МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ

Специальность: математика 010101

Квалификация (степень) выпускника: специалист

Форма обучения: очная, дневная

Авторы: проф. Лукашенко Т.П., доц. Родионов Т.В.

Москва
2013

I. Название дисциплины: Математический анализ

II. Цели и задачи дисциплины:

А. Цели дисциплины:

Формирование математической культуры студентов, фундаментальная подготовка студентов в области математического анализа, овладение современным аппаратом математического анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Б. Задачи дисциплины:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

1) знать основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

2) уметь доказывать утверждения математического анализа, решать задачи математического анализа, уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

III. Место дисциплины / практики в структуре ООП:

Б. Информация о месте дисциплины в учебном плане: Дисциплина «Математический анализ» включена в базовую часть профессионального цикла, является базовой дисциплиной в освоении математических знаний. Освоение математического анализа необходимо для изучения всех дисциплин высшей математики и механики

— 1, 2 курс;
— 1 – 4 семестр.

В. Перечень дисциплин, которые должны быть освоены для начала освоения и параллельно данной дисциплине: Аналитическая геометрия, линейная алгебра.

Г. Общая трудоемкость: ___________ академических часа.

Д. Формы промежуточной аттестации: зачет и экзамен в каждом семестре.

IV. Формы проведения занятий:

— форма занятий с указанием суммарной трудоемкости по каждой форме:
  аудиторная работа, лекции – 272 часов;
  аудиторная работа, семинары – 256 часов;
  самостоятельная работа – 528 часов; (*см. учебный план*)
— формы текущего контроля: домашние задания, контрольные работы, коллоквиумы.

V. Распределение трудоемкости по разделам и темам, а также формам проведения занятий с указанием форм текущего контроля и промежуточной аттестации

ПО НЕДЕЛЯМ :

№ п/п	**Наименование разделов и тем дисциплины**	**Трудоемкость (в ак. часах) по формам занятий**			**Формы контроля**
		Аудиторная работа (с разбивкой по формам и видам)		***Самостоятельная работа***	
		Лекции	***Семинары***		
1	Тема 1. Множества и операции над ними.	12		12	Домашнее задание

2	Тема 2. Эскизы графиков функций.		14	14	Контрольная работа №1.1
3	Тема 3. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Предел последовательности и его свойства. Числовые ряды. Два определения предела функции, их эквивалентность. Свойства предела функции.	24	10	34	Домашнее задание Коллоквиум №1
4	Тема 4. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства; теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора.	8	16	24	Домашнее задание Контрольная работа №1.2
5	Тема 5. Производная, касательная, дифференциал их связи. Формула Тейлора с различными формами остаточного члена. Ряды Тейлора.	8	12	20	Домашнее задание Контрольная работа №1.3
6	Тема 6. Достаточные условия локального экстремума. Выпуклость, точки перегиба.	12	10	22	Домашнее задание Контрольная работа №1.4
7	Тема 7. Первообразная и обобщенная первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.	8	14	22	Домашнее задание Контрольная работа №2.1
8	Тема 8. Определенные интегралы Римана и Курцвейля-Хенстока.	6	10	16	Домашнее задание
9	Тема 9. Верхняя мера Лебеге и ее свойства. Множества меры нуль по Лебегу. Интегрируемость ограниченных и непрерывных почти всюду функций по Риману.	4		4	Домашнее задание
10	Тема 10. Два определения измеримых на отрезке функций, их эквивалентность.	12		12	Домашнее задание

	Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку ограниченных измеримых функций. Интеграл с переменным верхним пределом Дифференцируемость в точке. Существование первообразных и обобщенных первообразных. Теоремы Витали. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля-Хенстока с переменным верхним пределом.				
11	Тема 11. Определенные интегралы Римана-Стилтьеса и Курцвейля-Хенстока-Стильтьеса	16	10	26	Домашнее задание Коллоквиум №2
12	Тема 12. Несобственные интегралы.	4	12	16	Домашнее задание
13	Тема 13. Приложения определённого интеграла.		12	12	Домашнее задание Контрольная работа №2.2
14	Тема 14. Метрические и нормированные пространства.	4		4	Домашнее задание
15	Тема 15. Предел функции и его свойства в метрических и нормированных пространствах. Непрерывные функции и их свойства в метрических и нормированных пространствах.	6		6	Домашнее задание
16	Тема 16. Дифференцируемость отображений нормированных пространств. Дифференцируемость функций нескольких переменных.	6	8	14	Домашнее задание
17	Тема 17. Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в	6	8	14	Домашнее задание Контрольная работа №2.3

	форме Лагранжа, Пеано и интегральной. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.				
18	Тема 18. Числовые ряды.	8	10	18	Домашнее задание
19	Тема 19. Бесконечные произведения.	6	8	14	Домашнее задание Контрольная работа №3.1
20	Тема 20. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.	12	12	24	Домашнее задание Коллоквиум №3
21	Тема 21. Степенные ряды на комплексной плоскости.	4	8	12	Домашнее задание
22	Тема 22. Функции, зависящие от параметра.	6		6	Домашнее задание
23	Тема 23. Собственные интегралы с параметром.	10	24	34	Домашнее задание Контрольная работа №3.2
24	Тема 24. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы.	6		6	Домашнее задание
25	Тема 25. Измеримые функции и их свойства. Свойства интегрируемых по Курцвейлю-Хенстоку функций. Гильбертовы пространства функций, интегрируемых с квадратом на отрезке и на всей прямой.	8		8	Домашнее задание
26	Тема 26. Свертка и ее свойства на R и в периодическом случае.	4		4	Домашнее задание
27	Тема 27. Тригонометрические ряды Фурье и их свойства.	8	10	18	Домашнее задание Контрольная работа №3.3
28	Тема 28. Кратный интеграл Римана. Несобственный кратный интеграл.	30	20	50	Домашнее задание Контрольная работа №4.1

