Н.Л. Кудрявцев

Лекции по математическому анализу. Часть II

2-е издание, переработанное и исправленное

Рекомендовано Ученым советом механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия

Москва
2021

УДК 517
ББК 22.161
К88

Рецензент: доктор физико-математических наук профессор В.В. Власов

Кудрявцев Н.Л.
К88 Лекции по математическому анализу. Часть II: Учебное пособие. — М.: ООО "Сам полиграфист" 2021. — 200 с.
ISBN 978-5-00166-339-3

Учебное пособие включает следующие разделы математического анализа: функциональные последовательности и ряды; интегралы, зависящие от параметра, включая несобственные интегралы; кратный интеграл Римана; криволинейные и поверхностные интегралы; элементы гармонического анализа. Пособие написано на основании лекций, читаемых автором более двадцати лет на геологическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова студентам, обучающимся по направлению "геофизика". Предназначено для студентов естественных факультетов университетов, а также для обучения специалистов по направлениям, требующим углубленной подготовки по высшей математике.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-00166-339-3 (Ч. II)
ISBN 978-5-00166-340-9 (общ.)

Моим родителям посвящается

Предисловие ко второму изданию

Эта книга является новым изданием учебного пособия "Лекции по математическому анализу", изданной в 2016 г. В новом издании исправлены замеченные опечатки и неточности, переработано изложение некоторых вопросов, добавлены примеры и замечания. Ссылки на "Лекции по математическому анализу. Часть I" имеют следующий формат: перед номером лекции ставится 1, отделенная от номера лекции точкой. Автор благодарен геологическому факультету МГУ им. М.В. Ломоносова за поддержку, без которой эта книга не была бы издана.

Автор не возражает против копирования данной книги и ее распространения в печатной и электронной форме в неизменном виде в некоммерческих целях и с сохранением копирайта, принадлежащего автору.

Москва, 2021 год Н. Кудрявцев

Предисловие

Данное пособие написано на основе курса лекций по математическому анализу, читаемого автором в течение многих лет студентам–геофизикам геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Оно является продолжением ранее изданных лекций автора[1]. В него включен материал 3 семестра, в котором изучаются следующие темы: функциональные последовательности и ряды; интегралы, зависящие от параметра, включая несобственные

[1]Н.Л. Кудрявцев "Лекции по математическому анализу". М.: 2013.

интегралы; кратный интеграл Римана; криволинейные и поверхностные интегралы; элементы гармонического анализа. Ссылки в настоящем пособии даются на книгу 2013 г.

При написании данной книги автор стремился к тому, чтобы читатель получил базовые знания, необходимые для приложений и освоения других математических дисциплин, а также чтобы лица, заинтересованные в углубленном изучении математического анализа, могли самостоятельно освоить более глубокие и тонкие аспекты теории, излагаемые как в фундаментальных курсах анализа, так и в специальной литературе.

В настоящем пособии нашли отражение более чем 30–летний опыт работы на кафедре математического анализа механико–математического факультета и преподавания на различных факультетах МГУ им. М.В. Ломоносова. Без постоянного общения с коллегами по кафедре, которое сформировало представления автора о том, как должен выглядеть курс математического анализа, данная книга была бы невозможна. Всем им автор глубоко признателен и благодарен.

В заключение хотелось бы также поблагодарить геологический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова за помощь в издании лекций.

Москва, 2016 Н. Кудрявцев

Содержание

ЛЕКЦИЯ 1
Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимости функциональных последовательностей. sup–критерий и критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Пусть E — произвольное множество. Если каждому натуральному числу k сопоставлена функция $f_k : E \to \mathbf{R}$, то говорят, что (на множестве E) задана последовательность функций $(f_k)_{k=1}^{+\infty} = (f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$.

Определение 1. *Функциональная последовательность $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ ограничена на множестве E, если существует постоянная $C > 0$, т.ч. для всех $k \in \mathbf{N}$ и всех $x \in E$: $|f_k(x)| \leq C$.*

Определение 2. *Функциональная последовательность $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ сходится в точке $x_0 \in E$, если имеет предел числовая последовательность $(f_k(x_0))_{k=1}^{+\infty}$.*

Определение 3. *Функциональная последовательность $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ сходится на множестве E (поточечно сходится на множестве E), если она сходится в каждой точке множества E, т.е для любой фиксированной точки $x \in E$ существует предел $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ числовой последовательности $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$. В противном случае функциональная последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ называется расходящейся на множестве E.*

Если последовательность $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ сходится на E, то на этом множестве определена функция $f(x) \doteq \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$, которая называется *поточечным* пределом функциональной последовательности $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$. Для обозначения поточечной сходимости используется запись $f_k(x) \overset{E}{\to} f(x)$ $(k \to +\infty)$, или $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) \overset{E}{=} f(x)$.

Пусть на множестве E задана последовательность функций $(a_k(x))_{k=1}^{+\infty}$. Образуем новую последовательность, членами которой являются функции

$$S_n(x) \doteq a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Определение 4. *Функциональным рядом с членами* $a_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *называется функциональная последовательность* $(S_n(x))_{n=1}^{+\infty}$. *Функциональный ряд обозначается символом* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$.

Члены последовательности $(S_n(x))_{n=1}^{+\infty}$ принято называть *частичными суммами* ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$.

Определение 5. *Ряд* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(x)$ *называется* n*–м остатком ряда* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$.

Определение 6. *Функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ *сходится в точке* $x_0 \in E$, *если сходится числовой ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x_0)$.

В силу определения сходимости числового ряда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится в точке x_0, если в точке x_0 существует предел $\lim_{n\to+\infty} S_n(x_0)$ последовательности его частичных сумм.

Определение 7. *Функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ *сходится на множестве* E *(поточечно сходится на* E*), если он сходится в каждой точке множества* E. *В противном случае ряд называется расходящимся на* E.

Другими словами, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ на множестве E означает сходимость на E функциональной последовательности $(S_n(x))_{n=1}^{+\infty}$. Если последовательность $(S_n(x))_{n=1}^{+\infty}$ сходится на E, то на этом множестве определена функция $S(x) \doteq \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, которая называется суммой ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$, что записывается, как $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) = S(x)$. Про функцию $S(x)$ говорят также, что она раскладывается в ряд $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ по системе функций $\{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x), \ldots\}$.

Определение 8. *Если на множестве* E *сходится ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(x)|$, *то функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ *называется абсолютно сходящимся на множестве* E.

Определение 9. *Ряд сходится условно на множестве, если он сходится на нем, но не абсолютно.*

Теорема 1. *Если функциональный ряд сходится абсолютно на множестве* E, *то он сходится на* E.

Справедливость утверждения следует из соответствующего свойства числовых рядов.

Пример. Исследуем на сходимость и абсолютную сходимость функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k x^k}{k}$. Очевидно, что в точке $x = 0$ ряд сходится (и при том абсолютно).

Зафиксируем $x_0 \neq 0$ и рассмотрим числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k x_0^k}{k}$. Начнем с изучения его абсолютной сходимости. Воспользуемся признаком Даламбера ($a_k(x_0) = \dfrac{(-1)^k x_0^k}{k}$): $\left|\dfrac{a_{k+1}(x_0)}{a_k(x_0)}\right| = \left|\dfrac{x_0^{k+1} k}{x_0^k (k+1)}\right| = |x_0| \dfrac{k}{k+1} \to |x_0|$ при $k \to +\infty \Rightarrow$ при $|x_0| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $|x_0| > 1$ ряд расходится (ибо в этом случае $|a_k(x_0)|$ не стремится к нулю при $k \to +\infty$, а тогда и $a_k(x_0)$ не стремится к нулю). Осталось выяснить, что происходит, если $x_0 = \pm 1$. В точке $x_0 = -1$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k (-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится (см. пример 2 лекции 1.44). Если $x_0 = 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ сходится, но не абсолютно (см. пример лекции 1.45). Следовательно, ряд сходится на полуинтервале $(-1, 1]$ и абсолютно — на интервале $(-1, 1)$.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Пусть имеется сходящаяся на множестве E функциональная последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$. Тогда возникают вопросы о свойствах предельной функции $f(x)$. Как они связаны со свойствами членов последовательности? Когда, например, можно говорить о непрерывности, дифференцируемости или интегрируемости функции $f(x)$? Ответы на эти вопросы можно дать в терминах равномерной сходимости.

Определение 10. *Функциональная последовательность $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ сходится равномерно к функции f на множестве E ($f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f$) при $k \to +\infty$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}, \;\; \text{т.ч.} \;\; \forall k > k_\varepsilon \;\; \text{и} \;\; \forall x \in E: \;\; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Напишем для сравнения на $\varepsilon - k$ языке определение поточечной сходимости на множестве E:

$\forall x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists k' = k'(x, \varepsilon) \in \mathbf{N},$ т.ч. $\forall k > k' :\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon,$

т.е. выбор k', в отличие от равномерной сходимости, определяется не только заданием числа ε, но и выбором точки x, т.к. для каждого фиксированного x рассматривается своя числовая последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$.

Из определений равномерной и поточечной сходимостей на множестве E следует, что если $f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f$ при $k \to +\infty$, то $f_k \overset{E}{\to} f$. Следовательно, чтобы последовательность сходилась равномерно на некотором множестве необходимо, чтобы она сходилась поточечно на нем к тому же пределу.

Замечание. Очевидно, что $f_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ при $k \to +\infty \Leftrightarrow f_k(x) - f(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Ясно, что если последовательность сходится равномерно на некотором множестве, то она сходится равномерно и на любом его подмножестве.

Теорема 2($\sup$**–критерий равномерной сходимости).** *Для того чтобы* $f_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$ *при* $k \to +\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность* $\sup_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| \to 0$ *при* $k \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f\ (k \to +\infty) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$ и $\forall x \in E$: $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow$ в силу определения верхней грани $\forall k > k_\varepsilon$: $\sup_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ $\Rightarrow$ имеет место равенство $\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| = 0$.

Обратно, если $\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$ выполняется неравенство $\sup_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Из определения верхней грани следует, что $\forall k > k_\varepsilon$ и $\forall x \in E$: $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f\ (k \to +\infty)$. Теорема доказана.

Примеры.

1) Всякая числовая последовательность сходится к своему пределу равномерно на любом множестве.

2) Исследуем последовательность функций $f_k(x) = x^k$ на равномерную сходимость на a) отрезке $[0, q]$, $q \in (0, 1)$ и b) полуинтервале $[0, 1)$. Как было отмечено, равномерным пределом функциональной последовательности может быть только ее поточечный предел. Поэтому сначала выясним, что является поточечным пределом данной последовательности. На обоих множествах $0 < x < 1 \Rightarrow x^k \to 0$ при $k \to +\infty$. Теперь воспользуемся sup–критерием равномерной сходимости. В первом случае имеем $\sup_{x\in[0,q]} |x^k - 0| = \sup_{x\in[0,q]} x^k \le q^k \to 0 \Rightarrow x^k \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ $(k \to +\infty)$. Во втором случае $\sup_{x\in[0,1)} |x^k - 0| = \sup_{x\in[0,1)} x^k = \lim_{x\to 1-0} x^k = 1$ (предпоследний переход выполнен на основании теоремы 1 из лекции 1.13. Впрочем, эта верхняя грань легко подсчитывается непосредственно) $\Rightarrow$ на полуинтервале $[0, 1)$ последовательность $(x^k)_{k=1}^{+\infty}$ не сходится равномерно.

Теорема 3(критерий Коши равномерной сходимости). *Последовательность* $f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f$ $(k \to +\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \text{т.ч.}\ \forall k > k_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{N}\ \text{и}\ \forall x \in E : |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$ и $\forall x \in E$: $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall k > k_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in E$:

$$|f_{k+p}(x) - f_k(x)| = |f_{k+p}(x) - f(x) + f(x) - f_k(x)| \le$$

$$|f_{k+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Обратно. Условие теоремы (1) означает в частности, что в каждой фиксированной точке $x \in E$ числовая последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ является последовательностью Коши и, следовательно, сходится. Значит, ФП $f_k(x)$ сходится поточечно на множестве E. Пусть $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$, $x \in E$. Переходя к пределу при $p \to$

$+\infty$ в (1), получим, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N},$ т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$ и $\forall x \in E:$ $|f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_k \overset{E}{\rightrightarrows} f \;\; (k \to +\infty)$. Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ 2

Равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости ряда. sup–критерий равномерной сходимости. Необходимое условие равномерной сходимости. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей.

Определение 1. *Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на множестве E, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно на множестве E.*

Если $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ при $n \to +\infty$, то пишут $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$.

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится поточечно на множестве E и $S(x)$ — его сумма. Тогда функция $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ является суммой n–го остатка ряда: $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(x)$. Следовательно, равномерная сходимость ряда на множестве E, т.е. условие $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ при $n \to +\infty \Leftrightarrow r_n(x) = S(x) - S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0 \Leftrightarrow$ $\sup_{x \in E} |r_n(x)| = \sup_{x \in E} |\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(x)| \to 0$ при $n \to +\infty$. Полученная запись условия равномерной сходимости ряда не содержит в явном виде его сумму, что делает ее удобной для применения, ибо на практике явный вид суммы ряда $S(x)$ в большинстве случаев не известен. Предположение о поточечной сходимости ряда не ограничивает общности, т.к. поточечная сходимость ряда является необходим условием его равномерной сходимости.

Теорема 1(необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на множестве E, то $a_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из представления $a_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x),\ k = 2, 3, \ldots$. Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $S_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ $(k \to +\infty)$, то $\exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$ и $\forall x \in E$: $|S_k(x) - S(x)| < \varepsilon$. Поэтому $\forall k > k_\varepsilon + 1$ и $\forall x \in E$ имеем

$$|a_k(x)| = |S_k(x) - S_{k-1}(x)| = |S_k(x) - S(x) + S(x) - S_{k-1}(x)| \leq$$

$$|S_k(x) - S(x)| + |S(x) - S_{k-1}(x)| < 2\varepsilon.$$

Значит, $a_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to +\infty$.

Теорема 2(критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходился равномерно на множестве E необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in E$:*

$$|a_{k+1}(x) + a_{k+2}(x) + \ldots + a_{k+p}(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ на множестве E означает, что последовательность его частичных сумм $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ при $n \to +\infty$. А это равносильно тому, что для последовательности $S_n(x)$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \text{т.ч. } \forall k > k_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{N} \text{ и } \forall x \in E: \ |S_{k+p}(x) - S_k(x)| < \varepsilon.$$

Так как $a_{k+1}(x) + a_{k+2}(x) + \ldots + a_{k+p}(x) = S_{k+p}(x) - S_k(x)$, то теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на множестве E к функции $S(x)$ и $b(x)$ — ограниченная на множестве E функция. Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} b(x) a_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} b(x)S(x)$. В частности, для произвольного действительного числа λ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda a_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} \lambda S(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $\sum_{k=1}^{n} b(x) a_k(x) = b(x) \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = b(x) S_n(x)$. Следовательно,

$$\sup_{x \in E} |b(x)S_n(x) - b(x)S(x)| = \sup_{x \in E} |b(x)||S_n(x) - S(x)| \leq$$

$$\sup_{x\in E}|b(x)|\sup_{x\in E}|S_n(x)-S(x)|\to 0 \text{ при } n\to+\infty,$$

ибо $S_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}S(x)$, а функция $b(x)$ ограничена на множестве E. Значит, на основании sup–критерия $\sum_{k=1}^{+\infty}b(x)a_k(x)\overset{E}{\rightrightarrows}b(x)S(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть ряды $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k(x)$ и $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k(x)$ сходятся равномерно на множестве E. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k(x)+b_k(x))$ также сходится равномерно на E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k(x)$, $S'_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$, $S''(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_k(x)$ и $S''_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)$. Тогда

$$\sup_{x\in E}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k(x)+b_k(x))-(S'(x)+S''(x))\right|=$$

$$\sup_{x\in E}|S'_n(x)+S''_n(x)-S'(x)-S''(x)|\le$$

$$\sup_{x\in E}(|S'_n(x)-S'(x)|+|S''_n(x)-S''(x)|)\le$$

$$\sup_{x\in E}|S'_n(x)-S'(x)|+\sup_{x\in E}|S''_n(x)-S''(x)|\to 0 \text{ при } n\to+\infty.$$

В силу sup–критерия лемма доказана.

