Лекция 06.12.2022

На этой лекции мы разберем дополнительные свойства выпуклых функций и дифференцируемых функций.

Ранее мы установили достаточные условия выпуклости для дифференцируемых функций. Оказывается, условие дифференцируемости не является очень ограничивающим — любая выпуклая функция является дифференцируемой всюду, кроме, быть может, не более чем счетного множества точек, что мы и докажем.

Для простоты под выпуклостью мы будем понимать выпуклость вниз, для выпуклости вверх результаты аналогичны.

Лемма 1. *Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$. Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x < x_2$, справедливо любое из следующих трех неравенств:*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}; \tag{1}$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{2}$$

(т.е. дробь $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ убывает (не обязательно строго) при убывании t);

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{3}$$

(т.е. дробь $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ возрастает (не обязательно строго) при возрастании x);
причем в случае строгой выпуклости неравенства также будут строгими.

Фактически, каждое из этих трех неравенств — это сравнение угловых коэффициентов трех связанных секущих (см. рис. 1).

Доказательство. Напомним, что функция называется выпуклой на отрезке $[a,b]$, если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a,b]$, график функции f расположен не выше отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ (строго выпуклой, если ниже). Иными словами, если для любых $x_1, x, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x < x_2$ справедливо неравенство

$$f(x) \le y(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

что равносильно

$$(x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2). \tag{$*$}$$

Запишем $x_2 - x_1$ как $(x_2-x)+(x-x_1)$, тогда неравенство $(*)$ примет вид

$$(x_2-x)f(x) + (x-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2-x)(f(x)-f(x_1)) \le (x-x_1)(f(x_2)-f(x)),$$

что равносильно (1).