					Коллоквиум
29	Тема 29. Криволинейные интегралы I и II рода. Векторные поля.	18	22	40	Домашнее задание Контрольная работа №4.2
30	Тема 30. Пространство, сопряженное к n-мерному пространству. Антисимметричные билинейные и полилинейные формы и их свойства. Внешнее произведение. Дифференциальные формы.	16	6	22	Домашнее задание
	Итого:	272	256	528	

VI. Содержание дисциплины - аудиторная и самостоятельная работа:

Тема 1.
Заголовок. Множества и операции над ними.
Содержание. *Множества и операции над ними. Свойства операций над множествами. Законы Моргана. Декартово произведение множеств и его свойства. Натуральные, целые и рациональные числа, их свойства. Аксиоматика действительных чисел. Бесконечные десятичные дроби как модель действительных чисел. Их эквивалентность. Эквивалентные множества. Счетные множества и их свойства. Несчетные множества. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.*
лекции: 6
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, подготовка к коллоквиуму.

Тема 2.
Заголовок. Эскизы графиков функций.
Содержание. *Эскизы графиков функций.*
лекции:
семинары: 14
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 3.
Заголовок. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Предел последовательности и его свойства. Числовые ряды. Два определения предела функции, их эквивалентность. Свойства предела функции.
Содержание. *Открытые и замкнутые множества и их свойства. Теоремы о конечных подпокрытиях и о существовании предельной точки. Предел последовательности и его свойства. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число «е». Критерий Коши сходимости последовательности. Частичные пределы последовательности и их свойства. Числовые ряды.*

Два определения предела функции, их эквивалентность. Свойства предела функции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и их свойства. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Предел функции по базе и его свойства.
лекции: 24
семинары: 10
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 4.
Заголовок. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства; теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора.
Содержание. *Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства; теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора. Теорема об обратной функции. Модуль непрерывности. Элементарные функции, их свойства. Замечательные пределы.*
лекции: 16
семинары: 16
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 5.
Заголовок. Производная, касательная, дифференциал их связи. Формула Тейлора с различными формами остаточного члена. Ряды Тейлора.
Содержание. *Производная, касательная, дифференциал их связи. Правила вычисления производных. Производные элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши и Бонне. Следствия теоремы Лагранжа. Свойства производной. Правила Лопиталя. Формула Тейлора с различными формами остаточного члена. Ряды Тейлора. Разложения некоторых элементарных функций.*
лекции: 8
семинары: 12
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 6.
Заголовок. Достаточные условия локального экстремума. Выпуклость, точки перегиба.
Содержание. *Достаточные условия локального экстремума. Глобальные экстремумы функции на отрезке. Выпуклость, точки перегиба. Свойства выпуклых функций. Неравенство Иенсена. Свойства односторонних производных выпуклых функций. Условия выпуклости. Приложения производной (в т.ч. раскрытие неопределённостей, исследование и график функции, задачи на экстремум).*
лекции: 12
семинары: 10
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 7.
Заголовок. Первообразная и обобщенная первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

Содержание. *Первообразная и обобщенная первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Основные неопределенные интегралы. Интегрирование рациональных дробей, различных иррациональностей, тригонометрических и некоторых других выражений.*
лекции: 8
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 8.
Заголовок. Определенные интегралы Римана и Курцвейля-Хенстока.
Содержание. *Определенные интегралы Римана и Курцвейля-Хенстока. Основная лемма о существовании разбиений. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости. Интегрируемость на подотрезках. Необходимое ксловие интегрируемости по Риману. Аддитивность интегралов по отрезкам. Интегрируемость производных по по Курцвейлю-Хенстоку. Формула Ньютона-Лейб-ница и следствия из нее.*
лекции: 6
семинары: 10
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 9.
Заголовок. Верхняя мера Лебеге и ее свойства. Множества меры нуль по Лебегу. Интегрируемость ограниченных и непрерывных почти всюду функций по Риману.
Содержание. *Верхняя мера Лебеге и ее свойства. Множества меры нуль по Лебегу. Интегрируемость ограниченных и непрерывных почти всюду функций по Риману. Ограниченность и непрерывность почти всюду интегрируемых по Риману функций. Критерий Лебега интегрируемости по Риману и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.*
лекции: 4
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, подготовка к коллоквиуму.

Тема 10.
Заголовок. Два определения измеримых на отрезке функций, их эквивалентность. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку ограниченных измеримых функций. Интеграл с переменным верхним пределом Дифференцируемость в точке. Существование первообразных и обобщенных первообразных. Теоремы Витали. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля-Хенстока с переменным верхним пределом.
Содержание. *Два определения измеримых на отрезке функций, их эквивалентность. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку ограниченных измеримых функций. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку функции, равной нулю почти всюду. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности на промежутке. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных и обобщенных первообразных.*
Слабая и сильная леммы Колмогорова-Сакса-Хенстока. Непрерывность интегралов с переменным верхним пределом. Покрытие в смысле Витали. Теоремы Витали. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля-Хенстока с переменным верхним пределом. Неравенство Чебышёва.
лекции: 12

семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, подготовка к коллоквиуму.