Теорема 3(признак Вейерштрасса). *Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k(x)$, т.ч. $\forall x\in E$ и $\forall k\in\mathbf{N}$: $|a_k(x)|\le\alpha_k$. Если числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon>0$. В силу критерия Коши сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k$ $\exists n_\varepsilon\in\mathbf{N}$, т.ч. $\forall n>n_\varepsilon$ и $\forall p\in\mathbf{N}$: $\sum_{k=n}^{n+p}\alpha_k<\varepsilon$. Поскольку $\forall x\in E$: $|a_k(x)|\le\alpha_k$, то $\forall n>n_\varepsilon$, $\forall p\in\mathbf{N}$ и $\forall x\in E$:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k(x)\right|\le\sum_{k=n}^{n+p}|a_k(x)|\le\sum_{k=n}^{n+p}\alpha_k<\varepsilon.$$

Следовательно, не только для ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$, но и для $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(x)|$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости на множестве E. Теорема доказана.

Пример. Найдем множество, на котором ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ сходится поточечно, и исследуем ряд на равномерную сходимость на этом множестве. Из признака Даламбера следует, что данный ряд сходится абсолютно $\forall x \neq 0$. Сходимость (абсолютная) при $x = 0$ очевидна. Следовательно, ряд сходится и при том абсолютно на $\mathbf{R}$. Проверим выполняется ли необходимое условие равномерной сходимости ряда на $\mathbf{R}$. Так как $\sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\dfrac{x^k}{k!}\right| = \dfrac{1}{k!} \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^k| = +\infty$, то равномерной сходимости нет. Однако на любом отрезке $|x| \leq a$ ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, ибо в этом случае $\left|\dfrac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{a^k}{k!}$, а числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^k}{k!}$ сходится согласно признаку Даламбера.

Равномерная сходимость знакопеременных функциональных рядов

Приведем без доказательств еще два признака равномерной сходимости функциональных рядов (сравните с теоремами 5 и 6 лекции 1.45).

Теорема 4(признак Дирихле). *Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполнены следующие условия*

1) *$\exists$ постоянная $C > 0$, т.ч. $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in E$: $|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \leq C$,*

2) *$\forall x \in E$ числовая последовательность $(b_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ монотонна,*

3) *$b_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to +\infty$.*

Теорема 5(признак Абеля). *Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполнены следующие условия*

1) *ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на множестве E,*

2) *$\forall x \in E$ числовая последовательность $(b_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ монотонна,*

3) *$\exists$ постоянная $L > 0$, т.ч. $\forall k \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in E$: $|b_k(x)| \leq L$.*

Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей

Пусть D — произвольное подмножество $\mathbf{R}^n$.

Теорема 6. *Пусть* $f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f$ *при* $k \to +\infty$ *и* $\forall k$ *функции* $f_k \in C(x_0)$, $x_0 \in D$. *Тогда* $f \in C(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим приращение

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|$$

(k выберем позже).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f$, то $\exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$ и $\forall x \in D$ (а значит и для $x = x_0$): $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Теперь возьмем какое–либо $k > k_\varepsilon$. По условию $f_k \in C(x_0) \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon, k)$, т.ч. $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap D$: $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in U(x_0, \delta) \cap D$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \Rightarrow f \in C(x_0)$. Теорема доказана.

Замечание. Из утверждения теоремы 6 следует, что имеет место равенство повторных пределов

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to +\infty} f_k(x) = \lim_{k \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Действительно, с одной стороны $f(x_0) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x_0) = \lim_{k \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$(использовали то, что $f_k \in C(x_0)$). С другой стороны, согласно теореме 6 функция $f \in C(x_0)$ и тогда $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$.

Следствие. *Если* $f_k \overset{D}{\rightrightarrows} f$ *при* $k \to +\infty$ *и* $\forall k$ *функции* $f_k \in C(D)$, *то* $f \in C(D)$.

Доказательство следует из теоремы 6 и определения непрерывности на множестве.

Переформулируем теорему 6 для функциональных рядов.

Теорема 7. *Пусть* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$ *и* $a_k(x) \in C(x_0)$ $\forall k$. *Тогда сумма ряда* $S(x) \in C(x_0)$.

Справедливость теоремы 7 сразу следует из теоремы 6 и определения равномерной сходимости функциональных рядов, т.к. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \in C(x_0)$ как конечные суммы непрерывных функций.

Замечание. Поскольку равномерная сходимость ряда означает равномерную сходимость последовательности его частичных сумм, то согласно предыдущему замечанию

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} S_n(x),$$

т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} a_k(x)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} a_k(x).$$

Значит, из теоремы 7 следует, что знаки предела и суммирования перестановочны, т.е. что при сделанных предположениях ряд ведет себя так же, как и конечная сумма непрерывных в данной точке функций.

Теорема 8. *Пусть* $f_k(x) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} f(x)$ *при* $k \to +\infty$ *и* $\forall k \ f_k(x) \in C[c,d]$. *Тогда* $\forall x_0 \in [c,d]$:

$$\int_{x_0}^{x} f_k(t)\,dt \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \ k \to +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $f_k \in C[c,d] \Rightarrow$ на основании теоремы 6 предельная функция $f \in C[c,d]$. Поэтому $f_k, \ f \in R[c,d]$ (теорема 2 лекции 1.25). И тогда в силу леммы 4 лекции 1.25 интегралы $\int_{x_0}^{x} f_k(t)\,dt$ и $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ имеют смысл. Оценим

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_k(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} (f_k(t) - f(t))\,dt \right| \le$$

$$\left| \int_{x_0}^{x} |f_k(t) - f(t)|\,dt \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \sup_{u\in[c,d]} |f_k(u) - f(u)|\,dt \right| =$$

$$\sup_{u\in[c,d]} |f_k(u) - f(u)| \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \sup_{u\in[c,d]} |f_k(u) - f(u)||x - x_0| \le$$

$$\sup_{u\in[c,d]} |f_k(u) - f(u)|(d - c).$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in[c,d]} \left| \int_{x_0}^{x} f_k(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right| \le \sup_{u\in[c,d]} |f_k(u) - f(u)|(d - c) \to 0$$

при $k \to +\infty$, ибо $f_k \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} f$. Теорема доказана.

Замечания.

1. Из теоремы 8 следует равенство $\lim_{k\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_k(t)\, dt \overset{[c,d]}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$. Поскольку $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) \overset{[c,d]}{=} f(x)$, то получаем, что $\forall x \in [c, d]$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_k(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{k\to+\infty} f_k(t)\, dt,$$

означающее, что в сделанных предположениях операции интегрирования и предельного перехода перестановочны. В частности для $x_0 = c$ и $x = d$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{c}^{d} f_k(t)\, dt = \int_{c}^{d} \lim_{k\to+\infty} f_k(t)\, dt.$$

2. В теореме 8 можно отказаться от требования непрерывности членов последовательности на отрезке $[c, d]$: равномерный предел сохраняет не только непрерывность, но и интегрируемость. А именно, если члены последовательности $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ интегрируемы на $[c, d]$ и $f_k(x) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $k \to +\infty$, то $f \in R[c, d]$ и справедливо утверждение теоремы 8. Действительно, покажем, что в этом случае для функции f выполняется критерий Дарбу интегрируемости (см. теорему 1 лекции 1.25). Сначала проверим, что функция $f(x)$ ограничена на $[c, d]$. Поскольку $f_k(x) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} f(x)$, то для $\varepsilon = 1$ $\exists k_0 \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall x \in [c, d]$: $|f(x) - f_{k_0}(x)| < 1 \Rightarrow \forall x \in [c, d]$: $|f(x)| = |f(x) - f_{k_0}(x) + f_{k_0}(x)| \le |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x)| < 1 + M_0$, ибо $|f_{k_0}(x)| < M_0$ $\forall x \in [c, d]$, так как $f_{k_0} \in R[c, d]$ (см. теорему 1 лекции 24). Значит, функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[c, d]$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $\exists k_1 = k_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, т.ч. $|f_{k_1}(x) - f(x)| < \varepsilon$ для $\forall x \in [c,d] \Rightarrow f_{k_1}(x) - \varepsilon < f(x) < f_{k_1}(x) + \varepsilon$ для $\forall x \in [c,d]$. Поскольку $f_{k_1} \in R[c,d]$, то $\exists \delta = \delta(k_1, \varepsilon) = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T[c,d]$ с $\lambda(T) < \delta$: $S(f_{k_1}, T) - s(f_{k_1}, T) < \varepsilon$.

Возьмем какое-либо разбиение $T[c,d]$ с $\lambda(T) < \delta$. В силу оценок для $f(x)$ имеем

$$\sup_{x\in\Delta_i} f(x) \leq \sup_{x\in\Delta_i} (f_{k_1}(x) + \varepsilon) = \sup_{x\in\Delta_i} f_{k_1}(x) + \varepsilon,$$

$$\inf_{x\in\Delta_i} f(x) \geq \inf_{x\in\Delta_i} (f_{k_1}(x) - \varepsilon) = \inf_{x\in\Delta_i} f_{k_1}(x) - \varepsilon.$$

Следовательно, $S(f,T) = \sum_i \sup_{x\in\Delta_i} f(x)\Delta x_i \leq \sum_i (\sup_{x\in\Delta_i} f_{k_1}(x) + \varepsilon)\Delta x_i = S(f_{k_1}, T) + (d-c)\varepsilon$. Аналогично $s(f,T) \geq s(f_{k_1}, T) - (d-c)\varepsilon$. Значит, $\forall T[c,d]$ с $\lambda(T) < \delta$ имеем $S(f,T) - s(f,T) \leq S(f_{k_1}, T) - s(f_{k_1}, T) + 2(d-c)\varepsilon < \varepsilon + (d-c)\varepsilon = \varepsilon(1 + 2(d-c)) \Rightarrow$ функция $f \in R[a,b]$.

Можно доказать, что интегрируемость предельной функции и возможность предельного перехода под знаком интеграла вытекает из гораздо менее обременительных условий, нежели равномерная сходимость последовательности.

Переформулируем для функциональных рядов и эту теорему.

Теорема 9. *Пусть* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} S(x)$ *и* $a_k(x) \in C[c,d]$ $\forall k$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt,$$

причем ряд сходится равномерно на отрезке $[c,d]$.

Доказательство следует из теоремы 8 и того, что $\forall n \in \mathbf{N}$: $\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} a_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (\sum_{k=1}^{n} a_k(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt$.

Замечание. Из утверждения теоремы 9 следует, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(t) \right) dt,$$

которое означает, что при сделанных предположениях операции суммирования и интегрирования перестановочны (для конечных сумм это следует из свойства 2 интеграла лекции 1.24).

ЛЕКЦИЯ 3

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов и последовательностей (продолжение). Полнота метрического пространства $C[a,b]$. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.

Теорема 1. *Пусть дан ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$, *т.ч.*

1) $a_k(x) \in C^1[c,d]$ $\forall k$,

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k'(x) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} \sigma(x)$,

3) $\exists x_0 \in [c,d]$, *т.ч. числовой ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x_0)$ *сходится.*

Тогда

1) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} S(x)$,

2) $S(x) \in C^1[c,d]$,

3) $S'(x) = \sigma(x)$ *на отрезке* $[c,d]$, *т.е.* $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k'(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 9 лекции 2 ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k'(x)$ можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(x) - a_k(x_0))$$

причем полученный ряд сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. По условию числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x_0)$ сходится, а так как его члены не зависят от x, то он сходится равномерно на $[c,d]$. Поскольку $a_k(x) = (a_k(x) - a_k(x_0)) + a_k(x_0)$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на $[c,d]$ к своей сумме $S(x)$ как ряд, общий член которого является суммой членов равномерно сходящихся рядов (лемма 2 лекции 2). Значит,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(x) - a_k(x_0)) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x_0) = S(x) - S(x_0)$$

и, следовательно,

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = S(x) - S(x_0).$$

Откуда

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt + S(x_0).$$

Поскольку по теореме 7 лекции 2 $\sigma(t) \in C[c,d]$, то по свойству интегралов с переменными пределами интегрирования (теорема 2 лекции 1.27) $\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt \in C^1[c,d]$ и $(\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt)' = \sigma(x)$. Поэтому $S(x) \in C^1[c,d]$ и $S'(x) = \sigma(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема показывает, что при сделанных предположениях операции дифференцирования и суммирования перестановочны, т.е. ряд ведет себя так же, как и конечная сумма непрерывно дифференцируемых функций.

Для функциональных последовательностей теорема 1 переписывается следующим образом.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность* $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$, *т.ч.*

1) $f_k \in C^1[c,d]\ \forall k$,

2) $f'_k \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} \varphi$ *при* $k \to +\infty$,

3) $\exists x_0 \in [c,d]$, *т.ч. числовая последовательность* $(f_k(x_0))_{k=1}^{+\infty}$ *сходится.*

Тогда

1) $f_k \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} f$ *при* $k \to +\infty$,

2) $f \in C^1[c,d]$,

3) $f'(x) = \varphi(x)$ *на* $[c,d]$, *т.е.* $(\lim_{k\to+\infty} f_k(x))' = \lim_{k\to+\infty} f'_k(x)$.

Замечание. Из условий $g_k \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} g$, $g\ , g_k \in C^1[c,d]$, $k \in \mathbf{N}$ не следует даже поточечная сходимость последовательности $(g'_k(x))$ на $[c,d]$. Действительно, $g_k(x) \doteq \dfrac{\cos kx}{\sqrt{k}} \overset{[0,\pi]}{\rightrightarrows} 0$, но последовательность с общим членом $g'_k(x) = -\sqrt{k}\sin kx$ расходится в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Полнота метрического пространства $C[a,b]$

Превратим множество $C[a,b]$ всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций в метрическое пространство, введя в нем расстояние. А именно, для произвольных функций $f,\ g \in C[a,b]$ положим

$$d(f,g) \doteq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|.$$

Отметим, хотя это не будет использовано дальше, что $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ (это следует из того, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $|f(x) - g(x)|$ согласно теореме 2 лекции 1.14 достигает своего максимума). Поэтому $d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Как и во всяком метрическом пространстве, в $C[a,b]$ определена сходимость: если $f_k,\ f \in C[a,b]$ $(k \in \mathbf{N})$, то $f_k \xrightarrow{d} f$ $(k \to +\infty) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} d(f_k, f) \to 0$ $(k \to +\infty) \Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)| \to 0$ $(k \to +\infty) \Leftrightarrow f_k \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $k \to +\infty$, т.е. сходимость в метрическом пространстве $C[a,b]$ — это равномерная сходимость.

Теорема 3. *Метрическое пространство $C[a,b]$ является полным метрическим пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ фундаментальна в метрическом пространстве $C[a,b]$, т.е. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$: $d(f_k, f_{k+p}) = \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f_{k+p}(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall k > k_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in [a,b]$: $|f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$. Это означает, что для последовательности $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости на отрезке $[a,b] \Rightarrow \exists f$, т.ч. $f_k \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $k \to +\infty$ и при этом $f \in C[a,b]$ как равномерный предел последовательности непрерывных функций (см. следствие теоремы 6 из лекции 2). Поскольку условие $f_k \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow f_k \xrightarrow{d} f$ $(k \to +\infty)$, то фундаментальная последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{+\infty}$ имеет предел в метрическом пространстве $C[a,b]$, равный f. В силу произвольности последовательности теорема доказана.

Степенные ряды

Определение 1. *Степенным рядом называется ряд вида*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{2}$$

где z, z_0, $a_k \in \mathbf{R}\,(\mathbf{C})$, $k = 0, 1, \dots$. Числа a_k называются коэффициентами степенного ряда.

Если считать, что $0^0 = 1$, то $\forall z$: $a_0 = a_0(z - z_0)^0$. Тогда

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Заменой $x = z - z_0$ степенной ряд (2) преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k. \tag{3}$$

Поэтому в дальнейшем в основном будут рассматриваться степенные ряды вида (3).

Теорема 4(первая теорема Абеля). *Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то $\forall x \in \mathbf{R}\,(\mathbf{C})$, т.ч. $|x| < |x_0|$ степенной ряд сходится абсолютно.*

Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ расходится в точке $x_0 \neq 0$, то он расходится и $\forall x \in \mathbf{R}\,(\mathbf{C})$, т.ч. $|x| > |x_0|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ сходится. Следовательно, $\lim_{k\to+\infty} a_k x_0^k = 0$. Тогда $\exists C > 0$, т.ч. $\forall k$: $|a_k x_0^k| < C$. Для произвольного x имеем

$$|a_k x^k| = |a_k x_0^k| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k < C \left|\frac{x}{x_0}\right|^k.$$

Пусть $q \doteq |\dfrac{x}{x_0}|$. При $|x| < |x_0|$ значения q лежат в полуинтервале $(0, 1)$. Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ сходится. А тогда согласно признаку сравнения (теорема 5 лекции 1.44) сходится и ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k|$.

2) Пусть ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ расходится. Тогда $\forall x$: $|x| > |x_0|$ степенной ряд (3) сходиться не может, ибо в противном по доказанному в пункте 1 он был бы абсолютно сходящимся в точке x_0 и, следовательно, сходящимся. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Пусть дан степеной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Он всегда сходится в точке $x = 0$. Рассмотрим множество E, состоящее из неотрицательных действительных чисел y, т.ч. при $x = y$ ряд (3) сходится. Так как $0 \in E$, то $E \neq \emptyset$. Пусть $R = \sup E$. Тогда $R \in [0, +\infty]$.

