрических кафедр. Покажем, однако, что формулы Стокса и Грина являются частными (но важнейшими!) случаями формулы (3).

Формула Гаусса-Остроградского. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3_{xyz}$ дифференциальную форму второго порядка:

$$\omega = P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\omega = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + (Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dy + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dz = \\ = (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy = (\operatorname{rot}\bar{a}, d\bar{S}), \end{aligned}$$

где

$$\bar{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}, \quad d\bar{S} = \begin{pmatrix} dydz \\ dzdx \\ dxdy \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (3) для дифференциальной формы (4) для простой гладкой поверхности S (двумерного гладкого многообразия в $\mathbb{R}^3_{xyz}$) получаем доказанную ранее формулу Стокса

$$\int\limits_{\partial S^+} (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_{S} (\operatorname{rot}\bar{a}, d\bar{S}).$$

Формула Грина. Применим формулу (3) для дифференциальной формы $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ и для двумерного гладкого многообразия (то есть для измеримой области) $S = G \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$. Так как $d\omega = (Q'_x - P'_y)dxdy$, то формула (3) дает формулу Грина

$$\int\limits_{dG^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{G} (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))dxdy.$$