Тема 11.
Заголовок. Определенные интегралы Римана-Стилтьеса и Курцвейля-Хенстока-Стильтьеса.
Содержание. *Определенные интегралы Римана-Стилтьеса и Курцвейля-Хенстока-Стильтьеса; их простейшие свойства. Критерии Коши интегрируемости по Риману-Стилтьесу и по Курцвейлю-Хенстоку-Стилтьесу. Интегрируемость на подотрезках. Аддитивность интегралов Стилтьеса по отрезкам. Функции ограниченной вариации и их свойства. Функции ограниченной вариации как разность неубывающих функций. Интегрируемость в смысле Римана-Стилтьеса непрерывных функций по функциям ограниченной вариации. Интегрирование по частям в интеграле Римана-Стилтьеса. Сведение интеграла Римана-Стилтьеса к интегралу Римана. Интегрирование по частям для интеграла Римана. Сведение интеграла Курцвейля-Хенстока к интегралу Римана-Стилтьеса. Сохранение интегрируемости по Курцвейлю-Хенстоку при умножении на функции ограниченной вариации. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Первая и вторая теоремы о среднем.*
лекции: 16
семинары: 10
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 12.
Заголовок. Несобственные интегралы.
Содержание. *Несобственные интегралы. Теорема Хаке о совпадении на отрезке собственного и несобственного интегралов Курцвейля-Хенстока. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости.*
лекции: 4
семинары: 12
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 13.
Заголовок. Приложения определённого интеграла.
Содержание. *Приложения определённого интеграла (в т.ч. вычисление площадей областей, объёмов тел вращения).*
лекции:
семинары: 12
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 14.
Заголовок. Метрические и нормированные пространства.
Содержание. *Метрические и нормированные пространства. N-мерное пространство***,** *норма и метрика в нем, открытые и замкнутые множества, их свойства. Критерий компактности в n-мерном пространстве. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки. Последовательности в метрических, нормированных*

*пространствах и в n-мерном пространстве**,** их пределы, свойства. Полные метрические пространства. Принцип вложенных замкнутых шаров. Полнота в n-мерном пространстве**.***
лекции: 4
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, подготовка к коллоквиуму.

Тема 15.
Заголовок. Предел функции и его свойства в метрических и нормированных пространствах. Непрерывные функции и их свойства в метрических и нормированных пространствах.
Содержание. *Предел функции и его свойства в метрических и нормированных пространствах. Непрерывные функции и их свойства в метрических и нормированных пространствах. Принцип сжимающих отображений. Связные множества в метрических и нормированных пространствах и их свойства. Путь, длина пути и ее свойства в метрических, нормированных пространствах и в n-мерном пространстве**.***
лекции: 6
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 16.
Заголовок. Дифференцируемость отображений нормированных пространств. Дифференцируемость функций нескольких переменных.
Содержание. *Дифференцируемость отображений нормированных пространств. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент. Правила дифференцирования. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Равенство смешанных производных.*
лекции: 6
семинары: 8
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 17.
Заголовок. Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, Пеано и интегральной. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.
Содержание. *Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, Пеано и интегральной. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия его существования. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявных функций. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа его отыскания.*
лекции: 6
семинары: 8
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 18.

Заголовок. Числовые ряды.
Содержание. *Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости. Ряды с неотрицательными членами.Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения. Признаки Д'Аламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена, Куммера, Раабе и Гаусса. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак Лейбница. Последовательности ограниченной вариации и их свойства. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса.*
лекции: 8
семинары: 10
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 19.
Заголовок. Бесконечные произведения.
Содержание. *Бесконечные произведения. Условия сходимости. Разложение функции* sin(*x*) *в бесконечное произведение. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых по Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.*
лекции: 6
семинары: 8
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 20.
Заголовок. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.
Содержание. *Критерий Маркова-Гордона перестановки предельных переходов. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Операции с равномерной сходимостью. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Дини, Лейбница, Абеля и Дирихле равномерной сходимости. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из нее. Полнота пространства* ***C(K)*** *непрерывных на компакте функций. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.*
Критерий компактности Хаусдорфа. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля-Асколи.
лекции: 12
семинары: 12
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 21.
Заголовок. Степенные ряды на комплексной плоскости.
Содержание. *Степенные ряды на комплексной плоскости. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля. Функции комплексного переменного. Формула Эйлера.*
лекции: 4

семинары: 8
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием.

Тема 22.
Заголовок. Функции, зависящие от параметра.
Содержание. *Функции, зависящие от параметра; равномерное стремление к пределу, связь с равномерной сходимостью последовательностей. Критерий Коши. Свойства равномерной сходимости. Перестановка пределов, дифференцирование и интегрирование функций, зависящих от параметра.*
лекции: 6
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием.

Тема 23.
Заголовок. Собственные интегралы с параметром.
Содержание. *Собственные интегралы с параметром. Их свойства: переход к пределу, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость. Несобственные интегралы с параметром, их равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Дини, Абеля и Дирихле. Свойства несобственных интегралов с параметром: переход к пределу, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость (собственная и несобственная). Интеграл Дирихле. Гамма-функция Эйлера как бесконечное произведение, ее интегральная форма и формула дополнения для гамма-функции.*
Интеграл Пуассона. Бэта-функция Эйлера в интегральной форме. Связь функций Эйлера. Формула Стирлинга.
лекции: 10
семинары: 24
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием.

Тема 24.
Заголовок.
Содержание. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Тождество Бесселя и неравенство Бесселя. Ортогональные системы и ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Замкнутость, равенство Парсеваля, полнота; связь этих понятий. Пространство функций, интегрируемых с квадратом, его полнота.
лекции: 6
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием

Тема 25.
Заголовок. Измеримые функции и их свойства. Свойства интегрируемых по Курцвейлю-Хенстоку функций. Гильбертовы пространства функций, интегрируемых с квадратом на отрезке и на всей прямой.
Содержание. *Измеримые функции и их свойства. Теорема Егорова. Измеримость интегрируемых по Курцвейлю-Хенстоку функций. Теорема Б.Леви о предельном переходе для интеграла Курцвейля-Хенстока. Критерий интегрируемости по Курцвейлю-Хенстоку неотрицательных измеримых функций. Лемма Фату и теорема Лебега о предельном*

переходе для интеграла Курцвейля-Хенстока. Гильбертовы пространства функций, интегрируемых с квадратом на отрезке и на всей прямой.
лекции: 8
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием.