Если $R > 0$ (R может обращаться и в $+\infty$) и $|x| < R$, то по определению sup $\exists y \in E$, т.ч. $|x| < y \leq R$. Так как $y \in E$, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k y^k$ сходится. А тогда по первой теореме Абеля сходится $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$. Таким образом, для $\forall x$, т.ч. $|x| < R$ степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ сходится и при том абсолютно.

Если $R < +\infty$ и $|x| > R$, то $\exists x_0$, т.ч. $|x| > x_0 > R$. В силу определения R ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ расходится, следовательно, по первой теореме Абеля расходится и $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

Итак, R обладает тем свойством, что $\forall x$, т.ч. $|x| < R$ степенной ряд (3) сходится абсолютно, а $\forall x$, т.ч. $|x| > R$ степенной ряд расходится.

Определение 2. *Величина $R \in [0, +\infty]$ называется радиусом сходимости степенного ряда (3), если $\forall x$, т.ч. $|x| < R$ степенной ряд сходится абсолютно, а $\forall x$, т.ч. $|x| > R$ степенной ряд расходится.*

Определение 3. *Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда (3).*

Для ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ интервал сходимости имеет вид $|x - x_0| < R$, или $(x_0 - R, x_0 + R)$, если $R < +\infty$, и совпадает с $(-\infty, +\infty)$, если $R = +\infty$.

ЛЕКЦИЯ 4

Существование радиуса сходимости у произвольного степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда на интервале сходимости. Формулы для вычисления радиуса сходимости. Лемма о трех радиусах сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Теорема о коэффициентах степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд. Аналитические функции.

Теорема 1. *У любого степенного ряда (3) существует радиус сходимости $R \in [0, +\infty]$. Для любого $r \in (0, R)$, ряд (3) сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$.*

Доказательство. Существование R доказано выше. Докажем равномерную сходимость. Так как $r < R$, то ввиду определения радиуса сходимости числовой ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ сходится абсолютно. А для любого x, т.ч. $|x| \le r$ справедлива оценка

$$|a_k x^k| = |a_k||x^k| \le |a_k| r^k = |a_k r^k|.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ сходится равномерно на $[-r, r]$.

Следствие. *Если $R > 0$, то сумма $S(x)$ степенного ряда (3) является непрерывной на интервале сходимости $(-R, R)$ функцией.*

Доказательство. Пусть x_0, т.ч. $|x_0| < R$. Тогда можно указать число $r > 0$, т.ч. $|x_0| < r < R$. Так как членами степенного ряда являются непрерывные функции, то в силу его равномерной сходимости на отрезке $[-r, r]$ его сумма $S(x) \in C[-r, r]$ (см. теорему 7 лекции 2). Следовательно, $S(x) \in C(x_0)$, ибо $x_0 \in [-r, r]$. Поскольку x_0 — произвольная точка из интервала сходимости, то сумма ряда непрерывна в каждой точке интервала $(-R, R)$, что и означает непрерывность суммы ряда $S(x)$ на $(-R, R)$.

Вычисление радиусов сходимости степенных рядов

1) Пусть у степенного ряда (3) коэффициенты $a_k \neq 0\ \forall k$. Зафиксируем $x \neq 0$ и исследуем получившийся числовой ряд ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = |x|\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \alpha|x|,$$

где $\alpha \doteq \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

Если $\alpha = 0$, то в силу признака Даламбера ряд $\sum_{k=1} a_k x^k$ сходится абсолютно $\forall x \in \mathbf{R}$. Следовательно, радиус сходимости $R = +\infty$. Полагая $\dfrac{1}{0} \doteq +\infty$, получим, что $R = \dfrac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha \in (0, +\infty)$, то по признаку Даламбера ряд $\sum_{k=1} a_k x^k$ сходится абсолютно $\forall x$, т.ч. $\alpha|x| < 1$, т.е. при $|x| < 1/\alpha$, и ряд расходится, если $\alpha|x| > 1$, т.е. при $|x| > 1/\alpha$. Следовательно,

$$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|.$$

Если $\alpha = +\infty$, то согласно признаку Даламбера ряд $\sum_{k=1} a_k x^k$ расходится $\forall x \neq 0$. Поэтому $R = 0$. Полагая $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, можно написать, что $R = \dfrac{1}{\alpha}$.

Итак, если $\exists \lim_{k\to+\infty}|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}|$ конечный или бесконечный, то он равен радиусу сходимости R степенного ряда.

2) Вновь зафиксируем $x \neq 0$ в (3) и исследуем получившийся числовой ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Коши:

$$\lim_{k\to+\infty}|a_k x^k|^{1/k} = |x|\lim_{k\to+\infty}|a_k|^{1/k} = \alpha|x|,$$

где $\alpha \doteq \lim_{k\to+\infty}|a_k|^{1/k}$.

Если $\alpha = 0$, то ряд сходится абсолютно $\forall x \in \mathbf{R}$. Следовательно, $R = +\infty$. Поэтому можно считать, что $R = \dfrac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha \in (0, +\infty)$, то ряд сходится абсолютно $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $\alpha|x| < 1$, т.е. при $|x| < 1/\alpha$, и ряд расходится $\forall x$, т.ч. $\alpha|x| > 1$, т.е. при $|x| > 1/\alpha$. Значит, $R = \dfrac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha = +\infty$, то $\forall x \neq 0$ ряд расходится. Поэтому $R = 0$. Опять получаем, что $R = \dfrac{1}{\alpha}$.

Итак, если $\exists \lim_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k}$, то он равен $\dfrac{1}{R}$ — величине, обратной радиусу сходимости.

Примеры.

1) Найдем радиус сходимости и множество сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k/k$. По второй формуле $\dfrac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty}(1/k)^{\frac{1}{k}} = 1 \Rightarrow R = 1$. Поскольку при $|x| < 1$ ряд сходится и при том абсолютно, а при $|x| > 1$ — расходится, то осталось исследовать сходимость в точках $x = -1$, $x = 1$.

При $x = -1$ получаем сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/k$ (ряд Лейбница).

При $x = 1$ получаем расходящийся ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k$ (гармонический ряд).

Таким образом, множеством сходимости данного ряда является полуинтервал $[-1, 1)$.

2) Определим радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} k^k x^k$. Имеем $\lim_{k\to+\infty}(k^k)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} k = +\infty \Rightarrow R = 0$ и данный ряд сходится только при $x = 0$.

Лемма 1 (о трех радиусах сходимости). *Радиусы сходимости R, $R^{\int}$, R' трех степенных рядов*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \ \text{и} \ \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что $R' \leq R \leq R^{\int}$. Действительно, из оценки

$$\left|\frac{a_k}{(k+1)} x^{k+1}\right| = \frac{|x|}{(k+1)} |a_k x^k| \leq |x||a_k x^k|$$

следует, что второй ряд сходится абсолютно в любой точке из интервала сходимости первого ряда. Поэтому $R^{\int} \geq R$.

Из цепочки неравенств

$$|a_k x^k| \leq |k a_k x^k| \leq \frac{1}{|x|} |k a_k x^{k-1}|$$

следует, что первый ряд сходится абсолютно в любой точке $x \neq 0$ из интервала сходимости третьего ряда. Следовательно, $R \geq R'$.

Осталось доказать, что $R' \geq R^{\int}$. Зафиксируем $x \neq 0$, т.ч. $|x| < R^{\int}$ и преобразуем

$$|k a_k x^{k-1}| = \frac{k(k+1)}{|x|^2} \left| \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \right| =$$

(выбираем число $r \in (|x|, R^{\int})$ и представляем x как $r\dfrac{x}{r}$)

$$\frac{k(k+1)}{|x|^2} \left| \frac{a_k}{k+1} r^{k+1} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{k+1} \leq C \left| \frac{a_k}{k+1} r^{k+1} \right|,$$

(величина $\left| \dfrac{k(k+1)}{|x|^2} \left| \dfrac{x}{r} \right|^{k+1} \right|$ ограничена некоторой константой C, т.к. $\dfrac{k(k+1)}{|x|^2} \left| \dfrac{x}{r} \right|^{k+1} \to 0$ $(k \to +\infty)$ как член сходящегося ряда (сходимость ряда с такими членами вытекает, например, из признака Коши: $\lim_{k\to+\infty} \left(\dfrac{k(k+1)}{|x|^2} \left| \dfrac{x}{r} \right|^{k+1} \right)^{1/k} = \left| \dfrac{x}{r} \right| < 1$.))

В силу выбора r ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_k}{k+1} r^{k+1}$ сходится абсолютно. Поэтому из признака сравнения следует, что третий ряд сходится абсолютно в каждой точке из интервала сходимости второго ряда. Значит, $R^{\int} \leq R'$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть степенной ряд* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ *имеет ненулевой радиус сходимости* R *и* $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

Тогда

1) *сумма степенного ряда $S(x)$ имеет на интервале $(-R, R)$ производные любого порядка (т.е. $S \in C^{\infty}(-R, R)$), которые могут быть найдены почленным дифференцированием ряда:*

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1) a_k x^{k-m}$$

2) $\forall x \in (-R, R)$:

$$\int_0^x S(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x a_k t^k\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

3) *все написанные степенные ряды имеют один и тот же радиус сходимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что данный степенной ряд и ряды, полученные из него последовательным почленным дифференцированием или почленным интегрированием, имеют одинаковые радиусы сходимости.

Так как любой степенной ряд (3) с радиусом сходимости $R > 0$ сходится равномерно на каждом отрезке $[-r, r] \subset (-R, R)$, то 1) и 2) следуют из соответствующих теорем о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Замечание. Все утверждения могут быть переформулированы для степенных рядов вида $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$. Так формула почленного интегрирования примет вид

$$\int_{x_0}^x S(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{x_0}^x a_k (t - x_0)^k\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1},$$

где x — произвольная точка интервала сходимости.

Теорема 3(о коэффициентах степенного ряда). *Если в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция f раскладывается в степенной ряд по степеням $x - x_0$, т.е.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \ \forall x \in U(x_0),$$

то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ *и, следовательно,*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

где $0! \doteq 1,\ f^{(0)}(x_0) \doteq f(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив $x = x_0$, получаем, что $f(x_0) = a_0$. Далее, на основании теоремы 2 $\forall x \in U(x_0)$ и $\forall m \in \mathbf{N}$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

В точке $x = x_0$ все члены ряда, кроме первого, равны нулю. Следовательно, $f^{(m)}(x_0) = m!a_m$. Теорема доказана.

Следствие. *Если в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *функция раскладывается в степенной ряд по степеням* $x - x_0$, *то это разложение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x-x_0)^k,$$

то эти ряды имеют одинаковые коэффициенты, т.к. и $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, и $b_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Следовательно, разложения совпадают.

Определение 1. *Функция* f *называется аналитической в точке* x_0 ($f \in A(x_0)$), *если она раскладывается в степенной ряд* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ *в некоторой окрестности точки* x_0.

Если f аналитическая в точке x_0, то f бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Обратное неверно. Пример бесконечно дифференцируемой функции, которая не разлагается в степенной ряд будет дан ниже.

ЛЕКЦИЯ 5
Ряды Тейлора. Критерий сходимости ряда Тейлора. Достаточное условие сходимости ряда Тейлора. Ряды Тейлора некоторых элементарных функций. Действия над степенными рядами.

Пусть f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в этой точке производные любого порядка.

Определение 1. *Степенной ряд*

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

Замечание. Теорема 3 лекции 4 означает, что степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ является рядом Тейлора своей суммы $S(x)$ в точке x_0, ибо $a_k = S^{(k)}(x_0)/k!$.

Естественно возникают вопросы о сходимости и сумме ряда Тейлора: 1) можно ли утверждать, что ряд Тейлора любой бесконечно дифференцируемой функции сходится при $x \neq x_0$; 2) если ряд Тейлора бесконечно дифференциремой функции f сходится, то сходится ли он при $x \neq x_0$ к $f(x)$. Ответы на эти вопросы отрицательные.

Пример. Пусть $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Покажем, что $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, т.е. что функция f имеет производные любого порядка в любой точке $\mathbf{R}$, и найдем ее ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$.

Поскольку $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, то $f \in C(0)$. Непрерывность во всех остальных точках числовой прямой очевидна, ибо функция является композицией непрерывных функций.

Если $x \neq 0$, то $f'(x) = 2/x^3 e^{-1/x^2}$, $f''(x) = -6/x^4 e^{-1/x^2} + 4/x^6 e^{-1/x^2}$. Вообще, $\forall k \in \mathbf{N}$

$$f^{(k)}(x) = P_{n_k}(1/x) e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} \sum_{m=0}^{n_k} \frac{\lambda_m}{x^m}.$$

Таким образом, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Из полученной формулы следует также, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x^l}=0, k=1,2,\ldots,\ l=0,1,\ldots,$$

т.к. $\forall m\in\mathbf{N}$

$$\lim_{x\to 0}e^{-1/x^2}/x^m=(t\doteq 1/x^2)=\lim_{t\to+\infty}t^{m/2}/e^t=0$$

(см. пример 2 лекции 1.20).

Докажем, что и в нуле у функции f существуют производные любого порядка. Имеем $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=0$, $\ldots$, $f^{(k)}(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f^{(k-1)}(x)}{x}=0\Rightarrow$ функция f имеет производные всех порядков в нуле и $\forall k\in\mathbf{N}$: $f^{(k)}(0)=0\Rightarrow$ ряд Тейлора функции f в точке $x_0=0$ имеет только нулевые члены $\Rightarrow$ его суммой является функция, равная нулю во всех точках $\mathbf{R}$. Поскольку рассматриваемая функция $f(x)\neq 0$ при $x\neq 0$, то ее ряд Тейлора сходится на $\mathbf{R}$, но не к f.

Этот пример показывает, что не всякая бесконечно дифференцируемая функция является аналитической.

Лемма 1(критерий сходимости ряда Тейлора к функции). *Пусть функция f определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет производные любого порядка в точке x_0. Тогда для сходимости ряда Тейлора $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ к функции $f(x)$ на $U(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы n-й остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора стремился к нулю на $U(x_0)$ при $n\to+\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сходимость ряда Тейлора к f означает, что

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\overset{U(x_0)}{\to}f(x)\ (n\to+\infty)$$

или, что равносильно,

$$f(x)-S_n(x)\overset{U(x_0)}{\to}0\ \text{ при }\ n\to+\infty.$$

Но $S_n(x)$ совпадает с многочленом Тейлора функции f порядка n. Поэтому $f(x) - S_n(x) = r_n(x)$ является остаточным членом формулы Тейлора порядка n. Следовательно,

$$f(x) - S_n(x) \to 0 \text{ на } U(x_0) \;\Leftrightarrow\; r_n(x) \to 0 \text{ на } U(x_0)(n \to +\infty).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть функция f определена и бесконечно дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 ($f \in C^\infty(U(x_0))$), причем $\exists C$, т.ч. $\forall x \in U(x_0)$ и $\forall k \in \mathbf{N}$: $|f^{(k)}(x)| \leq C$. Тогда функция f раскладывается в $U(x_0)$ в ряд Тейлора в точке x_0, т.е.*

$$\forall x \in U(x_0): \; f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Записывая n-й остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа $\forall x \in U(x_0)$ имеем:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq C \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При каждом фиксированном x функция $\dfrac{|x - x_0|^{(n+1)}}{(n+1)!}$ является членом сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ (для $x \neq x_0$ сходимость следует из признака Даламбера). Следовательно, $\lim_{n\to+\infty} C\dfrac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, а значит и $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, что в силу леммы 1 означает разложимость функции f в ряд Тейлора в $U(x_0)$.

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций

В лекции 1.21 были получены разложения в точке $x_0 = 0$ по формуле Тейлора пяти функций. Из этих формул и критерия сходимости ряда Тейлора можно получить разложения этих функций в ряды Тейлора в точке $x_0 = 0$.

