

Задачи
к первому коллоквиуму по математическому анализу
для студентов первого потока
2022-2023 учебный год
Лектор профессор В. В. Власов

Найти пределы последовательностей:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a > 0;$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n};$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}, a > 1, k \in \mathbb{N};$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0;$
5. Найти предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), a > 0;$
6. Известно, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Найти
 - а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n};$
7. Доказать, что, если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то последовательность $\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится. Верно ли обратное утверждение?
8. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность с ограниченным изменением, т.е. существует число $C > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\sum_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| < C$.
Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;
9. Исследовать на сходимость последовательности:
 - а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$ б) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2};$
10. Доказать, что справедливо неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n;$
11. Привести примеры числовых последовательностей, имеющих
 - а) конечное число частичных пределов, б) бесконечное число частичных пределов;
12. Существует ли числовая последовательность, для которой любое действительное (вещественное) число является частичным пределом?
13. Функция $f(x)$ непрерывна на конечном интервале (a, b) и ограничена. Следует ли из этого, что множество значений $f(x)$ является интервалом? Дать ответ на тот же вопрос при дополнительном условии:
 - а) функция $f(x)$ является монотонной на интервале $(a, b),$
 - б) функция $f(x)$ является строго монотонной на интервале $(a, b);$
14. Функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, +\infty),$ причем существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Доказать, что функция ограничена на $[a, +\infty).$
15. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b],$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. Доказать, что существует такое число $C > 0$, что неравенство $f(x) \geq C$ выполняется для всех $x \in [a, b].$

16. Привести пример функции, заданной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, разрывной во всех точках $\mathbb{R}$, за исключением тринадцати точек $\{a_j\}$, $j = 1, 2, \dots, 13$, в которых она непрерывна.

17. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x)$ на множестве E :

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in E = (0, 1)$, б) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in E = (0, 1)$,

в) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in E = (0, 1)$, г) $f(x) = x^2$, $x \in E = (0, +\infty)$,

д) $f(x) = \sin x^2$, $x \in E = (0, +\infty)$.