Тема 26.
Заголовок. Свертка и ее свойства на R и в периодическом случае.
Содержание. *Свертка и ее свойства на R и в периодическом случае. Аппроксимативная единица и теорема о ней. Примеры. Теоремы Вейерштрасса о приближении полиномами и тригонометрическими многочленами. Замкнутость тригонометрической системы.*
лекции: 4
семинары:
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием.

Тема 27.
Заголовок. Тригонометрические ряды Фурье и их свойства.
Содержание. *Тригонометрические ряды Фурье и их свойства: линейность, инвариантность относительно сдвигов, симметрий, сжатий, дифференцирования; ряд Фурье свёртки, равенство Парсеваля, почленная интегрируемость. Стремление к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемых по Курвейлю-Хенстоку функций. Представление частичных сумм. Ядро Дирихле. Признак Дини и следствия из него. Принцип локализации Римана. Суммирование тригонометрических рядов методами Чезаро-Фейера и Абеля-Пуассона. Тауберова теорема Харди. Признак сходимости Дирихле Жордана.*
лекции: 8
семинары: 10
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием.

Тема 28.
Заголовок. Кратный интеграл Римана. Несобственный кратный интеграл.
Содержание. *Брусы и простые множества в n-мерном пространстве, их мера и ее свойства. Мера Жордана. Измеримые множества и их свойства. Кратный интеграл Римана, его определение и простейшие свойства. Связь интегрируемости по Риману и ограниченности. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Множества меры нуль по Лебегу. Критерий интегрируемости Лебега. Некоторые свойства кратного интеграла Римана. Теоремы о связи интеграла Римана и меры Жордана. Теоремы о сведении кратных интегралов к повторным. Замена переменных в кратном интеграле. Общая теорема о замене переменных в кратном интеграле. Несобственный кратный интеграл.*
лекции: 30
семинары: 20
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

Тема 29.
Заголовок. Криволинейные интегралы I и II рода. Векторные поля.
Содержание. *Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства. Формула Грина. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла II рода*

от пути интегрирования. Поверхности в 3-мерном пространстве, их площадь. Поверхностные интегралы I и II рода, их свойства. Кусочно-гладкие поверхности. Формула Остроградского-Гаусса. Ротор векторного поля. Формула Стокса.
лекции: 18
семинары: 22
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием,

Тема 30.
Заголовок. Пространство, сопряженное к n-мерному пространству. Антисимметричные билинейные и полилинейные формы и их свойства. Внешнее произведение. Дифференциальные формы.
Содержание. *Пространство, сопряженное к n-мерному пространству. Антисимметричные билинейные и полилинейные формы и их свойства. Внешнее произведение. Касательное пространство. Касательное отображение. Дифференциальные формы. Внешнее дифференцирование. Замена переменных. Интеграл от дифференциальной формы по цепи. Обобщенная формула Стокса и ее частные случаи.*
лекции: 16
семинары: 6
Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач , подготовка к контрольной работе, работа над творческим заданием, подготовка к коллоквиуму.

VII. Используемые образовательные, научно-исследовательские и научно-производственные технологии:

А. Образовательные технологии: интерактивные лекции и семинары; решение типовых задач; выполнение творческого задания; дискуссии по теме занятий; активное обсуждение и оценка работы студентов в группе; самостоятельная работа, коллоквиумы.

Б. Научно-исследовательские технологии: изучение литературы, а также научных и научно-популярных статей, блогов и лекций ведущих отечественных и зарубежных специалистов, представленные в Интернете.

VIII. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов, оценочные средства контроля успеваемости и промежуточной аттестации:

А. Учебно-методические рекомендации для обеспечения самостоятельной работы студентов, в том числе ссылки на методические материалы, размещенные на сайте кафедры:

Б. Примерный список заданий для проведения текущей и промежуточной аттестации: См. варианты контрольных работ.

Комментарии со ссылками на список литературы и Интернет-ресурсы

В течение каждого из четырех семестров студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. Во всех семестрах предусмотрены коллоквиумы и в каждом семестре контрольные работы:

1 семестр – 4 контрольных работы,
2 семестр – 3 контрольных работы,

3 семестр – 3 контрольных работы,
4 семестр – 2 контрольных работы.

Примеры контрольных работ

1-й семестр

№1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.I, гл.I: 108, 225, 300, 368, 395, 405.
№2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.I, гл.II: 44, 74, 95, 115, 132, 139(д), 150, 165.
№3. Демидович Б.П.: 1996: 911, 926, 953, 1045, 1053, 1161, 1142, 1200.
№4. Демидович Б.П.: 1361, 1366, 1494, 1521, 1538, 1569.

2-й семестр

№1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.II, гл.I: 143, 171, 185, 214, 247, 392.
№2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.II, гл.II: 41, 84(б), 79(в), 143; Демидович Б.П.: 2441.
№3. Демидович Б.П.: 3251, 3258, 3274, 3389, 3411; Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.II, гл.IV: 223, 254, 288.

3-й семестр

№1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.2, гл.I: 78, 242, 465, 756, 656, 869.
№2. Демидович Б.П.: 2819; Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.2, гл.I:1169, 1181; гл.III: 39, 47, 128.
№3. Демидович Б.П.: 3732, 3764, 3781, 3810, 3820, 3864.