1) Разложение в степенной ряд функции e^x. Зафиксируем число $a > 0$. Поскольку $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in \mathbf{R}$: $(e^x)^{(k)} = e^x$, то на интервале $(-a, a)$ выполняется оценка $(e^x)^{(k)} \leq e^a \Rightarrow$ по теореме 1 ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ функции e^x сходится к ней на $(-a, a)$. В силу произвольности a ряд Тейлора e^x сходится к e^x и на всей числовой прямой, т.е.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},\ x \in \mathbf{R}.$$

2) Разложение в степенной ряд функции $\sin x$. Поскольку $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in \mathbf{R}$: $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\pi/2)$, то на всей числовой прямой выполняется оценка $|(\sin x)^{(k)}| \leq 1 \Rightarrow$ по теореме 1 ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ функции $\sin x$ сходится к ней на $\mathbf{R}$, т.е.

$$\sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\ x \in \mathbf{R}.$$

3) Разложение в степенной ряд функции $\cos x$. Поскольку $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x \in \mathbf{R}$: $(\cos x)^{(k)} = \cos(x + k\pi/2)$, то аналогично 2) доказывается, что ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ функции $\cos x$ сходится к ней на $\mathbf{R}$, т.е.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},\ x \in \mathbf{R}.$$

Если воспользоваться другими существующими формами записи остаточного члена формулы Тейлора, то можно доказать, что

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},\ x \in (-1, 1]$$

и

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} x^k,\ x \in (-1, 1),$$

$p \neq 0, 1, 2, \ldots$ (для натуральных показателей p разложение тоже имеет место — оно просто представляет собой формулу бинома Ньютона и, следовательно, справедливо $\forall x \in \mathbf{R}$).

Действия над степенными рядами

1) Умножение на число $\lambda \neq 0$:

$$\lambda\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k(x-x_0)^k,$$

причем радиусы сходимости степенных рядов совпадают.

2) Степенные ряды можно почленно складывать в общем интервале сходимости: пусть $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$, $S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x-x_0)^k$. Тогда

$$S_1(x) + S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)(x-x_0)^k.$$

3) Умножение степенных рядов. В общем интервале сходимости

$$S_1(x)S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x-x_0)^k,$$

где

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0.$$

Справедливость 1) и 2) следует из свойств числовых рядов. На доказательстве пункта 3) останавливаться не будем.

ЛЕКЦИЯ 6

Равномерная сходимость семейства функций. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, предельный переход под знаком интеграла.

Равномерная сходимость семейства функций

Пусть X — произвольное множество, $Y \subset \mathbf{R}^n$, y_0 — точка прикосновения множества Y (y_0 может быть и бесконечно удаленной точкой), $f(x, y)$ и $\varphi(x)$ некоторые числовые функции ($x \in X$, $y \in Y$).

При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ является функцией переменной x. Поэтому будем называть функцию двух переменных $f(x, y)$ *семейством функций*, зависящих от параметра y (иногда вместо $f(x, y)$ пишут $f_y(x)$ по аналогии с последовательностями функций).

Определение 1. *Семейство функций $f(x, y)$ (поточечно) сходится на множестве X при $y \to y_0$, если при каждом фиксированном $x \in X$ функция $f(x, y)$ имеет предел при $y \to y_0$.*

Определение 2. *Семейство функций $f(x, y)$ сходится равномерно на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$, что записывается как $f(x, y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(y_0, \delta)$, т.ч. $\forall y \in U(y_0, \delta) \bigcap Y$ и $\forall x \in X$: $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$.*

Теорема 1(критерий Коши равномерной сходимости). *Для того чтобы $f(x, y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $y \to y_0$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(y_0, \delta), \ \text{т.ч.} \ \forall y', \ y'' \in U(y_0, \delta) \bigcap Y \ \text{и} \ \forall x \in X :$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о критерия Коши равномерной сходимости семейства функций проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы для функциональных последовательностей.

Теорема 2(sup–**критерий равномерной сходимости**).

$$f(x,y)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x) \text{ при } y\to y_0 \quad\Leftrightarrow\quad \sup_{x\in X}|f(x,y)-\varphi(x)|\to 0 \text{ при } y\to y_0.$$

Доказательство такое же, как и для последовательностей.

Следующая теорема позволяет использовать результаты для равномерно сходящихся последовательностей при изучении равномерной сходимости семейств функций.

Теорема 3. *Пусть $f(x,y)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $y\to y_0$. Тогда для любой последовательности $(y_k)_{k=1}^{+\infty}\subset Y$, т.ч. $y_k\to y_0$: последовательность функций $f_k(x)\doteq f(x,y_k)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ $(k\to+\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon>0$. По условию теоремы $f(x,y)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $y\to y_0\Rightarrow\exists U(y_0,\delta)$, т.ч. $\forall y\in U(x_0,\delta)\bigcap Y$ и $\forall x\in X$: $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$. Возьмем произвольную последовательность $(y_k)_{k=1}^{+\infty}$, удовлетворяющую условиям теоремы. Тогда $\exists k_0=k_0(\delta(\varepsilon))=k_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, т.ч. $\forall k>k_0$: $y_k\in U(y_0,\delta)\bigcap Y\Rightarrow$ $\forall k>k_0$ и $\forall x\in X$: $|f_k(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$. Так как ε было произвольным, то $f_k(x)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ $(k\to+\infty)$.

Поскольку ранее предел рассматривался для функций, заданных на подмножествах $\mathbf{R}^m$, то в приводимой ниже теореме под X понимается некоторое подмножество $\mathbf{R}^m$

Теорема 4. *Пусть $f(x,y)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $y\to y_0$. Если $\forall y\in Y$ функция $f(x,y)\in C(x_0)$ $(x_0\in X)$ то $\varphi(x)\in C(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную последовательность $(y_k)_{k=1}^{+\infty}\subset Y$, т.ч. $y_k\to y_0$. Пусть $f_k(x)\doteq f(x,y_k)$. Тогда $f_k(x)\in C(x_0)$ и по теореме 3 $f_k(x)\overset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $k\to+\infty$. Следовательно, $\varphi(x)\in C(x_0)$ как равномерный предел последовательности функций, непрерывных в точке x_0 (теорема 5 лекции 2).

Замечание. Непрерывность предельной функции φ означает, что $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$. Поскольку $\varphi(x)=\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ и $\lim_{x\to x_0}f(x,y)=f(x_0,y)$, то последнее равнство можно записать как $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x_0)=\lim_{y\to y_0}f(x_0,y)=$

$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$. Таким образом, приведенная теорема дает достаточные условия совпадения повторных пределов функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Интегралы, зависящие от параметра

Пусть φ, ψ: $Y \to \mathbf{R}$ (Y — произвольное множество) и $\forall y \in Y$: $\varphi(y) \le \psi(y)$, $D \doteq \{(x,y)|\; y \in Y,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$ и f: $D \to \mathbf{R}$, причем $\forall y \in Y$ функция $f(x,y) \in R[\varphi(y),\psi(y)]$ как функция переменной x.

Определение 3. *Функция вида*

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \tag{4}$$

называется интегралом, зависящим от параметра y.

В частности, если $\varphi(y) = a$, $\psi(y) = b$, то $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Подстановкой $x = \varphi(y) + t(\psi(y) - \varphi(y))$, $t \in [0,1]$ интеграл (4) сводится к интегралу $\int_0^1 g(t,y)\,dt$, где
$g(t,y) = f(\varphi(y) + t(\psi(y) - \varphi(y)), y)(\psi(y) - \varphi(y))$.

Изучим свойства интеграла (4), когда $Y = [c,d]$.

Теорема 5. *Пусть φ, $\psi \in C[c,d]$, $f \in C(D)$. Тогда функция $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \in C[c,d]$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y_0 \in [c,d]$ и оценим

$$I(y) - I(y_0) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx =$$

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y_0)\,dx +$$

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y_0)\,dx - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx = I_1(y) + I_2(y),$$

где

$$I_1(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y_0)\,dx,$$

а

$$I_2(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y_0)\,dx - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $f \in C(D)$, а D — компакт (ограниченное и замкнутое множество в $\mathbf{R}^2$). Тогда согласно теореме Кантора (см. теорему 1 лекции 1.36) функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на D и, значит, для данного ε $\exists\delta_0 > 0$, т.ч. $\forall A' = (x',y')$, $A'' = (x'',y'') \in D$, $d(A',A'') < \delta_0$: $|f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon$. В частности, и для любых двух точек $A' = (x,y)$ и $A'' = (x,y_0)$, т.ч. $|y - y_0| < \delta_0$ неравенство $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$ будет выполнено, поскольку $d(A',A'') = |y - y_0| < \delta$. Поэтому для всех $y \in [c,d]$, т.ч. $|y - y_0| < \delta_0$ имеем

$$|I_1(y)| \le \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \varepsilon \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dy =$$

$$\varepsilon(\psi(y) - \varphi(y)) \le \varepsilon \max_{y\in[c,d]} (\psi(y) - \varphi(y)) = \varepsilon L,$$

где $L = \max_{y\in[c,d]}(\psi(y) - \varphi(y))$ (L конечно, т.к. по второй теореме Вейрштрасса (лекция 1.14) непрерывная функция $(\psi(y) - \varphi(y))$ достигает своего максимума на отрезке $[c,d]$).

Осталось оценить

$$|I_2(y)| = \left| \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} \right) f(x,y_0)\,dx \right| =$$

(используем аддитивность интеграла по отрезкам)

$$\left| \left(\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} + \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} + \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} - \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} \right) f(x,y_0)\,dx \right| =$$

$$\left|\left(\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} + \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\right) f(x,y_0)\,dx\right| \le$$

$$\left|\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} |f(x,y_0)|\,dx\right| + \left|\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} |f(x,y_0)|\,dx\right| \le$$

$$M(|\varphi(y_0)-\varphi(y)| + |\psi(y)-\psi(y_0)|),$$

где $M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$ (воспользовались тем, что непрерывная на компакте функция достигает своего наибольшего значения теорема 2 лекции 1.36).

По условию φ, $\psi \in C[c,d]$, следовательно, для данного $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$, т.ч. $\forall y \in [c,d]$, $|y-y_0| < \delta_1$: $|\varphi(y)-\varphi(y_0)| < \varepsilon$, $|\psi(y)-\psi(y_0)| < \varepsilon$. Значит, $\forall y \in [c,d]$, $|y-y_0| < \delta$, где $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$ выполняется неравенство

$$|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon L + (\varepsilon+\varepsilon)M = \varepsilon(L+2M).$$

Поэтому $I(y) \in C(y_0)$. Так как y_0 — произвольная точка из отрезка $[c,d]$, то $I(y) \in\ [c,d]$.

В последующих теоремах предполагается, что функция f определена на прямоугольнике $P = [a,b]\times[c,d]$ и, стало быть, $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Теорема 6. *Пусть* $f:\ P \to \mathbf{R}$ *и* $\forall y \in [c,d]$ *функция* $f(x,y) \in C[a,b]$ *как функция переменной* x. *Если* $f(x,y) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ *при* $y \to y_0 \in [c,d]$, *то*

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

т.е.

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную последовательность $(y_k)_{k=1}^{+\infty} \subset [c,d]$, т.ч. $y_k \to y_0$. Пусть $f_k(x) \doteq f(x,y_k)$. Тогда $f_k(x) \in C[a,b]$ и по теореме 3

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \text{ при } k \to +\infty.$$

Поэтому (см. теорему 8 лекции 2)

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда в силу определения предела по Гейне (см. лекцию 1.10) заключаем, что функция $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ имеет предел при $y\to y_0$ и $\lim_{y\to y_0} I(y)=\int_a^b \varphi(x)\,dx$. Теорема доказана.

Замечание. Для семейств функций можно доказать полный аналог теоремы 8 лекции 2. Доказывается он по той же схеме.

Теорема 7. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $P=[a,b]\times[c,d]$, то*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

В этой теореме содержится два утверждение — об интегрируемости функции $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ на отрезке $[c,d]$ (это следствие непрерывности $I(y)$) и равенстве повторных интегралов

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Не будем здесь доказывать эту теорему, т.к. она является следствием более общего утверждения для кратного интеграла Римана (см. лекцию 12).

ЛЕКЦИЯ 7

Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра (правило Лейбница). Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. sup–критерий равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости.

Теорема 1(правило Лейбница). *Пусть* f, $f'_y \in C(P)$, *где* $P = [a,b] \times [c,d]$. *Тогда* $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \in C^1[c,d]$ *и*

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку $y \in [c,d]$ и для $\forall h \neq 0$, т.ч. $y+h \in [c,d]$ рассмотрим

$$\frac{\Delta I(y)}{h} = \frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,y+h)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{h}\int_a^b \left(f(x,y+h) - f(x,y)\right)\,dx = \frac{1}{h}\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)h\,dx =$$

$$\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)\,dx$$

(к разности $f(x,y+h)-f(x,y)$ была применена теорема Лагранжа, $\theta = \theta(x) \in (0,1)$).

Теперь оценим

$$\left|\frac{\Delta I(y)}{h} - \int_a^b f'_y(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)\,dx - \int_a^b f'_y(x,y)\,dx\right| \leq$$

$$\int_a^b |f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)|\,dx.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f'_y \in C(P)$, а P является компактом (теорема 3 лекции 1.34), то по теореме Кантора (теорема 1 лекции 1.36) функция f'_y равномерно непрерывна на компакте P. Поэтому $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall h$, $|h| < \delta$ и $\forall x \in [a, b]$: $|f'_y(x, y + \theta h) - f'_y(x, y)| < \varepsilon$, ибо при $|h| < \delta$ и $\forall x \in [a, b]$ для расстояния между точками $A'(x, y)$ и $A''(x, y + \theta h)$ имеем $d(A', A'') = |\theta h| < |h| < \delta$. Следовательно, $\forall h$, $|h| < \delta$:

$$\left| \frac{\Delta I(y)}{h} - \int_a^b f'_y(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b - a).$$

Равенство (5) доказано. Непрерывность функции $I'(y)$ следует из теоремы 5 лекции 6. Теорема доказана.

Замечание. Условие $f \in C(P)$ использовалось лишь в той части, что оно гарантирует при любом y интегрируемость функции $f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ как функции переменной x.

Теперь получим формулу для производной интеграла вида $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$ в предположении, что $f,\ f'_y \in C([a, b] \times [c, d])$, $\varphi,\ \psi \in D[c, d]$, $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b$ $\forall y \in [c, d]$. Для этого введем функцию 3–х независимых переменных u, v и y: $J(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)\, dx$. Очевидно, что $I(y) = J(\varphi(y), \psi(y), y)$.

Убедимся, что функция $J(u, v, w)$ дифференцируема. Для этого покажем, что ее частные производные непрерывны. При взятии частной производной функции $J(u, v, y)$ по первому аргументу переменные v и y фиксируются, следовательно, интеграл $J(u, v, y)$ является интегралом с переменным нижним пределом интегрирования. Поэтому воспользовавшись формулой для производной интеграла по нижнему пределу интегрирования (см. лекцию 1.27), получим, что $J'_u(u, v, y) = -f(u, y)$. Аналогично $J'_v(u, v, y) = f(v, y)$. Значит, обе найденные частные производные непрерывны. Наконец, при вычислении частной производной по третьему аргументу переменные u и v фиксируются, т.е. функция $J(u, v, y)$ является интегралом, зависящим от параметра y, с постоянными пределами интегрирования. Наложенные условия позволяют применить правило

Лейбница: $J'_y(u,v,y) = \int_u^v f'_y(x,y)\,dx$. Эта частная производная также окажется непрерывной, т.к. при сделанных предположениях интеграл $\int_u^v f'_y(x,y)\,dx$ непрерывен как функция 3-х переменных (доказательство этого факта по существу повторяет доказательство теоремы 5 из лекции 6). Поэтому можно воспользоваться цепным правилом (теорема 1 лекции 1.38)

$$I'(y) = (J(\varphi(y),\psi(y),y))'_y = J'_u\varphi'(y) + J'_v\psi'(y) + J'_y =$$

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть дана функция $f(x,y)$ (принимающая действительные значения), $-\infty < a \le x < b \le +\infty$, $y \in Y$ (множество Y пока произвольно), т.ч. для каждого $y \in Y$ и любого $\eta \in [a,b)$: $f(x,y) \in R[a,\eta]$ как функция переменной x.

Определение 1. *Несобственным интегралом (НИ), зависящим от параметра y, называется функция $I(y,\eta) = \int_a^\eta f(x,y)\,dx$.*

Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, обозначается символом $\int_a^b f(x,y)\,dx$.

Определение 2. *Если для любого $y \in Y$ существует $\lim_{\eta\to b-0} I(y,\eta)$, то НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ называется сходящимся (поточечно) на множестве Y. В противном случае НИ расходится на множестве Y. Если интеграл сходится, то величина этого предела обозначается тем же символом $\int_a^b f(x,y)\,dx$, что и сам интеграл и называется значением НИ.*

Определение 3. *НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y, если семейство функций $I(y,\eta)$ сходится равномерно на Y при $\eta \to b-0$.*

Таким образом, интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на множестве Y, если существует функция $I(y)$, т.ч. $I(y,\eta) = \int_a^\eta f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} I(y)$ при $\eta \to b-0$. Поскольку из равномерной сходимости на Y следует поточечная сходимость на том же множестве, то в силу введенных обозначений $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Посмотрим на sup–критерий равномерной сходимости, написанный для НИ при предположении, что есть поточечная сходимость:

$$I(y,\eta) = \int_a^\eta f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} \int_a^b f(x,y)\,dx \ \text{ при } \eta \to b-0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_a^\eta f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| \to 0 \text{ при } \eta \to b-0.$$

Поскольку НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится на множестве Y, то разность интегралов (см. лекцию 1.29)

$$\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^\eta f(x,y)\,dx = \int_\eta^b f(x,y)\,dx$$

является "хвостом" НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$.