Запишем $x_2 - x$ как $(x_2-x_1)-(x-x_1)$, тогда неравенство $(*)$ примет вид

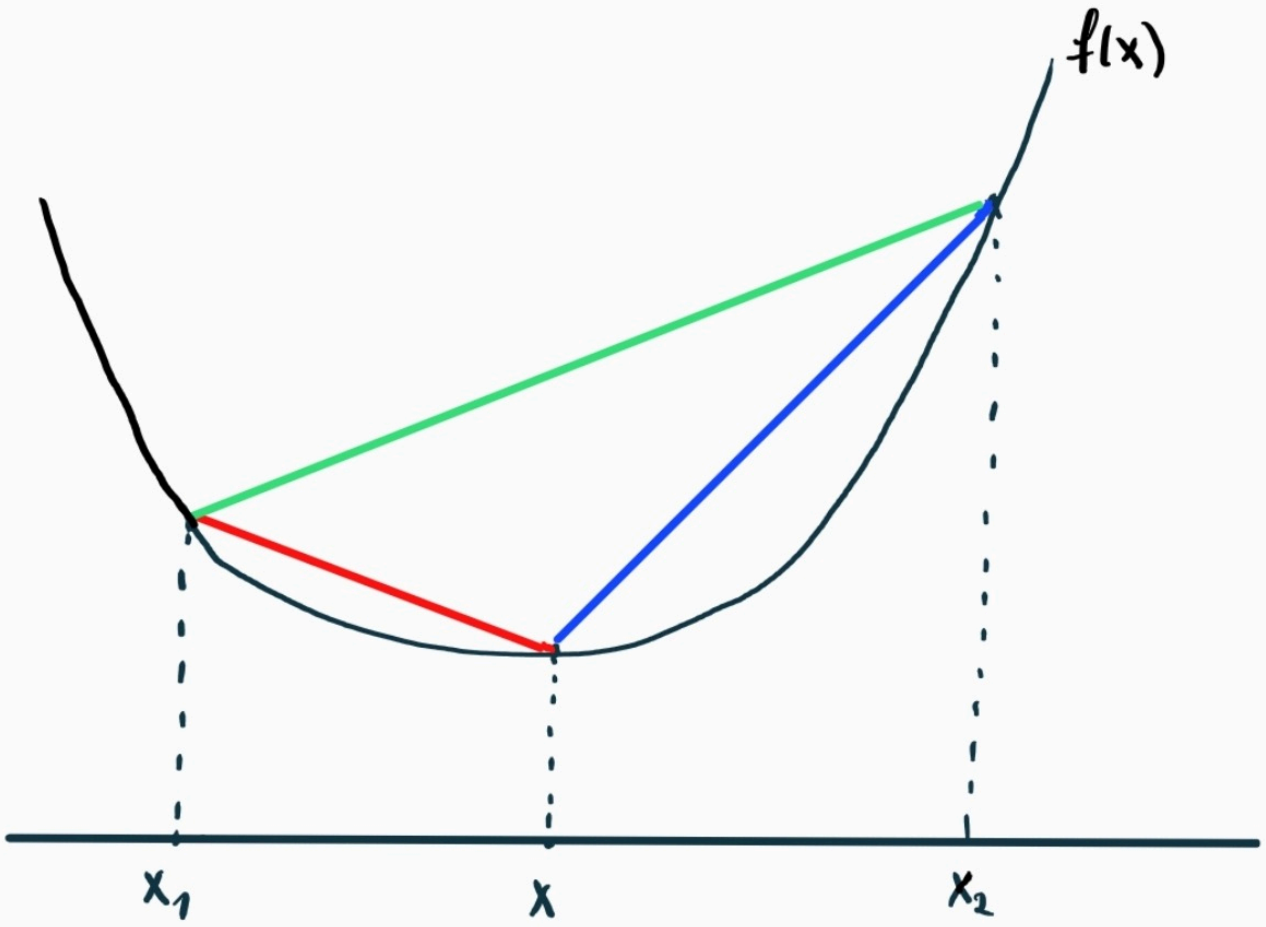

Рис. 1

$$(x_2 - x_1)f(x) \le (x_2 - x_1)f(x_1) - (x - x_1)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2).$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x_1)(f(x) - f(x_1)) \le (x - x_1)(f(x_2) - f(x_1)),$$

что равносильно (2).

Запишем $x - x_1$ как $(x_2 - x_1) - (x_2 - x)$, тогда неравенство $(*)$ примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \le (x_2 - x)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) - (x_2 - x)f(x_2).$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x_2) - f(x_1)) \le (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно (3). ■

Теорема 2. *Пусть функция f выпукла на $[a, b]$. Тогда*

а) *$\forall x_0 \in (a, b)$ $\exists f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$;*

б) *$f \in C(a, b)$;*

в) *$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, имеем $f'_+(x_1) \le f'_-(x_2)$ (если f строго выпукла, то $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$)*

г) *f'_- и f'_+ — неубывающие на (a, b) функции (возрастающие в случае строгой впуклости);*

д) *f дифференцируема на (a, b) всюду, кроме, быть может, не более чем счетного множества.*

Доказательство. **а)** Пусть $x_0 \in (a, b)$, $h > 0$ — такое, что $x_0 + h \in (a, b)$ тоже. Тогда, учитывая, что $x_0 - (x_0 - h) = (x_0 + h) - x_0 = h$, по неравенству (1) имеем

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \le \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

при убывании h левая часть неравенства неубывает (из (3)), правая — невозрастает (из (2)), следовательно при $h \to 0 + 0$ существуют оба предела, равные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, а из неравенства получаем $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$.

б) Из существования односторонних производных имеем для любого $x_0 \in (a, b)$

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} f(x_0) + f'_+(x_0)h + o(h), h \to 0 + 0 \\ f(x_0) + f'_-(x_0)h + o(h), h \to 0 - 0 \end{cases}$$

откуда в любом случае получаем $f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1), h \to 0$, т.е. f непрерывна в x_0.