4-й семестр

№1. Демидович Б.П.: 3968, 4095, 3990, 4103; Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.III, гл.I: 218, 498.
№2. Демидович: 4234, 4286, 4352, 4371; Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., т.1, ч.III, гл.III: 104, 170.

Разбор заданий контрольных работ
См.: Боярчук А.К. и др. Справочное пособие по высшей математике. Т.1-3.

Вопросы и задачи к коллоквиумам:

1 семестр

1. Множества, операции над ними. Свойства отношения включения.
2. Свойства операций объединения и пересечения.
3. Законы Моргана.
4. Аксиомы Пеано натуральных чисел.
5. Упорядочивание натуральных чисел.

6. Аксиома индукции и существование наименьшего элемента в подмножествах натуральных чисел
7. Аксиоматика действительных чисел. Бесконечные десятичные дроби как модель действительных чисел.
8. Аксиома полноты и принципы полноты Дедекинда и Вейерштрасса.
9. Аксиома Архимеда и принцип полноты Кантора, их вывод из принципа полноты Вейерштрасса.
10. Неравенство Бернулли. Вывод аксиомы полноты из аксиомы Архимеда И принципа полноты Кантора.
11. Эквивалентные множества. Счетные множества и их свойства.
12. Несчетные множества. Теоремы Кантора о множестве двузначных функций и множестве подмножеств множества.
13. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
14. Бином Ньютона.
15. Открытые и замкнутые множества, их объединения и пересечения.
16. Эквивалентные условия замкнутости множества.
17. Теорема Гейне-Бореля о конечном подпокрытии отрезка. Теорема Лебега.
18. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
19. Расширенная числовая прямая. Теоремы о конечном подпокрытии и существовании предельной точки.
20. Предел последовательности и его свойства; предел подпоследовательности; единственность предела; ограниченность сходящейся последовательности; отделимость.
21. Независимость предела от сдвигов последовательности и изменения конечного числа ее членов.
22. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
23. Предел суммы, разности, произведения, частного.
24. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.
25. Предел монотонной ограниченной последовательности.
26. Число «е».
27. Критерий Коши сходимости последовательности.
28. Сходимость к $\pm\infty$, бесконечно большие последовательности.
29. Частичные пределы последовательности. Структура множества частичных пределов.
30. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий сходимости последовательности.
31. Бесконечные ряды. Критерий Коши сходимости. Необходимое условие сходимости.

Список задач к коллоквиуму

1. Доказать, для любого натурального n верно, что $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.
2. Доказать, что множество всех числовых последовательностей эквивалентно $\mathbb{R}$.
3. Множество Кантора на [0;1], его эквивалентность $\mathbb{R}$.
4. Доказать, что если последовательность сходится к числу «а», то последовательность ее средних арифметических тоже сходится к числу «а».
5. Доказать, что если последовательность сходится к $+\infty$, то последовательность ее средних арифметических тоже сходится к $+\infty$.
6. Доказать, что если строго положительная последовательность сходится к числу «а», то и последовательность ее средних геометрических сходится к числу «а».
7. Доказать, что если строго положительная последовательность сходится к $+\infty$, то и последовательность ее средних геометрических сходится к $+\infty$.
8. Примеры расходящихся ограниченных и неограниченных последовательностей, для которых последовательность средних арифметических сходится. Доказать, что если последовательность средних арифметических последовательности сходится , то n-й

член последовательности равен $\circ(n)$.
9. Пример последовательности, для которой каждое действительное число является частичным пределом.
10. Пример последовательности, для которой множество ее частичных пределов – множество Кантора.

2 семестр

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Основные неопределенные интегралы. Интегрирование рациональных дробей.
3. Интегралы Римана и Курцвейля-Хенстока как пределы по базе. Лемма о существовании разбиений.
4. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости.
5. Интегрируемость на подотрезках. Необходимое условие интегрируемости по Риману.
6. Аддитивность интегралов Римана и Курцвейля-Ченстока по отрезкам.
7. Интегрируемость производных по Курцвейлю-Хенстоку, формула Ньютона-Лейбница.
8. Верхняя мера Лебега и ее свойства. Множества меры нуль по Лебегу.
9. Интегрируемость по Риману граниченных и почти всюду непрерывных функций.
10. Ограниченность и непрерывность почти всюду функций, интегрируемых по Риману.
11. Критерий Лебега интегрируемости по Риману и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.
12. Два определения интегрируемых на отрезке функций, их эквивалентность.
13. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку ограниченных измеримых функций.
14. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку функции, равной нулю почти всюду.
15. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных.
16. Слабая лемма Колмогорова-Сакса-Хенстока.
17. Сильная лемма Колмогорова-Сакса-Хенстока. Непрерывность интегралов с переменным верхним пределом.
18. Покрытие в смысле Витали. Теоремы Витали.
19. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля-Хенстока с переменным верхним пределом.
20. Интегралы Римана-Стилтьеса и Курцвейля-Хенстока-Стилтьеса как пределы по базе; их простейшие свойства.
21. Критерии Коши интегрируемости. Интегрируемость на подотрезках.
22. Аддитивность интегралов Стилтьеса по отрезкам.
23. Функции ограниченной вариации и их свойства.
24. Функции ограниченной вариации как разность неубывающих функций.
25. Интегрируемость в смысле Римана-Стилтьеса непрерывных функций по функциям ограниченной вариации.
26. Интегрирование по частям в интеграле Римана-Стилтьеса.
27. Сведение интеграла Римана-Стилтьеса к интегралу Римана. Интегрирование по частям для интеграла Римана.
28. Сведение интеграла Куцвейля-Хенстока к интегралу Римана-Стилтьеса. Сохранение интегрируемости по Курцвейлю-Хенстоку при умножении на функцию ограниченной вариации.
29. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
30. Первая теорема о среднем для произведения функций и интегралов Стилтьеса.
31. Вторая теорема о среднем для произведения функций и интегралов Стилтьеса.