Поэтому sup–критерий равномерной сходимости НИ можно записать так

$$\int_a^\eta f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} \int_a^b f(x,y)\,dx \ \text{ при } \eta \to b-0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right| \to 0 \ \text{ при } \eta \to b-0 \qquad (6)$$

Эта запись sup–критерия равномерной сходимости НИ удобна в использовании, ибо не содержит явно функцию $I(y)$.

Из (6) сразу же вытекает следующее полезное утверждение.

Лемма 1. *Равномерная на множестве Y сходимость НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равносильна равномерной сходимости на Y любого его "хвоста" $\int_c^b f(x,y)\,dx$, $c \in (a,b)$.*

Теорема 2(критерий Коши). *Для того, чтобы НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходился на множестве Y необходимо и* *достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta = \eta(\varepsilon) \in [a, b)$, *т.ч.* $\forall \eta',\ \eta'' \in (\eta, b)$ *и* $\forall y \in Y$*:* $|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\, dx| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная на множестве Y сходимость НИ $\int_a^b f(x, y)\, dx \overset{def}{\Leftrightarrow} I(y, \eta) \overset{Y}{\rightrightarrows} I(y)$ при $\eta \to b - 0$, что в силу критерия Коши равномерной сходимости семейства функций эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta = \eta(\varepsilon) \in [a, b)$, т.ч. $\forall \eta',\ \eta'' \in (\eta, b)$ и $\forall y \in Y$: $|I(y, \eta'') - I(y, \eta')| < \varepsilon$. Поскольку

$$I(y, \eta'') - I(y, \eta') = \int_a^{\eta''} f(x, y)\, dx - \int_a^{\eta'} f(x, y)\, dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\, dx,$$

то теорема доказана.

Теорема 3(признак Вейерштрасса). *Пусть* $\forall x \in [a, b)$ *и* $\forall y \in Y$*:*

$$|f(x, y)| \leq g(x).$$

Если НИ $\int_a^b g(x)\, dx$ *сходится, то интеграл* $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *сходится абсолютно и равномерно на множестве* Y*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для НИ $\int_a^b f(x, y)\, dx$ и $\int_a^b |f(x, y)|\, dx$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости на Y. По условию $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta = \eta(\varepsilon) \in [a, b)$, т.ч. $\forall \eta',\ \eta'' \in (\eta, b)$: $|\int_{\eta'}^{\eta''} g(x)\, dx| < \varepsilon$. Тогда $\forall \eta',\ \eta'' \in (\eta, b)$ и $\forall y \in Y$:

$$|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\, dx| \leq |\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x, y)|\, dx| \leq |\int_{\eta'}^{\eta''} g(x)\, dx| < \varepsilon.$$

На основании критерия Коши оба НИ $\int_a^b f(x, y)\, dx$ и $\int_a^b |f(x, y)|\, dx$ сходятся равномерно на множестве Y.

Приведем без доказательства признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (ср. с теоремами 2 и 3 из лекции 1.31).

Теорема 4(признак Дирихле) *Интеграл* $\int_a^b f(x, y) g(x, y)\, dx$ *сходится равномерно на множестве* Y*, если*

1) $\exists C > 0$, *т.ч.* $\forall \eta \in [a, b)$ *и* $\forall y \in Y$*:* $|\int_a^{\eta} f(x, y)\, dx| \leq C$,

2) *$\forall y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна как функция переменной x,*

3) $g(x,y) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$ *при* $x \to b-0$.

Теорема 5(признак Абеля). *Интеграл $\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y, если*

1) *несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y,*

2) *$\forall y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна как функция переменной x,*

3) *$\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in [a,b)$ и $\forall y \in Y$: $|g(x,y)| \le M$.*

Эти теоремы применяются при исследовании на равномерную сходимость НИ от знакопеременных функций.

Примеры.

1) Исследуем НИ интеграл $\int_1^{+\infty} dx/x^y$ на равномерную сходимость на множествах а) $y > 1$ и б) $y \ge \lambda > 1$. Поскольку рассматриваемый интеграл сходится на множестве $y > 1$, то его равномерная сходимость на этом множестве равносильна стремлению $\sup_{y>1} |\int_\eta^{+\infty} dx/x^y|$ к нулю при $\eta \to +\infty$. Зафиксируем $\eta > 1$ и рассмотрим

$$\sup_{y>1}\left|\int_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^y}\right| = \sup_{y>1} \frac{1}{-y+1} x^{-y+1}\Big|_\eta^{+\infty} = \sup_{y>1} \frac{1}{y-1}\eta^{1-y} = +\infty,$$

следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} dx/x^y$ не сходится равномерно на множестве $y > 1$.

Если $y \ge \lambda > 1$, то при $x \ge 1$: $1/x^y \le 1/x^\lambda$. Интеграл $\int_1^{+\infty} dx/x^\lambda$ сходится (см. лекцию 1.29) $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса НИ $\int_1^{+\infty} dx/x^y$ сходится равномерно на множестве $y \ge \lambda > 1$.

2) Исследуем НИ $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xy)}{x}\,dx$ на равномерную сходимость на следующих множествах: а) на отрезке $[0,b]$ и б) на отрезке $[a,b]$, не содержащем точку 0. Подынтегральную функцию $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ можно по непрерывности доопределить в точке $x = 0$, а именно, положить $f(0,y) = y$. Тогда $\forall y$ и $\forall \eta \in [0,+\infty)$: $f(x,y) \in R[0,\eta]$ как непрерывная функция переменной x. Для $\forall y \neq 0$, как и в примере лекции 1.31, на основании признака Дирихле заключаем, что интеграл является сходящимся. Сходимость при $y = 0$ очевидна.

Пусть $y \in [0,b]$. Воспользуемся sup–критерием в форме (6). Зафиксируем $\eta > 0$ (η можно брать достаточно большим, ибо нас интересует предел верхних граней "хвостов" интегралов при $\eta \to +\infty$) и рассмотрим $\sup_{y\in[0,b]} | \int_\eta^{+\infty} \sin(xy)/x\, dx$. Имеем

$$\sup_{y\in[0,b]} \left| \int_\eta^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx \right| = \sup_{y\in(0,b]} \left| \int_\eta^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx \right| \underset{xy=t}{=}$$

$$\underset{xy=t}{=} \sup_{y\in(0,b]} \left| \int_{y\eta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \underset{y=2\pi/\eta}{\geq} \left| \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| > 0$$

(отличие от нуля интеграла легко проверяется: $\int_{2\pi}^{+\infty} (\sin t/t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{2\pi}^{2\pi n} (\sin t/t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} (\sin t/t)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} (\sin t/t)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} (\sin t/t)\, dt + \int_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi} (\sin t/t)\, dt) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k > 0$, ибо $a_k = \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} (\sin t/t)\, dt + \int_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi} (\sin t/t)\, dt = \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin t(1/t - 1/(t+\pi))\, dt > 0$). Таким образом, на основании sup–критерия НИ не сходится равномерно на отрезке $[0,b]$.

Пусть отрезок $[a,b]$ не содержит нуля. В этом случае воспользуемся леммой 1 и исследуем на равномерную сходимость один из "хвостов" рассматриваемого интеграла. Например, удобно взять $\int_1^{+\infty} (\sin(xy)/x)\, dx$. Далее воспользуемся признаком Дирихле:

$$\left| \int_1^t \sin(xy)\, dx \right| = \frac{1}{|y|} |\cos(ty) - \cos y| \leq \frac{2}{|y|} \leq \frac{2}{\min(|a|,|b|)},$$

$\dfrac{1}{x} \downarrow 0$ $(x \to +\infty) \Rightarrow \dfrac{1}{x} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0$ при $x \to +\infty$. Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty} (\sin(xy)/x)\, dx$ на рассматриваемом множестве сходится равномерно в силу признака Дирихле. Следовательно, и исходный НИ $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xy)}{x}\, dx$ равномерно сходится на данном множестве (переход к "хвосту" был обусловлен тем, что функция $\dfrac{1}{x}$ на $[0,+\infty)$ не удовлетворяет условиям признака Дирихле при любом ее доопределении в нуле).

ЛЕКЦИЯ 8
Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра: непрерывность, интегрирование, дифференцируемость. Вычисление интеграла Дирихле. Кратный интеграл Римана: схемы построения.

Всюду ниже $f(x,y)$: $\Pi \to \mathbf{R}$, где $\Pi = [a,b) \times [c,d] = \{(x,y)|\, x \in [a,b),\ y \in [c,d]\}$ (b может обращаться в $+\infty$) и $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Теорема 1. *Если $f \in C(\Pi)$ и НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$, то $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \in C[c,d]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы $I(y,\eta) = \int_a^\eta f(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(y)$ при $\eta \to b-0$. При этом в силу свойств интегралов, зависящих от параметра (теорема 5 лекции 5), $\forall \eta \in [a,b)$: $I(y,\eta) \in C[c,d]$. Тогда на основании теоремы 4 лекции 5 заключаем, что функция $I(y) \in C[c,d]$.

Замечание. Непрерывность $I(y)$ на $[c,d]$ означает, что $\forall y_0 \in [c,d]$: $\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$. Поэтому в теореме 1 утверждается, что $\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$, т.е. имеет место перестановочность предельного перехода и интегрирования.

Теорема 2. *Пусть $f \in C(\Pi)$ и НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 $I(y) \in C[c,d]$. Поэтому $I(y) \in R[c,d]$. Возьмем произвольную последовательность $\eta_k \to b-0$ и положим $I_k(y) = \int_a^{\eta_k} f(x,y)\,dx$. Тогда $I_k(y) \in C[c,d]$ как собственные интегралы, зависящие от параметра (теорема 5 лекции 5) и $I_k(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(y)$ при $k \to +\infty$ (см. теорему 3 лекции 6). В силу теорем 8 и 7 лекций 2 и 6 соответственно имеем

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \lim_{k\to+\infty} I_k(y)\,dy = \lim_{k\to+\infty} \int_c^d I_k(y)\,dy =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \int_c^d dy \int_a^{\eta_k} f(x,y)\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_a^{\eta_k} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Поскольку последовательность (η_k) — произвольна, то на основании определения предела по Гейне заключаем, что $\exists \lim_{\eta\to b-0} \int_a^\eta dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d I(y)\,dy$. Теорема доказана.

Теорема 3(правило Лейбница). *Пусть*

1) $f,\ f'_y \in C(\Pi)$,

2) *НИ* $\int_a^b f(x,y)\,dx$ *сходится на отрезке* $[c,d]$,

3) $J(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на отрезке* $[c,d]$.

Тогда

1) $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \in C^1[c,d]$,

2) $I'(y) = J(y)$, *т.е.*

$$\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)'_y = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и выше, введем последовательность функций $I_k(y) = I(y,\eta_k)$, где $\eta_k \to b-0$ при $k\to+\infty$ и покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы 2 лекции 3.

1) Так как $f,\ f'_y \in C(\Pi)$, то из правила Лейбница для собственых интегралов следует, что $I_k(y) \in C^1[c,d]$. При этом из условий теоремы следует, что $I'_k(y) = (\int_a^{\eta_k} f(x,y)\,dx)'_y = \int_a^{\eta_k} f'_y(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} J(y)$ при $k\to+\infty$.

2) Сходимость на отрезке $[c,d]$ НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ означает сходимость последовательности $(I_k(y))_{k=1}^{+\infty}$ во всех точках отрезка $[c,d]$ к $\int_a^b f(x,y)\,dx$ и естественно влечет сходимость и в некоторой точке отрезка.

Применяя теорему 2 лекции 3, получаем, что $I(y) \in C^1[c,d]$ и что справедлива цепочка равенств

$$J(y) = \lim_{k\to+\infty} I'_k(y) = \left(\lim_{k\to+\infty} I_k(y)\right)' = I'(y).$$

Теорема доказана.

Замечание. Условие 2 доказанной теоремы можно заменить требованием сходимости НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ в некоторой точке y_0 отрезка $[c,d]$ и получить аналог теоремы 2 лекции 3.

Действительно, в этом случае последовательность $(I_k(y))$, где $I_k(y) = \int_a^{\eta_k} f(x,y)\,dx$ удовлетворяет условиям теоремы 2 лекции 3. Следовательно, при любом выборе последовательности $\eta_k \to b-0$ для $\forall y \in [c,d]$ существует $\lim_{k\to+\infty} \int_a^{\eta_k} f(x,y)\,dx$. Но тогда при каждом фиксированном y значения этих пределов равны между собой (см. доказательство теоремы 4 лекции 1.11). Следовательно, в силу определения предела по Гейне для каждого $y \in [c,d]$ существует $\lim_{\eta\to b-0} \int_a^{\eta} f(x,y)\,dx$, т.е. НИ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится на множестве Y.

Пример. Найдем значение интеграла $D(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx$, называемого интегралом Дирихле. Ясно, что $D(-y) = -D(y)$ и $D(0) = 0$. Поэтому вычисления достаточно провести для $y \geq 0$. Если для $y > 0$ выполнить в интеграле замену $t = xy$, то $D(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = D(1) \Rightarrow D(y) = D(1)\mathrm{sgn} y$.

Шаг 1. Введем вспомогательный НИ $I(y,z) \doteq \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} e^{-zx}\,dx$, где $y \geq 0$, $z \geq 0$. Очевидно, что $I(y,0) = D(y)$. Зафиксируем $y \geq 0$. Интеграл $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xy)}{x}\,dx$ сходится (при $y > 0$ по признаку Дирихле) и подынтегральная функция не зависит от переменной z. Значит, этот интеграл сходится равномерно на множестве $z \geq 0$. Функция e^{-zx} ограничена как функция переменных x и z на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ и монотонна при каждом фиксированном $z \geq 0$. Следовательно, по признаку Абеля интеграл $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{x} e^{-zx}\,dx$ сходится равномерно на множестве $z \geq 0$ при каждом фиксированном $y \geq 0$.

Далее, поскольку функция $\dfrac{\sin xy}{x} e^{-zx}$ как функция переменных x и z непрерывна на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ (при $x = 0$ доопределяем ее по непрерывности, полагая ее равной y), то $I(y,z)$ (при каждом фиксированном $y \geq 0$) является непрерывной функцией на множестве $z \geq 0$ как равномерно сходящийся интеграл от непрерывной функции (теорема 1). Тогда $D(y) = I(y,0) = \lim_{z\to 0,\ z>0} I(y,z)$ (см. лемму 1 лекции 1.12). Следовательно, введенный интеграл $I(y,z)$ достаточно вычислить при $z > 0$ и $y \geq 0$.

Шаг 2. Теперь зафиксируем $z > 0$ и покажем, что можно применить правило Лейбница для нахождения $I'_y(y,z)$. Действительно, функции $\dfrac{\sin xy}{x}e^{-zx}$ и $(\dfrac{\sin xy}{x}e^{-zx})'_y = \cos(xy)e^{-zx}$ непрерывны при $y \geq 0$ и $x \geq 0$ и НИ $\int_0^{+\infty} \cos(xy)e^{-zx}\,dx$ сходится равномерно на множестве $y \geq 0$ по признаку Вейерштрасса, ибо $|\cos(xy)e^{-zx}| \leq e^{-zx}$. Значит,

$$I'_y(y,z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin xy}{x}e^{-zx}\right)'_y dx = \int_0^{+\infty} \cos(xy)e^{-zx}\,dx =$$

$$-\frac{1}{z}\left(\cos(xy)e^{-zx}\,|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-zx}\sin(xy)y\,dx\right) =$$

$$-\frac{1}{z}\left(-1 - \frac{y}{z}\int_0^{+\infty} \sin(xy)\,de^{-zx}\right) =$$

$$\frac{1}{z} + \frac{y}{z^2}\left(\sin(xy)e^{-zx}\,|_{x=0}^{x=+\infty} - y\int_0^{+\infty} \cos(xy)e^{-zx}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{z} - \frac{y^2}{z^2}\int_0^{+\infty} \cos(xy)e^{-zx}\,dx.$$

Таким образом, $I'_y(y,z)(1+\dfrac{y^2}{z^2}) = \dfrac{1}{z} \Rightarrow I'_y(y,z) = \dfrac{z}{z^2+y^2}$.

Шаг 3. Интегрируя равенство $I'_y(y,z) = z/(z^2+y^2)$ по y получаем, что

$$I(y,z) = \int \frac{zdy}{z^2+y^2} = \int \frac{d(y/z)}{1+(y/z)^2} = \operatorname{arctg}(y/z) + C(z).$$

Так как $I(0,z) = D(0) = 0$, то $C(z) = 0$.

