Памяти Юрия Ивановича Манина

Многомерность

В.А.Зорич

Аннотация

Вспоминая Юрия Ивановича Манина, приведём фрагмент его книги «Математика и физика» и сделаем небольшое пояснение. Оно может быть интересно математикам, не погружённым в многомерную геометрию и статистическую физику.

Начну с цитаты из книги Ю.И.Манина «Математика и физика»[1]

«*Асимптотические свойства многомерных объёмов –– это геометрический арсенал статистической физики.*»

1. Вместо предисловия.

7 января 2023 года умер Юрий Иванович Манин. Если кто-то, даже не будучи профессионалом, захочет получить представление о масштабах Манина, может полистать его книгу «Математика как метафора» [1].

С теплом вспоминаю следующий эпизод, связанный с этой книжкой. Объекты статистической физики (например, газ, состоящий из огромного числа молекул) с точки зрения математики живут в очень многомерном пространстве. Привыкшему к трёхмерному пространству трудно поверить, что почти весь объём очень многомерного шара находится в тоненькой окрестности граничной сферы. В этом смысле почти весь объём многомерного арбуза находится в корке. В ответ на одно моё письмо на близкую тему Юрий Иванович прислал мне по электронной почте корректуру готовившейся к печати его книжки «Математика как метафора». Я взахлёб прочитал всю эту книжку, хотя моё исходное обращение касалось только ставшей библиографической редкостью статьи «Ю.И.Манин, Вычислимое и невычислимое», частично перепечатанной в этой книжке.

[1] Книга Ю.И.Манин, Математика и физика. М.: Знание, 1979 — библиографическая редкость. Но она включена в сборник [1], раздел Математика и физика.

Я ответил электронным письмом, в теме которого значилось: *Рецензия*, а в тексте: *Это сколько же надо было пятнашек иметь, чтобы столько мыслей скупить!* На это ЮИ ответил: *Смеялся в голос!*

Тут я, конечно, должен кое-что пояснить читателю. В своей книге ЮИ, в частности, описывает, как он в 1987 году торговал на Арбате. Он сидел с плакатом: **Покупаю оригинальные новые мысли по 15 копеек за штуку**. Подходили разные люди с разными предложениями. Один мальчик, постояв, задумчиво сказал “Это сколько же мыслей надо, чтобы машину купить!” Прочитав всю книжку, я и написал ЮИ мою рецензию, которая его, по-видимому, развеселила.

2. Цитируем Ю.И.Манина. ([1] с. 147)

«...Двадцатимерный арбуз радиусом 20 см с толщиной корки 1 см чуть не на две трети состоит из корки. Эти расчёты позволяют сформулировать геометрический образ: "объём многомерного тела почти целиком сосредоточен у его поверхности". (Интересно рассмотреть также вместо шара куб — тот же эффект проявляется в быстром росте числа его граней.)

Представим себе простейшую модель газа: N точечных атомов, движущихся в резервуаре со скоростями $\nu_i, i = 1, \ldots, N$; каждый атом имеет массу m.

Кинетическая энергия газа E равна $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \nu_i^2$; состояние газа, описываемое набором скоростей при фиксированной энергии E, определяет точку на $(N-1)$-мерной евклидовой сфере радиусом $\sqrt{\frac{2E}{m}}$. Для макроскопического объема газа в нормальных условиях размерность этой сферы имеет порядок $10^{23} \div 10^{25}$ (определяемый числом Авогадро), т. е. очень велика. Если два таких резервуара соединены так, что они могут обмениваться энергией, но не атомами, и сумма их энергий $E = E_1 + E_2$ остаётся постоянной, то энергии E_1 и E_2 большую часть времени будут близки к таким, которые максимизируют объём пространства состояний, доступный объединённой системе. Он равен произведению объёмов сфер радиусов $\sqrt{\frac{2E_1}{m}}$ и $\sqrt{\frac{2E_2}{m}}$ соответственно, первый из которых с ростом E_1 очень быстро растет, а второй очень быстро убывает. Их произведение имеет поэтому острый пик в точке, которую легко вычислить; точка отвечает условию равенства температур. Сосредоточенность объёма многомерного тела вблизи поверхности, в сущности, предопределяет существование температуры как макроскопической величины.