в) Для всякого $x \in (x_1, x_2)$ из (2) имеем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

При $x \to x_1 + 0$ левая часть неравенства невозрастает (строгое неравенство при этом сохраняется), поэтому мы можем перейти к пределу:

$$f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

С другой стороны, из (3) имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Аналогично, при $x \to x_2 - 0$ имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'_-(x_2)$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

Таким образом, имеем

$$f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'_-(x_2)$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости), откуда следует требуемое.

г) Для $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ из **а)** и **в)** имеем $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2)$ (в случае строгой выпуклости $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) < f'_-(x_2) \le f'_+(x_2)$), откуда следует требуемая монотонность.

д) В силу монотонности множество точек разрыва функции f'_- на (a,b) не более чем счетно. Покажет, что в точках непрерывности функции f'_- существует производная f' (т.е. $f'_- = f'_+$).

Пусть x_0 — точка непрерывности функции f'_-. Для всякого $h > 0$ такого, что $x_0 + h \in (a,b)$ из **а)** и **в)** имеем

$$f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le f'_-(x_0+h),$$

откуда

$$0 \le f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \le f'_-(x_0+h) - f'_-(x_0).$$

В силу непрерывности f'_- имеем $f'_-(x_0+h) - f'_-(x_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, откуда по теореме о зажатой функции $f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, а так как это выражение на самом деле не зависит от h, получаем, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. ■

Следствие 3. *Пусть $f \in D(a,b)$. Тогда f выпукла на (a,b) $\Leftrightarrow$ f' возрастает на (a,b) (строго выпукла $\Leftrightarrow$ строго возрастает).*

Доказательство. $\Rightarrow$ следует из предыдущей теоремы (из в)).

$\Leftarrow$. Возьмем произвольные $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x < x_2$. По формуле Лагранжа найдутся $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$ такие, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2).$$

Из монотонности f' следует, что $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$ (строгое неравенство в случае строгой монотонности), откуда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

(строгое неравенство в случае строгой монотонности), откуда по Лемме 1 следует выпуклость f (строгая выпуклость в случае строгой монотонности).

■

Функция $x^2 \sin \frac{1}{x}$ показывает, что из $f \in D(a,b)$ не следует, что $f' \in C(a,b)$ (т.е. производная не обязана быть непрерывной функцией), тем не менее оказывается, что у f' можно установить ряд “хороших” свойств, типичных для непрерывных функций, т.е. не всякая функция может быть производной дифференцируемой функции (иными словами — не у всякой функции может быть точная первообразная).

Во-первых, покажем, что у f' не может быть точек разрыва I рода. Для этого нам понадобится следующая лемма (имеющая и самостоятельный интерес), гласящая, что если у непрерывной функции в какой-то точке существует предел производной, то в этой точке существует и производная, причем ее значение равно значению этого предела (указанный выше пример показывает, что обратное неверно: из существования производной в какой-то точке не следует, что существует предел производной в этой точке).

Через $g(x \pm 0)$ будем обозначать предел справа/слева функции g в точке x: $g(x \pm 0) = \lim\limits_{h \to 0 \pm 0} g(x+h)$.

Лемма 4. *а) Пусть* $f \in C[x_0, b) \cap D(x_0, b)$ *и* $\exists f'(x_0+0)$ *(конечный или равный* $\pm\infty$*). Тогда* $\exists f'_+(x_0)$*, причем* $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.
а) Пусть $f \in C(a, x_0] \cap D(a, x_0)$ *и* $\exists f'(x_0-0)$ *(конечный или равный* $\pm\infty$*). Тогда* $\exists f'_-(x_0)$*, причем* $f'_-(x_0) = f'(x_0-0)$.

Доказательство. а) Для любого $h > 0$, такого, что $x_0+h \in [x_0, b)$, по формуле Лагранжа найдется $\xi \in [x_0, x_0+h]$ такое, что

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'(\xi)h}{h} = f'(\xi) \xrightarrow[h \to 0+0]{} f'(x_0+0).$$

Отсюда $\exists \lim\limits_{h \to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$, и этот предел равен $f'(x_0+0)$.