Итак, $\forall y \geq 0$ и $\forall z > 0$ имеем

$$I(y,z) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}e^{-zx}\,dx = \operatorname{arctg}(y/z).$$

Стало быть, для $y > 0$

$$D(y) = I(y,0) = \lim_{z\to 0+0} I(y,z) = \lim_{z\to 0+0} \operatorname{arctg}(y/z) = \pi/2.$$

С учетом сказанного выше получаем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y.$$

Кратный интеграл Римана

Общая схема построения интеграла Римана

Конструкция интеграл Римана как предела интегральных сумм без труда переносится с отрезка на интеграл по n–мерному брусу P с ребрами, параллельными осям координат. Не вдаваясь в детали, интеграл вводится следующим образом. Пусть функция $f\colon P \to \mathbf{R}$. Берем разбиение T бруса P на конечное число брусов P_k (ребра P_k параллельны осям координат), пересекающихся разве что только по частям своих границ. Далее размечаем разбиение T, выбирая произвольно точку M_k в каждом брусе P_k. Для полученного размеченого разбиения $(T, \bar{M})$ бруса P составляем интегральную сумму Римана

$$\sigma(f,(T,\bar{M})) = \sum_k f(M_k)|P_k|, \ (|P_k| \ - \ \text{объем (=мера) бруса } P_k).$$

Тогда $\int_E f(x)\,dx = I$, где $I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,(T,\bar{M}))$, $\lambda(T)$ — мелкость разбиения T.

Как перенести эти построения на более общие ограниченные множества E? Здесь можно пойти следующими путями.

1) разбить каким-то способом множество E на конечное число частей E_k, пересекающихся разве что по участкам своих границ. Затем выбрать в каждом множестве E_k по произвольной точке M_k и по такому размеченному разбиению $(T, \bar{M})$ построить интегральную сумму Римана

$$\sigma(f,(T,\bar{M})) = \sum_k f(M_k)|E_k|.$$

Чтобы эта сумма имела смысл необходимо, чтобы множества E_k были измеримы, т.е. чтобы можно было говорить об их мере (объеме, площади или длине). Поскольку $E = \bigcup_{k=1}^N E_k$, а E_k измеримы и $E_k \bigcap E_l \subset \partial E_k \bigcap \partial E_l$ при $k \neq l$, то из минимальных требований к мере — обладании свойством аддитивности, будет следовать, что множество E измеримо и $|E| = |E_1| + \ldots + |E_N|$. Поэтому прежде чем определять интеграл Римана должен быть введен класс множеств, для которых определена мера.

Этот подход позволяет включить в общую схему интегралы по кривым и поверхностям.

2) Все–таки использовать разбиения E на брусы с ребрами, параллельными осям координат. Для простоты будем считать, что E является областью. Пусть брус $P \supset E$ и P_k — разбиение этого бруса на конечное число брусов. Брусы P_k, имеющие непустое пересечение с множеством E, назовем разбиением T множества E. Далее в каждом брусе разбиения выберем по точке $M_k \in E$ и составим интегральную сумму Римана, отвечающую построенному размеченному разбиению $(T, \bar{M})$ множества E

$$\sigma(f, (T, \bar{M})) = \sum_k f(M_k)|P_k|$$

Будем считать, что диаметр $\lambda(T)$ достаточно мал и обозначим через P'_k те брусы, которые содержатся в E, а через P''_l — оставшиеся брусы разбиения, т.е. такие, что P''_l имеют непустое пересечение с E, но не содержатся в E. В соответствии с этим интегральная сумма $\sigma(f, (T, \bar{M}))$ распадается на две суммы

$$\sigma(f, (T, \bar{M})) = \sum_k f(M'_k)|P'_k| + \sum_l f(M''_l)|P''_l|.$$

В случае, когда E является брусом вторая сумма отсутствует. Поэтому, определяя интеграл как $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, (T, \bar{M}))$, вполне естественно потребовать, чтобы $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_l f(M''_l)|P''_l| = 0$. Для постоянной на множестве E функции равенство нулю указанного предела накладывает определенное условие на границу ∂E множества E, которое оказывается равносильным измеримости множества E.

3) свести общий случай к интегралу по брусу. Так как множество E ограничено, то существует брус $P \supset E$. Далее определим новую функцию f_0: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, т.ч. $f_0(x) \doteq f(x)$ для $\forall x \in E$ и

$f_0(x) = 0$, если $x \in \mathbf{R}^n \setminus E$ (f_0 называется *продолжением нулем функции* f *с множества* E *на* $\mathbf{R}^n$). Тогда f называется интегрируемой по множеству E, если сужение $f_0|_P$ интегрируема по брусу P и $\int_E f(x)\,dx \doteq \int_P f_0|_P(x)\,dx$. Можно убедиться, что для ограниченных функций эти подходы равносильны.

Далее будет реализован третий вариант построения интеграла Римана.

ЛЕКЦИЯ 9

Интеграл по брусу. Интегральные суммы Римана и Дарбу, их свойства. Критерий Дарбу интегрируемости и его сильная форма. Множества меры нуль в смысле Лебега и их свойства.

Для простоты проведем рассуждения в двумерном случае, т.е. построим теорию двойного интеграла Римана по прямоугольнику (брусу).

Пусть даны прямоугольник $P \doteq [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) |\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и какие–то разбиения $T^x = \{x_i\}_{i=0}^m$ и $T^y = \{y_j\}_{j=0}^n$ отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно. Множество прямоугольников $P_{k,l} \doteq [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$ называется *разбиением* бруса P и обозначается символом T, $T(P)$, или (T^x, T^y) (в многомерном случае удобнее определять разбиение бруса как совокупность указанных брусов, а не как соответствующее множество точек).

Прямоугольники $P_{k,l}$ называются прямоугольниками разбиения T исходного бруса P

Геометрически разбиение бруса P на прямоугольники $P_{k,l}$ получается проведением прямых, параллельных осям Oy и Ox, проходящих через точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ и $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ разбиения T^x отрезка $[a,b]$ и разбиения T^y отрезка $[c,d]$ соответственно.

В каждом брусе $P_{k,l}$ выберем по одной точке $z_{k,l} = (u_k, v_l)$, $u_k \in \Delta_k^{(x)} = [x_{k-1}, x_k]$, $v_l \in \Delta_l^{(y)} = [y_{l-1}, y_l]$. Набор указанных точек $\bar{z} = \{z_{k,l}\}$ называется *разметкой* разбиения $T(P)$. Разбиение $T(P)$ с выбранной разметкой $\bar{z}$ называется *размеченным разбиением* бруса P и обозначается $(T, \bar{z})$.

Величина $\Delta x_k \Delta y_l = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1})$ называется площадью (мерой) бруса $P_{k,l}$ и обозначается $|P_{k,l}|$ или $\mu P_{k,l}$.

Пусть задана f: $P \to \mathbf{R}$ и $(T, \bar{z})$ — размеченное разбиение бруса P.

Определение 1. *Интегральной суммой Римана функции $f(x,y)$, соответствующей размеченному разбиению $(T, \bar{z})$ бруса P,* *называется сумма*

$$\sigma(f,(T,\bar{z})) \doteq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(u_k,v_l)\mu P_{k,l}.$$

Длину $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_l)^2}$ диагонали прямоугольника $P_{k,l}$ будем называть его *диаметром* и обозначать $\mathrm{diam}P_{k,l}$.

Определение 2. *Диаметром, или мелкостью, $\lambda(T)$ разбиения T (размеченного или неразмеченного) бруса P называется максимальное значение диаметров брусов $P_{k,l}$, образующих это разбиение.*

Определение 3. *Число I называется пределом интегральных сумм Римана функции f, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, т.ч. $\forall(T,\bar{z})$ бруса P с $\lambda(T)<\delta$: $|\sigma(f,(T,\bar{z}))-I|<\varepsilon$. При этом пишут $\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma(f,(T,\bar{z}))=I$, а число I называют двойным интегралом функции f по брусу P и обозначают символом $\iint_P f(x,y)\,dxdy$.*

В дальнейшем, где это не приводит к недоразумениям, кратный интеграл от функции g будет также обозначаться $\int_P g(x)\,dx$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $dx=dx_1\ldots dx_n$.

Определение 4. *Если для функции f существует предел ее интегральных сумм, то f называют интегрируемой по Риману на брусе P. В противном случае функция f называется не интегрируемой (по Риману) на брусе P.*

Множество всех интегрируемых на брусе P функций обозначается символом $R(P)$. Запись $g\in R(P)$ означает, что функция g интегрируема на брусе P.

Пример. $\int\int_P dxdy=\mu(P)$. Действительно, для любого разбиения T бруса P и произвольной его разметки $\bar{z}$ имеем

$$\sigma(f,(T,\bar{z}))=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\mu P_{k,l}=\sum_{k=1}^{m}\Delta x_k\sum_{l=1}^{n}\Delta y_l=(b-a)(d-c)=\mu(P),$$

откуда следует, что число $\mu(P)$ является пределом интегральных сумм Римана функции, равной 1 на брусе P. Следовательно, эта функция интегрируема на брусе и ее интеграл равен $\mu(P)$.

Теорема 1(необходимое условие интегрируемости). *Если $f \in R(P)$, то f ограничена на P.*

Доказательство теоремы аналогично одномерному случаю.

Суммы Дарбу

Пусть $f \colon P \to \mathbf{R}$ и f ограничена на P, т.е. $\exists C > 0$, т.ч. $\forall (x,y) \in P$: $|f(x,y)| \le C$. Пусть T — некоторое разбиение бруса P. Положим

$$M_{k,l} \doteq \sup_{(x,y)\in P_{k,l}} f(x,y),\ m_{k,l} \doteq \inf_{(x,y)\in P_{k,l}} f(x,y).$$

Определение 5. *Величины*

$$s(f,T) \doteq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\mu P_{k,l} \text{ и } S(f,T) \doteq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\mu P_{k,l}$$

называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции f.

Приведем свойства сумм Дарбу.

Лемма 1. *Для произвольного разбиения T бруса P и любой его разметки $\bar{z}$ выполняются неравенства*

$$s(f,T) \le \sigma(f,(T,\bar{z})) \le S(f,T).$$

Лемма 2. *Пусть дано произвольное разбиение T бруса P. Тогда*

$$s(f,T) = \inf_{\bar{z}} \sigma(f,(T,\bar{z})),\ S(f,T) = \sup_{\bar{z}} \sigma(f,(T,\bar{z})).$$

Определение 6. *Разбиение $T_1 = (T_1^x, T_1^y)$ является измельчением (продолжением) разбиения $T = (T^x, T^y)$ бруса P, если T_1^x и T_1^y являются измельчениями разбиений T^x и T^y соответственно, т.е. $T^x \subset T_1^x$ и $T^y \subset T_1^y$.*

Лемма 3. *Если разбиение T_1 является измельчением разбиения T бруса P, то*

$$s(f,T) \le s(f,T_1) \le S(f,T_1) \le S(f,T).$$

Следствие. *Для любых разбиений* T_1, T_2 *бруса* P *справедливо неравенство*

$$s(f, T_1) \leq S(f, T_2).$$

Лемма 4. *Для произвольного разбиения* T *бруса* P*:*

$$S(f, T) - s(f, T) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \omega(f, P_{k,l}) \mu P_{k,l},$$

где $\omega(f, P_{k,l}) = \sup_{(x',y'),\,(x,y)\in P_{k,l}} |f(x', y') - f(x, y)|$ *— колебание функции* f *на* $P_{k,l}$.

Как и в одномерном случае $\omega(f, P_{k,l}) = M_{k,l} - m_{k,l}$.

Доказательство лемм 1-4 проводится аналогично одномерному случаю.

Теорема 2(критерий Дарбу интегрируемости). *Функция* $f\colon P \to \mathbf{R}$ *интегрируема по Риману на прямоугольнике* $P \Leftrightarrow$ *она ограничена на* P *и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, т.ч.* $\forall T(P)$ *с* $\lambda(T) < \delta$*:* $S_T - s_T < \varepsilon$.

Доказывается теорема, как и в одномерном случае.

Приведем без доказательства критерий Дарбу, несколько ослабив условия теоремы 2, который будет использован в дальнейшем.

Теорема 3. *Функция* $f\colon P \to \mathbf{R}$ *интегрируема по Риману на прямоугольнике* $P \Leftrightarrow$ *она ограничена на* P *и* $\forall \varepsilon > 0$ *существует разбиение* T *бруса* P*, т.ч.* $S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon$.

Свойства интеграла Римана по брусу, связанные с арифметическими операциями, неравенствами, модулем, доказываются аналогично случаю интеграла по отрезку.

Множества меры нуль по Лебегу

Брус вида $P \doteq [a, b] \times [c, d]$ будем называть замкнутым брусом (P — замкнутое множество в $\mathbf{R}^2$).

Брус $\Pi \doteq (a, b) \times (c, d)$ будем называть открытым брусом (Π — открытое множество в $\mathbf{R}^2$).

По определению мерой (площадью) $\mu\Pi$ открытого бруса называют $(b - a)(d - c)$. Таким образом, $\mu P = \mu\Pi = (b - a)(d - c)$.

Определение 7. *Множество $E \subset \mathbf{R}^2$ называется множеством меры нуль в смысле Лебега, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетная система открытых брусов $\{\Pi_k\}$, т.ч.*

1) $E \subset \cup_k \Pi_k$ *и* 2) $\sum_k \mu\Pi_k < \varepsilon$.

Это определение годится для любых $\mathbf{R}^n$ (естественно надо брать n–мерные открытые брусы). В случае $n = 1$ роль открытых брусов играют интервалы.

Напомним определение покрытия множества.

Определение 8. *Система множеств X_α, $\alpha \in A$ называется покрытием множества E, если $E \subset \cup_\alpha X_\alpha$.*

Замечание. Мы получим тот же класс множеств, если будем брать покрытия, состоящие из замкнутых брусов. Действительно, если выполнено определение для покрытия открытыми брусами, то тем более оно справедливо и для замкнутых, ибо замкнутые брусы $P_k \doteq \overline{\Pi}_k = \Pi_k \cup \partial\Pi_k$ образуют требуемое покрытие. Обратно, если выполнено определение для замкнутых брусов P_k, то $\forall k$ $\exists$ открытый брус $\Pi_k \supset P_k$, т.ч. $\mu\Pi_k < \mu P_k + \varepsilon 2^{-k} \Rightarrow E \subset \cup_k \Pi_k$ и $\sum_k \mu\Pi_k < \sum_k \mu P_k + \sum_k 2^{-k}\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Примеры.

1) $\emptyset$ имеет меру нуль по Лебегу, т.к. для любого открытого бруса Π: $\emptyset \subset \Pi$.

2) Одноточечное множество $E = \{a\} \subset \mathbf{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$ имеет нулевую меру в смысле Лебега, т.к. $\forall \varepsilon > 0$: $\{a\} \subset (a_1 - \sqrt{\varepsilon}/4, a_1 + \sqrt{\varepsilon}/4) \times (a_2 - \sqrt{\varepsilon}/4, a_2 + \sqrt{\varepsilon}/4) = \Pi_\varepsilon$, а $\mu\Pi_\varepsilon = \varepsilon/4 < \varepsilon$.

3) Любое не более чем счетное множество E является множеством меры нуль в смысле Лебега. Действительно, пусть $E = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists$ открытый брус $\Pi_k \ni b_k$, т.ч. $\mu\Pi_k < \varepsilon 2^{-k}$, то $E \subset \cup_k \Pi_k$ и $\sum_k \mu\Pi_k < \sum_k \varepsilon 2^{-k} \le \varepsilon$.

Лемма 5. *Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда график*

$$\Gamma \doteq \{(x, y)|\, x \in [a, b],\ y = f(x)\}$$

функции f есть множество меры нуль по Лебегу на плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу критерия Дарбу интегрируемости $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $S(f, T) - s(f, T) = \sum_j (M_j - m_j)\Delta x_j < \varepsilon$ ($M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$, $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$). Теперь зафиксируем разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^k$ отрезка $[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$. Положим $\Gamma_i \doteq \{(x, y)|\, x \in$

$[x_{i-1}, x_i]$, $y = f(x)\}$ и введем брусы $P_i \doteq [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$. Поскольку $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$: $m_i \le f(x) \le M_i$, то $\Gamma_i \subset P_i$ и, следовательно, $\Gamma = \cup_{i=1}^k \Gamma_i \subset \cup_{i=1}^k P_i$. При этом $\sum_{i=1}^k \mu P_i = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

Следствие. *Если $f \in C[a, b]$, то ее график является множеством меры нуль в смысле Лебега. В частности всякий отрезок на плоскости имеет лебегову меру нуль.*

Доказательство сразу следует из леммы в силу интегрируемости непрерывных функций (см. лекцию 1.25).