О каком пространстве идет речь в этом примере? О пространстве состояний физической системы, точнее, о некотором его факторпространстве: мы не принимаем во внимание ни положения атомов, ни направления скоростей. Одна его точка — это снова возможность. Типичное множество — это не стулья в комнате и не ученики в классе и даже не атомы в резервуаре, а возможные состояния атомов в резервуаре. Асимптотические свойства многомерных объёмов — это геометрический арсенал статистической физики. Все разнообразие мира природа конструирует из малого числа разных кирпичиков. Кирпичики одного сорта тождественны, и когда статистика описывает поведение их конгломератов, она пользуется образом точки, блуждающей в областях почти бесконечномерного фазового пространства. Макроскопические наблюдения позволяют лишь грубо указать расположение области, куда попала точка, и чем больше ее объём, тем вероятнее, что мы увидим точку именно там. В бесконечномерии, где почти вся область — это её граница, чтобы найти правильные способы думать и вычислять, нужны самые рафинированные орудия математического арсенала.»

3. Асимптотические свойства многомерных объёмов (некоторая конкретизация и пояснения).

а) Шар, сфера и концентрация меры.

Если с тысячемерного арбуза, радиусом 1 метр, срезать корку, толщиной 1 сантиметр, то останется меньше тысячной доли исходного арбуза.

Следствие: если непрерывная на таком многомерном шаре функция постоянна на границе, то с точки зрения наблюдателя, измеряющего её значения при сучайных значениях аргумента, она будет казаться постоянной. В самом деле, если в такой шар бросить случайную точку, то, скорее всего, она окажется в непосредственной близости граничной сферы (ведь там почти весь объём).

Значительно интереснее, что вообще *регулярная функция на многомерном шаре постоянна с точки зрения наблюдателя.* Об этом ниже.

Ещё пример. Возьмём два шара одинакового радиуса. Пусть центры шаров находятся друг от друга на расстоянии этого общего радиуса. В трёхмерном пространстве, как мы знаем, объём пересечения шаров будет составлять заметную часть объёма каждого шара. Если же это очень многомерные шары, то объём пересечения шаров будет составлять ничтожную долю объёма каждого шара. Это одна из геометрических составляющих классической теоремы Шеннона о передаче информации по каналу связи при наличии помех [3].

b) Концентрация меры шара и сферы около экватора.

Элементарная геометрия позволяет дать следующую оценку доли $\frac{V_\delta}{V}$ объёма, отсекаемого от единичного n-мерного шара гиперплоскостью, проходящей на расстоянии δ от центра шара.

$$\frac{V_\delta}{V} < \frac{1}{2}\frac{|B^n(\sqrt{1-\delta^2})|}{|B^n(1)|} = \frac{1}{2}(\sqrt{1-\delta^2})^n < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}$$

при $|\delta| \leq 1$.

Это значит, что объём многомерного шара сосредоточен в окрестности экваториальной гиперплоскости.

$$1 - 2\frac{V_\delta}{V} > 1 - e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \simeq 1$$

при $0 < \delta < 1$ и $n \gg 1$.

Аналогично, элементарная геометрия позволяет дать следующую оценку доли доли $\frac{S_\delta}{S}$ площади, отсекаемой от единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостью, отстоящей на расстоянии δ от центра сферы.

$$\frac{S_\delta}{S} = \frac{\frac{1}{n}1S_\delta}{\frac{1}{n}1S} < \frac{2V_\delta}{V} < e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \ .$$

Это значит, что площадь многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности экватора

$$1 - 2\frac{S_\delta}{S} > 1 - 2e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \simeq 1 \ .$$

Следствие: ортогональность случайных единичных векторов пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \gg 1$:

$$\mathrm{Pr}_n\{| < v_1, v_2 > | > \delta > 0\} < \ 2e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}.$$

Здесь $< v_1, v_2 >$ — скалярное произведение единичных векторов v_1, v_2, а $\mathrm{Pr}\{\}$ — вероятность события.