Рассуждения (предельный переход) работают как в случае конечного предела, так и в случае $\pm\infty$.

Пункт б) доказывается аналогично. ■

Теорема 5. *Пусть* $f \in D(a,b)$ *тогда у функции* f' *на* (a,b) *нет точек разрыва I рода.*

Доказательство. От противного, пусть $x_0 \in (a,b)$ — точка разрыва I рода функции f'.

Тогда $\exists f'(x_0+0)$, при этом $f \in C[x_0, b) \cap D(x_0, b)$, следовательно, по предыдущей лемме $\exists f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$. В силу же дифференцируемости функции f имеем $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Аналогично $\exists f'_-(x_0)$ и $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0-0)$. Отсюда $f'(x_0-0) = f'(x_0) = f'(x_0+0)$, т.е. x_0 — точка непрерывности функции f'. Противоречие. ■

Во-вторых, покажем, что если функция дифференцируема, то она, хоть и не обязательно непрерывна, обладает тем свойством, что она принимает все свои промежуточные значения, как непрерывная функция. Это свойство называется свойством Дарбу.

Теорема 6. *(свойство Дарбу производной). Пусть* $f \in D(a,b)$, $\exists f'_+(a), f'_-(b)$. *Тогда для любого числа* c*, лежащего между* $f'_+(a)$ *и* $f'_-(b)$ *найдется* $x \in (a,b)$ *такое, что* $f'(x) = c$.

Доказательство. Докажем сначала для случая $c = 0$, тогда $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ имеют разные знаки. Пусть $f'_+(a) > 0$, $f'_-(b) < 0$.

Тогда $f'_+(a) = \lim\limits_{h\to 0+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$, откуда $f(x) - f(a) > 0$ при $x \in (a, a+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$, т.е. $f(x) > f(a)$, следовательно a — точка строгого локального (краевого) минимума.

Аналогично b — точка строгого локального (краевого) минимума (в этом случае $\frac{f(b+h)-f(b)}{h} < 0$, но $f(b+h) - f(b) > 0$ в силу того, что здесь $h < 0$).

Из условий следует, что $f \in C[a, b]$, следовательно найдется точка локального максимума $\xi \in [a, b]$ функции f, причем $\xi \neq a$, $\xi \neq b$, значит, $\xi \in (a, b)$, откуда по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$.

Случай $f'_+(a) < 0$, $f'_-(b) > 0$ аналогичен, в этом случае a, b — точки строгого локального краевого максимума, а ξ — точка локального минимума.

Для общего случая, $c \neq 0$, рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - cx$, для нее $\varphi'(x) = f'(x) - c$, откуда, т.к. c лежит между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, $\varphi'_+(a)$ и $\varphi'_-(b)$ имеют разные знаки. По доказанному, $\xi \in (a, b)$ такое, что $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - c = 0$, откуда $f'(\xi) = c$.

■

Следствие 7. *Функция Римана* $R(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ иррационально.} \\ \frac{1}{n}, \text{ если } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ - несократимая дробь} \end{cases}$ *не может быть производной никакой другой функции, так как она принимает только рациональные значения.*

Замечание 8. Из свойства Дарбу также независимо можно доказать, что у функции (в данном контексте — у производной) нет точек разрыва I рода.

Рассуждения о следующих свойствах выходят за рамки текущего семестра, поэтому дадим формулировки утверждений и приведем идеи доказательств.

В-третьих, оказывается, что у произодной обязательно есть точки непрерывности, то есть производная не может быть всюду разрывной; более того, точек непрерывности — много, они образуют всюду плотное множество. Этот факт следует из следующей теоремы, которую можно доказать с помощью теоремы Бэра о категории.