Теорема 4(свойства множеств меры нуль в смысле Лебега).

1) *любое подмножество множества меры нуль по Лебегу является множеством меры нуль по Лебегу;*

2) *объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль по Лебегу есть множество меры нуль по Лебегу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) сразу следует из определения множества нулевой меры по Лебегу.

Докажем 2). Пусть E_j, $j = 1, 2 \ldots$ множества меры нуль по Лебегу в конечном или счетном числе. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для $\forall j$ можно построить систему отркрытых брусов $\{\Pi_k^{(j)},\ k = 1, 2, \ldots\}$, т.ч. $E_j \subset \cup_k \Pi_k^{(j)}$ и $\sum_k \mu \Pi_k^{(j)} < \varepsilon 2^{-j}$. Тогда не более чем счетная система открытых брусов $\{\Pi_k^{(j)}\}$ такова, что $\cup_j E_j \subset \cup_j (\cup_k \Pi_k^{(j)})$ и

$$\sum_{k,\,j} \Pi_k^{(j)} = \sum_j \left(\sum_k \mu \Pi_k^{(j)} \right) < \sum_j \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\cup_j E_j$ является множеством меры нуль по Лебегу.

Замечание. В каком порядке складывать неотрицательные величины $\mu \Pi_k^{(j)}$ безразлично. На доказательстве этого факта останавливаться не будем.

ЛЕКЦИЯ 10

Критерий Лебега интегрируемости функции на брусе. Допустимые множества и их свойства. Характеристическая функция множества. Интеграл Римана по ограниченному множеству. Корректность определения. Необходимое условие интегрируемости. Критерий Лебега интегрируемости.

Определение 1. *Некоторое свойство имеет место почти всюду (п.в.) на множестве E, если подмножество E_1 множества E, на котором это свойство не выполняется, есть множество меры нуль по Лебегу.*

Очевидно, что если множество E является множеством меры нуль в смысле Лебега, то любое свойство имеет место п.в. на E.

Приведем без доказательства теорему, которая играет центральную роль в последующих построениях.

Теорема 1(критерий Лебега интегрируемости на брусе). *Функция $f \in R(P) \Leftrightarrow f$ ограничена на брусе P и непрерывна п.в. на P.*

Допустимые множества

Определение 2. *Множество $E \subset \mathbf{R}^2$ называется допустимым, если оно ограничено и его граница ∂E есть множество меры нуль по Лебегу.*

Примеры.

1) Брус, треугольник, круг, кольцо — допустимые множества.

2) $E = \{(x, y)|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, $\varphi_i \in C[a, b]$, $i = 1, 2$, — является допустимым множеством.

Допустимость этих множеств следует из леммы 5 и теоремы 4 лекции 9.

3) Множество точек невырожденного замкнутого бруса P с рациональными координатами не является допустимым множеством, ибо граница этого множества совпадает с P, а невырожденный брус не является множеством меры нуль в смысле Лебега (это несложно доказать).

Лемма 1. *$\forall E_1\,, E_2 \subset \mathbf{R}^2$:*

1) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$
2) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$
3) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, 2). Пусть $x \in \partial(E_1 \cap E_2)$. Значит, в произвольной окрестности точки x есть как точки из $E_1 \cap E_2$, так и точки множества $\mathbf{R}^2 \setminus (E_1 \cap E_2) = \cup_{i=1}^{2}(\mathbf{R}^2 \setminus E_i)$ (было использовано правило де Моргана), т.е. точки, принадлежащие хотя бы одному из множеств $\mathbf{R}^2 \setminus E_1$ и $\mathbf{R}^2 \setminus E_2$. Следовательно, точка x принадлежит по крайней мере одному из множеств ∂E_1 или ∂E_2. Согласно определению объединения множеств x содержится в $\partial E_1 \cup \partial E_2$, что и требовалось доказать.

Лемма 2(свойство допустимых множеств). *Объединение и пересечение конечного числа допустимых множеств является допустимым множеством; разность допустимых множеств — допустимое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 2 сразу следует из определения допустимого множества, леммы 1 и свойств множеств меры нуль по Лебегу.

Определение 3. *Функция $\chi_A(x)$ называется характеристической функцией (х.ф.) множества $A \subset \mathbf{R}^2$, если*

$$\chi_A(x) \doteq 1,\ x \in A \text{ и } \chi_A(x) \doteq 0,\ x \notin A.$$

Как следует из определения,

1) х.ф. любого множества определена на всей плоскости $\mathbf{R}^2$;

2) всякая внутренняя (внешняя) точка множества A является точкой непрерывности функции $\chi_A(x)$, ибо х.ф. будет постоянной, равной соответственно единице и нулю, в некоторой окрестности такой точки. Напротив, любая точка границы ∂A множества A будет точкой разрыва функции $\chi_A(x)$.

Как следствие свойств 1) и 2) получаем, что если A — допустимое множество, то $\chi_A(x)$ непрерывна п.в. на $\mathbf{R}^2$.

Интеграл Римана по множеству

Пусть f: $E \to \mathbf{R}$, E — ограниченное подмножество $\mathbf{R}^2$.

Введем функцию

$$f_0(x) \doteq f(x), \text{ если } x \in E \text{ и } f_0(x) = 0, \text{ если } x \notin E,$$

которая называется *продолжением нулем* функции f с множества E на $\mathbf{R}^2$.

Для произвольной функции g, заданной на множестве A, через $A_d(g)$ будем обозначать множество ее точек разрыва, а через $A_c(g)$ — множество ее точек непрерывности. Поскольку любая точка множества A является либо точкой непрерывности, либо точкой разрыва функции g, то $A_d(g) \cup A_c(g) = A$.

Выясним, как связаны множества точек разрыва $E_d(f)$ и $\mathbf{R}^2_d(f_0)$ функций f и f_0 соответственно. Очевидно, что каждая точка разрыва функции f является точкой разрыва и функции f_0, т.е. $E_d(f) \subset \mathbf{R}^2_d(f_0)$. Всякая внутренняя точка множества E, в которой непрерывна f, будет точкой непрерывности функции f_0, т.к. в некоторой окрестности такой точки функции f и f_0 совпадают. Всякая внешняя точка множества E будет точкой непрерывности f_0, т.к. f_0 равна 0 в некоторой окрестности такой точки. Стало быть, точки разрыва функции f_0 могут появиться лишь в граничных точках множества E, в которых f непрерывна, и в граничных точках множества E, не принадлежащих E. Таким образом, новые точки разрыва могут образоваться лишь на ∂E, т.е. $\mathbf{R}^2_d(f_0) \subset E_d(f) \cup \partial E$. Следовательно,

$$E_d(f) \subset \mathbf{R}^2_d(f_0) \subset E_d(f) \cup \partial E.$$

Примеры.

1) Если $f : E \to \mathbf{R}$ и $f(x) = 1$ на множестве E, то $E_d(f) = \emptyset$. $f_0(x) = \chi_E(x) \Rightarrow \mathbf{R}^2_d(f_0) = \partial E$.

2) Пусть $E = [0,1]$ и $g(x) = x$, $x \in E \Rightarrow E_d(g) = \emptyset$. $g_0(x) = x$, если $x \in E$ и $g_0(x) = 0$ для $x \in \mathbf{R} \setminus E$. Граница множества E состоит из двух точек 0 и 1. Очевидно, что $g_0 \in C(0)$ и g_0 разрывна в точке $x = 1 \Rightarrow \mathbf{R}_d(g_0) = \{1\}$.

Определение 4. *Функция f называется интегрируемой по Риману на ограниченном множестве E, если для некоторого замкнутого бруса P, содержащего множество E, функция $f_0|_P$ интегрируема на брусе P. В этом случае интеграл Римана функции f по множеству E определяется равенством*

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy \doteq \iint_{P\supset E} f_0|_P(x,y)\,dxdy \tag{7}$$

Если интеграл, стоящий в правой части (7) не существует для некоторого замкнутого бруса $P \supset E$, то функция f называется неинтегрируемой (по Риману) на множестве E.

Множество всех функций, интегрируемых на E, обозначается $R(E)$.

Лемма 3. *Пусть множество $E \subset \mathbf{R}^2$ ограничено, $f\colon E \to \mathbf{R}$ и P — замкнутый брус, т.ч. $P \supset E$.*

Тогда множества точек разрыва функции f_0 и ее сужения $f_0|_P$ на брус P совпадают с точностью до множества меры нуль в смысле Лебега.

Доказательство. Поскольку f_0 является продолжением функции $f_0|_P$ нулем, то по доказанному выше

$$P_d(f_0|_P) \subset \mathbf{R}^2_d(f_0) \subset P_d(f_0|_P) \cup \partial P.$$

Следовательно, $\mathbf{R}^2_d(f_0) \setminus P_d(f_0|_P) \subset \partial P$. Поскольку ∂P является множеством меры нуль в сысле Лебега, то $\mathbf{R}^2_d(f_0) \setminus P_d(f_0|_P)$ является множеством меры нуль в смысле Лебега как подмножество множества меры нуль в смысле Лебега.

Следствие 1. *$f_0|_P$ непрерывна п.в. на брусе $P \supset E \Leftrightarrow f_0$ непрерывна п.в. на $\mathbf{R}^2$.*

Доказательство. По доказанному $\mathbf{R}^2_d(f_0) = P_d(f_0|_P) \cup D$, где D — множество меры нуль в смысле Лебега ($D \subset \partial P$). Из этого равенства и свойств множеств меры нуль в смысле Лебега следует утверждение следствия 1.

Следствие 2. Сужение *$f_0|_P$ интегрируемо на брусе $P \supset E \Leftrightarrow$ функция f_0 ограничена и непрерывна п.в. на $\mathbf{R}^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно критерию Лебега $f_0|_P \in R(P)$ $\Leftrightarrow$ $f_0|_P$ ограничена и непрерывна п.в. на брусе P. Ограниченность $f_0|_P$ на P равносильна ограниченности f_0 на $\mathbf{R}^2$. По доказанному выше непрерывность п.в. на брусе P функции $f_0|_P$ равносильна непрерывности п.в. на $\mathbf{R}^2$ функции f_0.

Теорема 2(корректность определения интеграла). *Если замкнутые брусы P_1 и P_2 содержат множество E, то интегралы*

$$\iint_{P_1} f_0|_{P_1}(x,y)\,dxdy \ \text{ и } \ \iint_{P_2} f_0|_{P_2}(x,y)\,dxdy$$

существуют или не существуют одновременно, причем в первом случае их значения совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия 2 леммы 3 вытекает, что интегралы от $f_0|_{P_1}$ и $f_0|_{P_2}$ по брусам P_1 и P_2 существуют или не существуют одновременно (это зависит лишь от того, будет ли функция f_0 непрерывной п.в. и ограниченной на $\mathbf{R}^2$).

Пусть интегралы существуют. Введем третий брус $P \doteq P_1 \cap P_2$. Тогда имеем:

1) прямоугольник P замкнут как пересечение замкнутых множеств (см. теорему 1 лекции 1.33);

2) так как $E \subset P_i$, $i = 1, 2$, то $E \subset P_1 \cap P_2 = P$;

Чтобы доказать равенство интегралов достаточно показать, что $\iint_{P_1} f_0|_{P_1}(x,y)\,dxdy = \iint_P f_0|_P(x,y)\,dxdy$.

Всякое разбиение бруса P порождает соответствующее разбиение прямоугольника P_1, которое состоит из брусов Q_j, образующих разбиение бруса P, и брусов, получающихся в результате продолжения сторон брусов Q_j до пересечения со сторонами прямоугольника P_1.

Поскольку вне бруса P функция $f_0|_{P_1}(x,y)$ равна нулю, то значения интегральных сумм Римана от рассматриваемых сужений функции f_0, отвечающие описанным разбиениям P и P_1 совпадают между собой, если в них использовать одну и ту же разметку для брусов Q_j, а в оставшихся брусах разбиения P_1 брать в качестве разметки брать внутренние точки этих брусов. Но этого нельзя сказать о диаметрах разбиений. Поэтому проведем дополнительное разбиение оставшейся части $P_1 \setminus P$ так, чтобы

a) новое разбиение $T_1(P_1)$ было измельчением разбиения бруса P_1, порожденного разбиением T бруса P,

b) брусы Q_j являлись брусами разбиения $T_1(P_1)$,

c) диаметр $\lambda(T_1)$ нового разбиения бруса P_1 совпадал с диаметром $\lambda(T)$ разбиения P.

В таком случае все слагаемые интегральной суммы Римана функции $f_0|_P$, построенные по размеченному разбиению T бруса P, остаются членами интегральной суммы функции $f_0|_{P_1}$, построенной по новому разбиению T_1 бруса P_1.

Значения этих интегральных сумм по-прежнему совпадают. Теперь устремим $\lambda(T)$ к нулю. Так как сужения f_0 на оба прямоугольника интегрируемы, то рассматриваемые интегральные суммы имеют пределы. Эти пределы равны, т.к. интегральные суммы равны. Следовательно, значения обоих интегралов совпадают. Теорема доказана.

Замечание. Последнее утверждение позволяет в дальнейшем, не вызывая недоразумений, писать f_0 вместо сужения $f_0|_P$ на брус P под знаком интеграла по брусу $P \supset E$.

Теорема 3(критерий Лебега интегрируемости). *Пусть $E \subset \mathbf{R}^2$ допустимое множество. Функция $f : E \to \mathbf{R}$ интегрируема на множестве $E \Leftrightarrow f$ ограничена на E и непрерывна п.в. на E.*

Доказательство. Функция $f \in R(E) \overset{def}{\Leftrightarrow} f_0|_P \in R(P)$, $P \supset E \underset{\text{след. } 2}{\Leftrightarrow} f_0$ ограничена и непрерывна п.в. на $\mathbf{R}^2$. Ограниченность f_0 на $\mathbf{R}^2$ равносильна ограниченности f на E. Поскольку $E_d(f) \subset \mathbf{R}^2_d(f_0) \subset E_d(f) \bigcup \partial E$, а множество ∂E по условию является множеством меры нуль в смысле Лебега, то множество $\mathbf{R}^2_d(f_0)$ имеет лебегову меру нуль $\Leftrightarrow$ множество $E_d(f)$ множество меры нуль в смысле Лебега, т.е. f_0 непрерывна п.в. на брусе $\mathbf{R}^2 \Leftrightarrow f$ непрерывна п.в. на E. Таким образом, $f_0|_P \in R(P) \Leftrightarrow f$ ограничена и непрерывна п.в. на E. Теорема доказана.

Следствие. *Если $f \in C(E)$ (E — допустимое множество) и* *функция f ограничена на множестве E, то $f \in R(E)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий следует, что для функции f выполнены условия критерия Лебега интегрируемости.

ЛЕКЦИЯ 11
Мера Жордана и ее геометрический смысл. Свойства кратного интеграла Римана.

Мера Жордана и ее геометрический смысл

Определение 1. *Ограниченное множество $E \subset \mathbf{R}^2$ измеримо по Жордану, если существует интеграл $\iint_E dxdy$. Величина этого интеграла называется мерой Жордана множества E и обозначается μE:*

$$\mu E \doteq \iint_E dxdy.$$

Замечание. Как показывает пример из лекции 9, брус измерим по Жордану и его мера Жордана совпадает с его площадью.

Так как $\iint_E dxdy = \iint_{P \supset E} \chi_E(x,y)\,dxdy$, а множество точек разрыва функции χ_E совпадает с ∂E, то из критерия Лебега интегрируемости на брусе следует, что ограниченное множество E измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ ∂E является множеством меры нуль по Лебегу, т.е. множество E допустимо.

Итак, E измеримо по Жордану $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists \iint_{P\supset E} \chi_E(x,y)\,dxdy \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T(P)$, т.ч. $S(\chi_E, T) - s(\chi_E, T) < \varepsilon$ (теорема 3 лекции 9).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $S(\chi_E, T) = \sum_i \sum_j M_{ij}\mu P_{i,j}$, где

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } P_{i,j} \bigcap E \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } P_{i,j} \bigcap E = \emptyset, \end{cases}$$

то верхние суммы Дарбу $S(\chi_E, T)$ совпадают с суммой площадей брусов разбиения $T(P)$, имеющих непустое пересечение с E. Обозначим объединение таких брусов через $R(\varepsilon)$. Ясно, что $E \subset R(\varepsilon)$.

Теперь выясним геометрический смысл нижних сумм Дарбу $s(\chi_E, T) = \sum_i \sum_j m_{ij}\mu P_{i,j}$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } P_{i,j} \subset E; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $Q(\varepsilon)$ объединение брусов разбиения $T(P)$, содержащихся (вписанных) в множество E. Если $Q(\varepsilon) \neq \emptyset$, то из определения нижней суммы Дарбу следует, что сумма $s(\chi_E, T)$ совпадает с суммой площадей прямоугольников разбиений $T(P)$, содержащихся в множестве E, т.е. $s(\chi_E, T) = \mu Q(\varepsilon)$.