Отметим, что указанная ортогональность случайных многомерных векторов — другая геометрическая составляющая упомянутой выше теоремы Шеннона [3].

c) Постоянство функций очень многих равноправных переменных.

Напомним изопериметрическое неравенство на евклидовой сфере в форме, данной ему Леви. Оно состоит в следующем.

Пусть A — множество на сфере, и A_δ — его δ-раздутие. Множество $A_\delta \setminus A$ назовём δ-воротником A.

Утверждается, что среди всех множеств A фиксированной площади, наименьшую площадь δ-воротника имеет сферическая шапочка.

В частности, среди всех множеств A, площадь которых равна половине площади всей сферы, наименьшую площадь δ-воротника имеет полусфера.

Множество M на сфере называется медианным или просто медианой, если оно делит площадь сферы пополам.

Изопериметрическое неравенство Леви гарантирует, что площадь воротника медианного множества не меньше площади соответствующего воротника экватора.

Но это означает, что почти вся площадь многомерной сферы сосредоточена в окрестности любого медианного множества, как и около экватора.

Рассмотрим вещественнозначную функцию $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ на сфере.

Нормируем площадь сферы к единице, введя вероятностную меру μ, и обозначим через M_f такое число, для которого

$\mu\{x \in \mathbb{S}^n |\ f(x) \leq M_f\} \geq 1/2$ и $\mu\{x \in \mathbb{S}^n |\ f(x) \geq M_f\} \geq 1/2$.

Его называют *медианой* или *средним в смысле Леви значением функции* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$.

Если функция не константа, то, проще можно сказать, что медианное значение M_f функции — это такое значение, уровень которого является медианой сферы (делит площадь пополам).

Зная, что почти вся площадь многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности любой медианы сферы, например, в окрестности медианного уровня M_f функции $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, можно сказать, что, выбирая случайную точку сферы $\mathbb{S}^n$, мы с большой вероятностью попадём в малую окрестность уровня M_f.

Если исходная функция $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ в том или ином смысле регулярна, например, если она липшицева, то получаемое при таком случайном выборе аргумента $x \in \mathbb{S}^n$ значение функции $f(x)$ будет близко к значению M_f.

Приведём конкретные оценки.

Учитывая сказанное и полученные ранее оценки концентрации площади сферы у экватора (а на основании изопериметрического неравенства Леви) и в малой окрестности любой медианы многомерной сферы, можно предъявить следующую конкретную оценку.

Пусть μ — равномерная вероятностная мера на сфере $\mathbb{S}^n(r)$ радиуса r, и пусть M_f — медианное значение функции $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{S}^n(r), \mathbb{R})$, а L — константа Липшица относительно геодезической метрики на сфере.

Справедлива следующая оценка:

$$\mathrm{Pr}_n\{|f(x) - M_f| > \varepsilon\} < 2\ e^{-(\varepsilon/rL)^2 n/2}.$$

При этом стандартное отклонение величины $|f(x) - M_f|$ от нуля, если $n \gg 1$, будет порядка $Lr/\sqrt{n}$.

Это вариант нелинейного закона больших чисел.

d) Многомерный шар и нормальное распределение.

Напомним, что объём v_n единичного n-мерного шара (шара единичного радиуса) в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выражается формулой

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}\ .$$

Из этой формулы следует, что при $n \gg 1$ имеется асимптотика $v_n \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}}\right)^n$. Кроме того, поскольку шар единичного объёма в $\mathbb{R}^n$ имеет радиус $r_n = v_n^{-\frac{1}{n}}$, то $r_n \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$ при $n \gg 1$.

А как физика выделяет шар, радиус которого имеет порядок корня квадратного из размерности пространства?

Рассмотрим однородный газ в какой-то покоящейся ёмкости. Пусть $v_1, ..., v_n$ — трёхмарные векторы скорости молекул. В стандартных условиях естественно считать, что совокупная кинетическая энергия $E_n = \Sigma_{i=1}^n \frac{1}{2} m v_i^2$ молекул пропорциональна их количеству n, т.е. $E_n = \bar{e}\ n$ и $\Sigma_{i=1}^n v_i^2 = \frac{2\bar{e}}{m}\ n$. Последнее соотношение определяет сферу радиусом $\sqrt{\frac{2\bar{e}}{m}\ n}$ в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$. Так из физических соображений возникает выделенный порядок $r_n \asymp \sqrt{n}$ величины радиуса сферы в пространстве размерности $n \gg 1$.

