

**Вопросы**  
**к экзамену по математическому анализу**  
**для студентов первого потока**  
**I курс, I семестр**  
2022-2023 учебный год  
Лектор - профессор В. В. Власов

- 1) Аксиоматика действительных (вещественных) чисел. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Теорема о существовании точной верхней грани ограниченного сверху числового множества.
- 2) Теорема о системе вложенных отрезков. Теорема о последовательности вложенных стягивающихся отрезков.
- 3) Эквивалентность множеств. Конечные, счетные и несчетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных (вещественных) чисел.
- 4) Неравенство Бернулли и Бином Ньютона. Формулы Моргана.
- 5) Предел последовательности. Его единственность. Ограниченность последовательности, имеющей предел.
- 6) Предельный переход и арифметические операции. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
- 7) Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число « $\epsilon$ ». Теорема Штольца (без доказательства).
- 8) Подпоследовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса.
- 9) Критерий Коши сходимости числовой последовательности. Примеры.
- 10) Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Необходимое условие и критерий Коши сходимости числового ряда.
- 11) Частичные пределы. Критерий существования частичного предела. Верхний и нижний пределы числовой последовательности.
- 12) Предел функции. Определение предела по Коши и по Гейне. Его единственность. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне.
- 13) Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Предельный переход и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе зажатой функции. Теорема о пределе сложной функции (замена переменных).
- 14) Критерий Коши существования предела функции. Примеры применения.
- 15) Первый и второй замечательные пределы.
- 16) Односторонние пределы. Пределы монотонной функции.
- 17) Непрерывность функции в точке. Арифметические операции с непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции.
- 18) Классификация точек разрыва. Примеры. Точки разрыва монотонной функции, их характер и мощность.
- 19) Свойства функций, непрерывных на отрезке. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.
- 20) Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. Модуль непрерывности и его свойства.
- 21) Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема Больцано – Коши. Критерий непрерывности монотонной функции.
- 22) Определение, существование и непрерывность обратной функции. Непрерывность элементарных функций.
- 23)  $O$  - символика. Эквивалентные функции. Таблица эквивалентных.
- 24) Принцип Бореля-Лебега (о конечном подпокрытии) и принцип Больцано-Вейерштрасса (о существовании предельной точки для любого ограниченного бесконечного множества).

- 25) Производная и дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.
- 26) Производная сложной функции, производная обратной функции. Производная суммы, произведения и частного двух функций.
- 27) Производные элементарных функций. Производная функции, заданной параметрически.
- 28) Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница для производной произведения двух функций. Вопрос об инвариантности формы дифференциалов.
- 29) Возрастание и убывание функции в точке. Теорема Ферма. Необходимые и достаточные условия локального экстремума.
- 30) Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о среднем.
- 31) Следствия из формулы конечных приращений Лагранжа. Возрастание и убывание функций на отрезке.
- 32) Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталья. Примеры. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функции.
- 33) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано. Теорема единственности.
- 34) Поведение остаточного члена в форме Лагранжа формулы Тейлора для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh}x$ ,  $\operatorname{ch}x$ ,  $\ln(1+x)$ . Иррациональность числа  $e$ .
- 35\*) Ряды Тейлора и Маклорена некоторых элементарных функций. Взаимосвязь элементарных функций. Формула Эйлера.
- 36) Непрерывность и дифференцируемость вектор-функций. Формула Тейлора для вектор-функций.
- 37) Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости. Выпуклость и касательные.
- 38) Точки перегиба функции. Необходимое условие точки перегиба. Достаточное условие точки перегиба. Достаточные условия экстремума с использованием производных высших порядков.
- 39) Асимптоты к графику функции. Схема построения графиков функций. Пример построения графика параметрически заданной функции.
- 40) Классические неравенства (Йенсена, Юнга, Гельдера, Минковского, сравнение среднего геометрического со средним арифметическим).
- 41\*) Линейные нормированные и метрические пространства (примеры). Принцип сжимающих отображений в полных метрических пространствах.
- 42\*) Равномерная сходимость. Теорема Вейерштрасса о достаточных условиях равномерной сходимости функционального ряда. Пример Вейерштрасса непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции.

Зам. зав. кафедрой математического анализа  
механико-математического факультета МГУ,  
профессор

Т. П. Лукашенко