Список задач к коллоквиуму

1. Интегрируемость по Риману и по Курцвейлю-Хенстоку функций Римана и Дирихле.
2. Функция x^p, -1<p<0, интегрируема на любом отрезке из [0; $+\infty$] по Курцвейлю-Хенстоку.
3. Пример неинтегрируемой по Курцвейлю-Хенстоку функции.
4. Пример интегрируемой по Курцвейлю-Хенстоку функции, модуль которой не интегрируем по Курцвейлю-Хенстоку.
5. Пример не интегрируемой по Риману точной производной.
6. Множество Кантора и его свойства: замкнутость, континуальность, мера ноль по Лебегу. Лестница Кантора и ее свойства.
7. Доказать, что если на отрезке [0;1] строить множество способом, аналогичным построению множества Кантора, на n-ом шаге удаляя из каждого отрезка интервал, длина которого составляет 1/(n+1)^2 часть длины этого отрезка, то получится канторовское множество верхней меры ½.
8. Пример интегрируемой по Риману функции, производная неопределенного интеграла которой не совпадает с подынтегральной функцией на множестве мощности континуум.
9. Пример непрерывной функции F, имеющей почти всюду производную, которая (при соответствующем доопределении) интегрируема по Риману, но ее определенный интеграл не равен F+C, где C – постоянная.
10. Доказать, что если отрезок [a,b] включает 0, то функция f(x) интегрируема по функции sgn(x) на отрезке [a,b] тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке 0.
11. Пример непрерывной на отрезке функции неограниченной вариации.

3 семестр

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения.
3. Признаки Коши, Даламбера, интегральный Коши-Маклорена.
4. Признаки Куммера, Раабе и Гаусса.
5. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак сходимости Лейбница. Последовательности ограниченной вариации и их свойства.
6. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.
7. Теорема Коши о перестановках членов ряда.
8. Теорема Римана о перестановках членов ряда.
9. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса.
10. Бесконечные произведения. Условия сходимости.
11.Разложение функции sin(x) в бесконечное произведение.
12. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости.
13. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых методом Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.
14. Критерий Маркова-Гордона перестановки предельных переходов.
15. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость и операции с нею. Критерий Коши равномерной сходимости.
16. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дини.
17. Признаки равномерной сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле.
18. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из нее. Полнота пространства C(K) непрерывных на компакте функций.
19. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

20. Критерий компактности Хаусдорфа.
21. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля-Асколи.
22. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда.
23. Дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда.
24. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля о равномерной сходимости на отрезке [0;a], где z=a – точка сходимости степенного ряда. Функции комплексного переменного. Формула Эйлера.

4 семестр

1. Преобразование Фурье и его простейшие свойства: линейность, преобразование Фурье сдвига и сжатий функций, производной и свертки функций. Сдвиг и дифференцирование преобразования Фурье, стремление к нулю на $\pm\infty$.
2. Обратное преобразование Фурье. Признак Дини и следствия из него.
3. Метод суммирования средних интегральных обратного преобразования Фурье.
4. Равенство Планшереля.
5. Брусы и простые множества в ℝ^n, их мера и ее свойства.
6. Простые множества, их мера и ее свойства.
7. Мера Жордана. Измеримые множества и критерии их измеримости.
8. Свойства меры Жордана.
9. Кратный интеграл Римана, его определение и простейшие свойства.
10. Связь интегрируемости по Риману и ограниченности.
11. Суммы Дарбу и их свойства.
12. Критерий интегрируемости Дарбу.
13. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства.
14. Критерий интегрируемости Лебега.
15. Некоторые свойства кратного интеграла Римана.
16. Теоремы о связи интеграла Римана и меры Жордана.
17. Теоремы о сведении кратного интеграла по брусу к повторным.
18. Следствия и другие теоремы о сведении кратных интегралов к повторным.
19. Связь отображений из ℝ^n в ℝ^n с отличным от нуля Якобианом.
20. Замена переменной в кратном интеграле.
21. Теорема о замене одной переменной в кратном интеграле.
22. Общая теорема о замене переменных в кратном интеграле.
23. Несобственный кратный интеграл. Определение и простейшие свойства.
24. Абсолютная интегрируемость несобственного кратного интеграла.

Вопросы к экзаменам:

1 семестр

1. Множества, операции над ними и их свойства. Законы Моргана. Декартово произведение. Отношения.
2. Аксиомы Пеано натуральных чисел, их упорядочивание, аксиома индукции и существование наименьшего элемента в подмножествах. Операции над натуральными числами. Целые и рациональные числа.
3. Аксиоматика действительных чисел. Бесконечные десятичные дроби как модель действительных чисел.
4. Принципы полноты действительных чисел, их эквивалентность.
5. Эквивалентные множества. Счетные множества и их свойства. Несчетные множества.

6. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
7. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Эквивалентные условия замкнутости множества.
8. Теоремы о конечных подпокрытиях и теорема о существовании и теорема о существовании предельной точки.
9. Предел последовательности и его свойства. Независимость предела от сдвигов последовательности и изменения конечного числа ее членов.
10. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения, частного.
11. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.
12. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число «е».
13. Критерий Коши сходимости последовательности. Расширенная числовая прямая и сходимость к $\pm\infty$.
14. Бесконечные числовые ряды, критерий Коши сходимости, необходимое условие сходимости.
15. Частичные пределы последовательности, их свойства. Верхний и нижний пределы последовательности.
16. Два определения предела функции. Их эквивалентность.
17. Свойства предела функции. Бесконечно малые и их свойства.
18. Предел суммы, разности, произведения, частного функций. Переход к пределу в неравенствах и теорема о зажатой функции.
19. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и их свойства.
20. Непрерывность функции в точке. Ее свойства.
21. Точки разрыва и их классификация. Примеры точек разрыва.
22. Предел функции по базе и его свойства.
23. Бесконечно малые по базе и их свойства. Предел по базе суммы, разности, произведения и частного функций.
24. Переход к пределу по базе в неравенствах и теорема о зажатой функции. Критерий Коши существования предела по базе.
25. Непрерывные на отрезке функции и их свойства (теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса и Кантора).
26. Теорема об обратной функции. Построение показательной функции и логарифма.
27. Функции тригонометрические и обратные к ним, гиперболические и обратные к ним. Элементарные функции и их свойства.
28. Замечательные пределы.
29. Производная, касательная, дифференциал и их связи.
30. Вычисление производных суммы, разности, произведения, частного, сложной функции, обратной функции, параметрической функции.
31. Производные элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков.
32. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши и Бонне.
33. Следствия теоремы Лагранжа. Свойства производной.
34. Правило Лопиталя для неопределенностей 0/0 и ∞/∞.
35. Формула Тейлора с различными формами остаточного члена.
36. Ряды Тейлора. Разложения некоторых элементарных функций.
37. Достаточные условия локального экстремума.
38. Выпуклость. Точки перегиба. Свойства выпуклых функций.
39. Неравенство Иенсена и следствия из него.
40. Условия выпуклости и перегиба.

2 семестр

1. Определенные интегралы Римана и Курцвейля-Хенстока. Лемма о существовании

разбиений. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости.
2. Интегрируемость на подотрезках. Необходимое условие интегрируемости по Риману. Аддитивность интегралов по отрезкам.
3. Интегрируемость производных по Курцвейлю-Хенстоку, формула Ньютона-Лейбница и следствия из нее.
4. Верхняя мера Лебега и ее свойства. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства.
5. Интегрируемость ограниченных и почти всюду непрерывных функций по Риману.
6. Ограниченность и непрерывность почти всюду функций, интегрируемых по Риману. Критерий Лебега интегрируемости по Риману и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.
7. Два определения интегрируемых на отрезке функций, их эквивалентность.
8. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку ограниченных измеримых функций. Интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку функции, равной нулю почти всюду.
9. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных.
10. Слабая и сильная леммы Колмогорова-Сакса-Хенстока. Непрерывность интегралов с переменным верхним пределом.
11.Покрытие в смысле Витали. Теоремы Витали.
12. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля-Хенстока с переменным верхним пределом. Неравенство Чебышева.
13. Определенные интегралы Римана-Стилтьеса и Курцвейля-Хенстока-Стилтьеса; их простейшие свойства. Критерии Коши интегрируемости по Риману-Стилтьесу и по Курцвейлю-Хенстоку-Стилтьесу.
14. Интегрируемость по Риману-Стилтьесу и по Курцвейлю-Хенстоку-Стилтьесу на подотрезках. Аддитивность интегралов Стилтьеса по отрезкам.
15. Функции ограниченной вариации и их свойства. Функции ограниченной вариации как разность неубывающих функций.
16. Интегрируемость в смысле Римана-Стилтьеса непрерывных функций по функциям ограниченной вариации. Интегрирование по частям в интеграле Римана-Стилтьеса.
17. Сведение интеграла Римана-Стилтьеса к интегралу Римана. Интегрирование по частям для интеграла Римана.
18. Сведение интеграла Куцвейля-Хенстока к интегралу Римана-Стилтьеса. Сохранение интегрируемости по Курцвейлю-Хенстоку при умножении на функцию ограниченной вариации.
19. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
20. Первая и вторая теоремы о среднем для произведения функций и интегралов Стилтьеса.
21. Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости: сравнения, Абеля и Дирихле.
22. Метрические и нормированные пространства. Пространство ℝ^n, норма и метрика в нем.
23. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, их свойства.
24. Компакты. Их свойства. Критерий компактности в ℝ^n. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
25. Последовательности в метрических, нормированных пространствах и в ℝ^n, их пределы, свойства.
26. Полные метрические пространства. Принцип замкнутых вложенных шаров. Полнота в ℝ^n.
27. Предел функции и его свойства (в метрических и нормированных пространствах).
28. Непрерывные функции и их свойства (в метрических и нормированных пространствах). Принцип сжимающих отображений.
29. Непрерывные функции на компактах и их свойства.

30. Связные множества в метрических и нормированных пространствах и их свойства.
31. Путь (кривая), длина пути (кривой) и свойства длины в метрических пространствах, нормированных пространствах и в ℝ^n.
32. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости.
33. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.
34. Правила дифференцирования. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
35. Теоремы о равенстве смешанных производных.
36. Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, Пеано и в интегральной форме.
37. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия его существования.
38. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявных функций.
39. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа его отыскания.