Проекция на прямую шара $\mathbb{B}^n(\sigma\sqrt{n})$, наделённого вероятностной мерой, при $n \to +\infty$ порождает на прямой нормальное распределение с плотностью

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Поскольку почти весь объём многомерного шара сосредоточен у граничной сферы, то же относится и к проекции многомерной сферы $\mathbb{S}^n(\sigma\sqrt{n})$, наделённой вероятностной мерой.

Отсюда, например, следует закон Максвелла распределения молекул по скоростям и по кинетическим энергиям при заданной температуре равновесного газа. (Температура, напомним, определяется средней кинетической энергией молекул.)

4. Заключительные замечания.

В первом разделе этой статьи я упомянул, что обратился к ЮИ не столько по поводу статистической физики, сколько по поводу понадобившейся мне в моей статье ссылки на ставшую библиографической редкостью его небольшую книжку «Вычислимое и невычислимое». В той моей заметке я отметил весьма примечательное, но не широко известное обстоятельство, характеризующее широту научных горизонтов Ю.И.Манина. Я хотел бы здесь это напомнить.

В 2022 году Нобелевской премии по физике были удостоены Алэн Аспэ, Джон Клаузер и Антон Цайлингер.

Официальное сообщение Шведской Академии Наук звучало так [4]:

The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the Nobel Prize in Physics 2022 jointly to

Alain Aspect, John F. Clauser and Anton Zeilinger

“for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science”

Чуть менее лаконично это выглядит так:

Using groundbreaking experiments, Alain Aspect, John Clauser and Anton Zeilinger have demonstrated the potential to investigate and control particles that are in entangled states. What happens to one particle in an entangled pair determines what happens to the other, even if they are really too far apart to affect each other. The laureates’ development of experimental tools has laid the foundation for a new era of quantum technology.

Грядёт эра квантовых технологий. Настольный квантовый компьютер пока не построен, но поразительны успехи теоретиков квантовых вычислений и квантовой теории информации, включая телепортацию. Прошло не так уж много лет со времени пионерской работы Шора [5], а сейчас этому уже обучают поколения студентов.

Так вот, идею квантовых вычислений и квантового компьютера, наряду с замечательным физиком Ричардом Фейнманом [6], впервые высказал, тоже замечательный, но математик, Юрий Манин [2].

«Многомерность» относится не только к рассмотренным выше математическим и физическим явлениям, но и к личности учёного[2] Юрия Ивановича Манина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ю.И.Манин, Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008.
Mathematics as Metaphor: Selected Essays of Yuri I. Manin
American Math. Soc., 2007; 232 pp.
`https://bookstore.ams.org/view?ProductCode=CWORKS/20`

[2] Ю.И.Манин, Вычислимое и невычислимое. М.: Сов. радио, 1980.[3]

[3] C.E.Shannon, Communication in the Presence of Noise. Proceedings of the IRE, **37**, no. 1, pp. 10–21, Jan. 1949.

[4] `https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/press-release/`.

[5] P.W.Shor, Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. SIAM J. Comput. **26**, 5, 1484–1509. (Expanded version of Shor's paper of 1994).

[6] R.P.Feynman, Feynman Lectures on Computation. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. The Advanced Book Program, (Lectured 1983), Published 1996.

---

[2]В исходном высоком понимании слова, в котором на дверях Академии Наук можно писать «Плох тот академик, который не хотел бы быть учёным».

[3]Это издание уже библиографическая редкость, но часть книги [2], содержащая нужный нам сейчас фрагмент, воспроизведена в книге [1]. См. там раздел Вычислимость и язык, с. 72, 73. Весьма рекомендую просмотреть там раздел Математика и физика, а ещё лучше, прочитать всю эту книжку, интересную во многих аспектах. В том или ином виде сегодня уже всё можно найти в интернете.