Теорема 9. *(без доказательства). Пусть* $f_n \in C(a, b)$ *— последовательность непрерывных на интервале функций. Если* $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\, \forall x \in (a, b)$ *(т.е.* f_n *сходится к* f *поточечно), то* $\exists x_0 \in (a, b)$ *такое, что* f *непрерывна в* x_0*. Более того, отсюда немедленно следует, что множество точек непрерывности функции* f *всюду плотно на* (a, b) *(т.е.* $\forall (\alpha, \beta) \subset (a, b)\, \exists x_0 \in (\alpha, \beta)$*:* f *непрерывна в* x_0*).*

Следствие 10. *Пусть* $f \in D(a, b)$*. Тогда множество точек непрерывности функции* f' *всюду плотно на* (a, b)*.*

Доказательство. Действительно, если $f \in D(a, b)$, то $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\, \forall x \in (a, b)$.

■

Из этого результата, в частности, следует, что всюду разрывная функция (например, функция Дирихле) не может быть производной никакой другой функции.

Однако у производной может быть также и всюду плотное множество точек разрыва, соответствующий пример мы сейчас и приведем.

Пусть $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, g(0) = 0$ — как известно, всюду дифференцируемая функция, производная которой разрывна в нуле. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x - r_n)$, где

$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — занумерованные натуральными числами все рациональные точки интервала (a,b). Эта функция непрерывна, так как это равномерно (по признаку Вейерштрасса) сходящийся ряд из непрерывных функций. Дифференцируемость ее выходит за рамки программы первого семестра: это следует из того, что почленно продифференцированный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(2(x-r_n)\sin\frac{1}{x-r_n}-\cos\frac{1}{x-r_n})$ сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса). Если $x\neq r_k$ ни для какого $k\in\mathbb{N}$, то это непрерывная функция, так как это равномерно сходящийся ряд из функций, каждая из которых непрерывна в точке x. Если $x=r_k$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$, то соответствующий член ряда $\frac{1}{2^n}(2(x-r_n)\sin\frac{1}{x-r_n}-\cos\frac{1}{x-r_n})$ — разрывная в точке r_k функция, а оставшийся ряд без этого члена $\sum\limits_{n=1,n\neq k}^{\infty}\frac{1}{2^n}(2(x-r_n)\sin\frac{1}{x-r_n}-\cos\frac{1}{x-r_n})$ — равномерно сходящийся ряд из функций, каждая из которых непрерывна в точке r_k, поэтому весь ряд целиком — разрывная в точке r_k функция для любого $k\in\mathbb{N}$. Таким образом, функция $f(x)$ — это дифференцируемая на интервале (a,b) функция, со всюду плотным на (a,b) множеством точек разрыва производной.

Чтобы построить аналогичный пример для всей числовой прямой вместо конечного интервала, его надо модифицировать — из-за того, что функции $x-r_n$ не будут равномерно ограниченными даже ни на каком ограниченном множестве.

Рассмотрим $g(x)=(\sin x)^2\sin\frac{1}{x}, g(0)=0$ и $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g(x-r_n)$, где $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — занумерованные натуральными числами все рациональные точки на прямой. Тогда к этому ряду уже можно применить признак Вейерштрасса, как и к почленно продифференцированному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(2\sin(x-r_n)\cos(x-r_n)\sin\frac{1}{x-r_n}-(\frac{\sin x}{x})^2\cos\frac{1}{x-r_n})$ — их члены уже будут равномерно ограниченными на всей числовой прямой и можно провести рассуждения, аналогичные тем, что были для предыдущего примера.

Замечание 11. Используя функцию $x^2\sin\frac{1}{x}$ и “толстое множество Кантора” (“множество Кантора положительной меры”), можно построить пример дифференцируемой функции, у которой множество точек разрыва производной имеет ненулевую меру Лебега (и, следовательно, оно несчетно). Этот пример называется функцией Вольтерра. Это также будет примером дифференцируемой функции, производная которой ограничена, но не интегрируема по Риману.