3 семестр

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения, Коши, Даламбера.
3. Признаки сходимости: интегральный Коши-Маклорена, Куммера, Раабе и Гаусса.
4. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак сходимости Лейбница. Последовательности ограниченной вариации и их свойства.
5. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.
6. Теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда.
7. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса.
8. Бесконечные произведения. Условия сходимости.
9.Разложение функции sin(x) в бесконечное произведение.
10. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости.
11. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых методом Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.
12. Критерий Маркова-Гордона перестановки предельных переходов.
13. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость и операции с нею. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дини.
14. Признаки равномерной сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из нее.
15. Полнота пространства C(K) непрерывных на компакте функций. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
16. Критерий компактности Хаусдорфа.
17. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля-Асколи.
18. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда.
19. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля о равномерной сходимости на отрезке [0;a], где z=a – точка сходимости степенного ряда. Функции комплексного переменного. Формула Эйлера.
20. Функции, зависящие от параметра; равномерное стремление к пределу; связь с

равномерной сходимостью последовательностей. Критерий Коши. Свойства равномерной сходимости.
21. Перестановка пределов, дифференцирование и интегрирование пределов функций, зависящих от параметра.
22. Собственные интегралы с параметром. Их свойства: переход к пределу, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.
23. Несобственные интегралы с параметром, их равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дини.
24. Признаки равномерной сходимости Абеля и Дирихле. Свойства собственных интегралов с параметром: переход к пределу, непрерывность.
25. Свойства несобственных интегралов с параметром: дифференцируемость, интегрируемость (собственная и несобственная).
26. Интеграл Дирихле. Гамма-функция Эйлера. Формула Эйлера и формула дополнения для гамма-функции. Интеграл Пуассона.
27. Бета-функция Эйлера. Связь функций Эйлера. Формула Стирлинга.
28. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Тождество Бесселя и неравенство Бесселя.
29. Ортогональные системы и ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Замкнутость, равенство Парсеваля, полнота и связь этих понятий. Пространство l^2 и его полнота.
30. Измеримые функции и их свойства. Теорема Егорова. Измеримость интегрируемых по Курцвейлю-Хенстоку функций.
31. Теорема Б.Леви для интеграла Курцвейля-Хенстока. Критерий интегрируемости неотрицательных измеримых функций и следствия из него.
32. Лемма Фату и теорема Лебега. Гильбертовы пространства L^2[a:b] и L^2(ℝ).
33. Свертка и ее свойства. Аппроксимативные единицы (δ-образные последовательности) и теоремы о них. Примеры.
34. Теоремы Вейерштрасса о приближении полиномами и тригонометрическими многочленами. Замкнутость тригонометрической системы в L^2[-π;π].
35. Тригонометрические ряды Фурье и их свойства: линейность, инвариантность относительно сдвигов, симметрий, сжатий, дифференцирования; ряд Фурье свертки, равенство Парсеваля, почленная интегрируемость. Стремление к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемых функций.
36. Представление частичных сумм. Ядро Дирихле. Признак Дини и следствия из него. Принцип локализации Римана.
37. Суммирование тригонометрических рядов методами Чезаро-Фейера (средних арифметических) и Абеля-Пуассона.
38. Тауберова теорема Харди. Признак сходимости Дирихле-Жордана.

4 семестр

1. Преобразование Фурье и его простейшие свойства: линейность, преобразование Фурье сдвига и сжатий функций, производной и свертки функций. Сдвиг и дифференцирование преобразования Фурье, стремление к нулю на ±∞.
2. Обратное преобразование Фурье. Признак Дини и следствия из него.
3. Метод суммирования средних интегральных обратного преобразования Фурье. Равенство Планшереля.
4. Брусы и простые множества в ℝ^n, их мера и ее свойства.
5. Мера Жордана. Измеримые множества и критерии их измеримости. Свойства меры Жордана.
6. Кратный интеграл Римана, его определение и простейшие свойства. Связь интегрируемости по Риману и ограниченности.
7. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу.

8. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства. Критерий интегрируемости Лебега.
9. Некоторые свойства кратного интеграла Римана.
10. Теоремы о связи интеграла Римана и меры Жордана.
11. Теоремы о сведении кратных интегралов к повторным.
12. Связь отображений из ℝ^n в ℝ^n с отличным от нуля Якобианом. Замена переменной в кратном интеграле.
13. Общая теорема о замене переменных в кратном интеграле.
14. Несобственный кратный интеграл. Определение и свойства. Абсолютная интегрируемость.
15. Криволинейные интегралы I и II рода. Их свойства.
16. Формула Грина.
17. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.
18. Поверхности в ℝ^3, их площадь. Поверхностные интегралы I и II рода, их свойства.
19. Кусочно-гладкие поверхности. Формула Остроградского-Гаусса.
20. Ротор векторного поля. Формула Стокса.

Зачетные и дополнительные задачи
Аналогичны разобранным на семинарах и приведенным в контрольных работах.

Разбор типовых заданий к зачету: разбираются на семинарах

Вопросы и задачи к экзамену (при наличии): выдаются на лекциях

IX. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

А. Основная литература:

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 3-х ч. М.: Факториал, 1996.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1, 2. «Дрофа», 2004 г. (и другие издания).
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. «Наука», 1972 г., М.: изд-ва АСТ, Астрель, 2003. (и другие издания),
4. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1, 2, 3. «Физматлит», 2003 (и другие издания).
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.I, II, III. М.: ГИФМЛ, 1963; СПБ: Невский диалект, 2001, 2002.
6. Гелбаум Б., Омстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. М.: изд-во ЛКИ, 2007.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I, II. М.: Фазис, 1997, 1998; МЦНМО, 2002. Издавался позднее.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985; 2004.
9. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004. Издавались позднее.
10. Лукомский С.Ф. Интегральное исчисление (функции одной переменной). Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2005.

Б. Дополнительная литература:

В. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:
Сайт кафедры: http://www.matan.math.msu.su/
Ссылки на электронные учебники и др. материалы ______________________________________

X. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

А. Помещения:

- аудитория

Б. Оборудование:

- доска в аудитории для лекций и семинаров, мел, проектор, ноутбук, пластиковая доска, цветные фломастеры.

В. Иные материалы:

____

Авторы: Лукашенко Т.П., Родионов Т.В.

Программа утверждена на заседании кафедры,
протокол № 1 от 6 сентября 2013г.

Заведующий кафедрой
академик РАН В.А. Садовничий