Если $Q(\varepsilon) = \emptyset$, т.е. нет брусов разбиения $T(P)$, вписанных в множество E, то из определения нижней суммы Дарбу следует, что $s(\chi_E, T) = 0$. Полагая, что пустое множество имеет площадь, равную нулю, получаем, что и в этом случае $s(\chi_E, T) = \mu Q(\varepsilon)$.

Значит, $S(\chi_E, T) - s(\chi_E, T) = \mu R(\varepsilon) - \mu Q(\varepsilon)$.

Таким образом, множество E измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ многоугольники $Q(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$ ($Q(\varepsilon)$ может быть пустым множеством) со сторонами, параллельными осям координат, т.ч.

1) $Q(\varepsilon) \subset E \subset R(\varepsilon)$,

2) $\mu R(\varepsilon) - \mu Q(\varepsilon) < \varepsilon$.

Определение 2. *Множество $D \subset \mathbf{R}^2$ называется множеством меры нуль в смысле Жордана, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечная система открытых брусов $\Pi_1, \ \ldots, \Pi_k$, $k = k(\varepsilon)$, т.ч.*

$$1)\ D \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Pi_j,\ 2)\ \sum_{j=1}^{k} \mu \Pi_j < \varepsilon.$$

Очевидно, что

1) множество меры нуль в сысле Жордана ограничено

2) всякое подмножество множества меры нуль в смысле Жордана также является множеством меры нуль в смысле Жордана;

3) множество меры нуль по Жордану является множеством меры нуль по Лебегу;

4) множество меры нуль по Лебегу может не быть множеством меры нуль по Жордану: множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел является множеством меры нуль по Лебегу, а т.к. оно не ограничено, то не является множеством меры нуль по Жордану.

5) в определении 5 вместо открытых брусов можно брать замкнутые брусы.

Лемма 1. *Всякий компакт $F \subset \mathbf{R}^2$, являющийся множеством меры нуль по Лебегу, является множеством меры нуль по Жордану.*

Доказательство сразу следует из того, что из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.

Следствие. *Множество E измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ множество E ограничено и его граница ∂E является множеством меры нуль в смысле Жордана.*

Д о к а з т л ь с т в о. Граница ∂E множества E является замкнутым множеством в $\mathbf{R}^2$ (см. лемму 1 лекции 1.33). Поскольку E — ограниченное множество, то ∂E также будет ограниченным множеством в $\mathbf{R}^2 \Rightarrow \partial E$ компакт в $\mathbf{R}^2$ (см. лекцию 1.34). Поэтому утверждение следствия вытекает из леммы 1 и свойства 3) множеств меры нуль в смысле Жордана.

Свойства кратного интеграла Римана

1) (линейность интеграла)

Если f, $g \in R(E)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ — произвольно, то

$$\lambda f \in R(E),\ f+g \in R(E)$$

и

$$\int\int_E \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \int\int_E f(x,y)\,dxdy,$$

$$\int\int_E (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \int\int_E f(x,y)\,dxdy + \int\int_E g(x,y)\,dxdy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямоугольник $P \supset E$. Так как f, $g \in R(E)$, то f_0, $g_0 \in R(P)$. В силу свойств интеграла по брусу $f_0 + g_0$, $\lambda f_0 \in R(P)$. Далее, очевидно, что $(\lambda f)_0 = \lambda f_0$ и $(f+g)_0 = f_0 + g_0$. Следовательно, $(\lambda f)_0$, $(f+g)_0 \in R(P)$. Тогда по определению интегрируемости λf, $f+g \in R(E)$. Из определения интеграла по множеству и из свойств интеграла по брусу

$$\int\int_E (\lambda f(x,y))\,dxdy = \int\int_P (\lambda f_0)(x,y)\,dxdy =$$

$$= \lambda \int\int_P f_0(x,y)\,dxdy = \lambda \int\int_E f(x,y)\,dxdy,$$

$$\int\int_E (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \int\int_P (f(x,y)+g(x,y))_0\,dxdy =$$

$$\int\int_P (f_0(x,y)+g_0(x,y))\,dxdy = \int\int_P f_0(x,y)\,dxdy + \int\int_P g_0(x,y)\,dxdy =$$

$$\int\int_E f(x,y)\,dxdy + \int\int_E g(x,y)\,dxdy.$$

2) (интегрируемость произведения)

Пусть f, $g \in R(E)$. Тогда $fg \in R(E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть замкнутый брус $P \supset E$. Тогда f_0, $g_0 \in R(P)$ и по свойству интеграла по брусу $f_0 g_0 \in R(P)$. Очевидно, что $(fg)_0 = f_0 g_0$. Поэтому $(fg)_0 \in R(P)$. Отсюда по определению интегрируемости $fg \in R(E)$.

3) (интегрируемость модуля)

Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$ и

$$\left|\int\int_E f(x,y)\,dxdy\right| \le \int\int_E |f(x,y)|\,dxdy$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть замкнутый брус $P \supset E$. Тогда $f_0 \in R(P)$ и по свойствам интеграла по брусу $|f_0| \in R(P)$. Так как имеет место очевидное равенство $|f_0| = |f|_0$, то $|f|_0 \in R(P)$. Следовательно, $|f| \in R(E)$.

Оценка следует из соответствующей оценки для интегралов по брусу

$$\left|\int\int_E f\,dxdy\right| = \left|\int\int_P f_0\,dxdy\right| \le \int\int_P |f_0|\,dxdy =$$

$$\int\int_P |f|_0\,dxdy = \int\int_E |f|\,dxdy.$$

Как и в одномерном случае из $|f| \in R(E)$ не следует $f \in R(E)$.

4)(интеграл и неравенства)

Пусть $f \in R(E)$ *и* $\forall (x,y) \in E$: $f(x,y) \geq 0$. *Тогда* $\int\int_E f(x,y)\,dxdy \geq 0$.

Доказательство. Если функция $f \geq 0$ на E, то $f_0 \geq 0$ на $\mathbf{R}^2$. Поэтому

$$\int\int_E f(x,y)\,dxdy = \int\int_{P\supset E} f_0(x,y)\,dxdy \geq 0,$$

т.к. в силу свойств интеграла по брусу последний интеграл неотрицателен.

Следствие. *Пусть* f, $g \in R(E)$ *и* $f \geq g$ *на* E. *Тогда* $\int\int_E f(x,y)\,dxdy \geq \int\int_E g(x,y)\,dxdy$.

Доказательство. Так как функция $f - g \geq 0$ на E, то из 4) и линейности кратного интеграла

$$0 \leq \int\int_E (f(x,y) - g(x,y))\,dxdy = \int\int_E f(x,y)\,dxdy - \int\int_E g(x,y)\,dxdy.$$

В приведенных свойствах интеграла от множества E требовалась лишь ограниченность. Однако если не требовать измеримости множества E по Жордану, то множество $R(E)$ интегрируемых на E функций не будет содержать, например, постоянные функции, отличные от нулевой. Таким образом, в этом случае не все ограниченные непрерывные функции окажутся интегрируемыми, т.е. не будет включения $C(E) \subset R(E)$. Поэтому всюду в дальнейшем множество E будет предполагаться измеримым по Жордану.

5) (оценка интеграла)

Пусть $f \in R(E)$ *и* $\forall (x,y) \in E$: $m \leq f(x,y) \leq M$. *Тогда*

$$m\mu E \leq \int\int_E f(x,y)\,dxdy \leq M\mu E.$$

Доказательство. Поскольку E измеримо по Жордану, то в силу критерия Лебега постоянные на множестве E функции интегрируемы. Следовательно, неравенство $m \leq f(x,y) \leq M$ можно интегрировать, что приводит к требуемой оценке.

Следствие. *Пусть* $f \in R(E)$. *Если* $\mu E = 0$, *то* $\int\int_E f(x,y)\,dxdy = 0$.

Доказательство. Утверждение вытекает из свойства 5.

6) (теорема о среднем)

Пусть f, $g \in R(E)$, $g \geq 0$ *на* E, $m \doteq \inf_E f(x,y)$, $M \doteq \sup_E f(x,y)$. *Тогда* $\exists \theta \in [m, M]$, *т.ч.*

$$\int\int_E f(x,y)g(x,y)\,dxdy = \theta \int\int_E g(x,y)\,dxdy.$$

Доказательство. Доказывается теорема о среднем, как в одномерном случае.

Следствие. *Если предположить, что* E *линейно связный компакт и* $f \in C(E)$, *то* $\exists (x_0, y_0) \in E$, *т.ч.*

$$\int\int_E f(x,y)g(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\int\int_E g(x,y)\,dxdy.$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о среднем и свойств непрерывных функций.

7) (интегрируемость по измеримым подмножествам)

Если $f \in R(E)$, $D \subset E$, D *— измеримо по Жордану, то* $f \in R(D)$, *точнее сужение* $f|_D \in R(D)$.

Доказательство. Пусть $f|_D$ — сужение функции f на D, т.е. функция f, рассматриваемая только на D. Очевидно, что всякая точка разрыва сужения $f|_D$ будет точкой разрыва f, т.е. $D_d(f) \subset E_d(f) \Rightarrow$ множество $D_d(f)$ является множеством меры нуль в смысле Лебега как подмножество множества меры нуль по Лебегу. Значит, $f|_D$ непрерывна п.в. на D. Поскольку f ограничена на E, то сужение $f|_D$ тем более ограничено на D. Следовательно, по критерию Лебега функция $f|_D \in R(D)$.

Замечание. При интегрировании по подмножествам, там где это не вызывает недоразумений, вместо сужения функции будем указывать саму функцию.

ЛЕКЦИЯ 12
Свойства кратного интеграла Римана (продолжение). Свойства меры Жордана.

8)(аддитивность интеграла)

Пусть $f\colon E_1 \cup E_2 \to \mathbf{R}$, *множества* E_1 *и* E_2 *измеримы по Жордану и функция* f *интегрируема на* E_1 *и* E_2, *точнее* $f|_{E_1} \in R(E_1)$, $f|_{E_2} \in R(E_2)$. *Тогда* $f \in R(E_1 \cup E_2)$, $f \in R(E_1 \cap E_2)$ (*точнее* $f|_{E_1 \cap E_2} \in R(E_1 \cap E_2)$) *и*

$$\int\int_{E_1 \cup E_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$\int\int_{E_1} f(x,y)\,dxdy + \int\int_{E_2} f(x,y)\,dxdy - \int\int_{E_1 \cap E_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *или* $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, *то*

$$\int\int_{E_1 \cup E_2} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{E_1} f(x,y)\,dxdy + \int\int\limits_{E_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 лекции 10 множества $E_1 \cup E_2$ и $E_1 \cap E_2$ измеримы по Жордану. Поскольку $E_1 \cap E_2 \subset E_1$, то из свойства 7 следует, что $f \in R(E_1 \cap E_2)$.

Любая точка разрыва функции f: $E_1 \cup E_2 \to \mathbf{R}$ принадлежит хотя бы одному из множеств E_1 и E_2. Пусть для определенности точка разрыва функции f содержится в множестве E_1. Тогда она либо внутреняя точка E_1, либо граничная точка множества E_1. В первом случае она будет и точкой разрыва сужения $f|_{E_1}$, ибо f и $f|_{E_1}$ совпадают в некоторой окрестности этой точки. Следовательно, рассматриваемая точка разрыва содержится в $E_{1d}(f) \cup \partial E_1$. Отсюда следует, что каждая точка разрыва функции f: $E_1 \cup E_2 \to \mathbf{R}$ входит в множество $E_{1d}(f|_{E_1}) \cup \partial E_1 \cup E_{2d}(f|_{E_2}) \cup \partial E_2$. На основании свойств множеств меры нуль в смысле Лебега и условий теоремы заключаем, что функция f непрерывна п.в. на $E_1 \cup E_2$.

Из интегрируемости функции f на множествах E_1 и E_2 следует ее ограниченность на этих множествах. Но тогда f ограничена и на $E_1 \cup E_2$. Поэтому в силу критерия Лебега $f \in R(E_1 \cup E_2)$.

Теперь перейдем к доказательству формул. Для продолжения f_0 функции f нулем с $E_1 \cup E_2$ справедливо следующее равенство

$$f_0 = f_0\chi_{E_1} + f_0\chi_{E_2} - f_0\chi_{E_1\cap E_2} \tag{8}$$

(если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то третье слагаемое отсутствует). Действительно, представим $E_1 \cup E_2$ в виде объединения непересекающихся множеств:

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_1 \cap E_2).$$

Легко видеть, что на каждом из этих множеств равенство (8) выполняется. Отметим еще, что функции $f_0\chi_{E_1}$, $f_0\chi_{E_2}$ и $f_0\chi_{E_1\cap E_2}$ являются продолжением нулем функции f с множеств E_1, E_2 и $E_1 \cap E_2$ соответственно (точнее, сужений функции f на эти множества).

Пусть брус $P \supset E_1 \cup E_2$. Из определениия интеграла по множеству, свойств интеграла по брусу и (8) имеем:

$$\int\int_{E_1\cup E_2} f\,dxdy = \int\int_P f_0\,dxdy =$$

$$\int\int_P ((f|_{E_1})_0 + (f|_{E_2})_0 - (f|_{E_1\cap E_2})_0)\,dxdy =$$

$$\int\int_P (f|_{E_1})_0\,dxdy + \int\int\limits_P (f|_{E_2})_0\,dxdy - \int\int_P (f|_{E_1\cap E_2})_0\,dxdy =$$

$$\int\int_{E_1} f\,dxdy + \int\int\limits_{E_2} f\,dxdy - \int\int_{E_1\cap E_2} f\,dxdy.$$

Если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то по доказанному выше $\int\int_{E_1\cap E_2} f\,dxdy = 0$. Следовательно, справедливо и второе утверждение теоремы.

Следствие (монотонность интеграла). *Пусть $f \in R(E)$, $D \subset E$, где множества D и E измеримы по Жордану. Если $f \geq 0$*

на множестве E, *то*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy \le \int\int_E f(x,y)\,dxdy.$$

Доказательство. Представим $E = D\cup(E\setminus D)$. Поскольку множество $E\setminus D$ измеримо по Жордану и $D\cap(E\setminus D)=\emptyset$, то

$$\int\int_E f\,dxdy = \int\int_D f\,dxdy + \int\int_{E\setminus D} f\,dxdy \ge \int\int_D f\,dxdy,$$

т.к. $\int\int_{E\setminus D} f\,dxdy \ge 0$.

9) (положительность интеграла)

Пусть $f\in R(E)$, *множество* E *измеримо по Жордану и* $f(x,y)\ge 0$ *на* E. *Если существует внутренняя точка* (x_0,y_0) *множества* E, *т.ч.* $f\in C((x_0,y_0))$ *и* $f(x_0,y_0)>0$, *то* $\int\int_E f(x,y)\,dxdy>0$.

Доказательство. Из условий вытекает, что существует шар $B\subset E$ с центром в точке (x_0,y_0), т.ч. $\forall (x,y)\in B$: $f(x,y)\ge \frac{1}{2}f(x_0,y_0)>0$ (это следует из леммы о знаке и того, что точка внутренняя). Так как шар B измерим по Жордану (см. пример из лекции 10), то по свойствам интеграла (монотонность интеграла, интегрирование неравенств и линейность интеграла)

$$\int\int_E f\,dxdy \ge \int\int_B f\,dxdy \ge \frac{1}{2}f(x_0,y_0)\mu B > 0$$

(то, что $\mu B>0$ следует из того, что в шар B можно вписать невырожденный куб Q, чья мера в силу замечания из лекции 11 положительна, а тогда (см. ниже свойства меры Жордана) $\mu B\ge\mu Q>0$).

Следствие (об обращении в нуль подынтегральной функции). *Пусть* $f\in R(E)$, *множество* E *измеримо по Жордану и* $f\ge 0$ *на* E. *Если* $\int\int_E f(x,y)\,dxdy=0$, *то* $f=0$ *п.в. на* E.

Доказательство. Если множество E не имеет внутренних точек, т.е. $E\subset\partial E$, то E является множеством меры нуль в смысле

Лебега. Следовательно, любое свойство, в частности, равенство f нулю выполняется п.в. на E.

Пусть множество внутренних точек множества E не пусто. В силу критерия Лебега f непрерывна п.в. на E, т.е. существует множество $E_1 \subset E$ меры нуль по Лебегу, т.ч. $f \in C(E \setminus E_1)$. По условию множество ∂E также является множеством меры нуль в смысле Лебега, следовательно, множество $\hat{E} \doteq E_1 \cup \partial E$ является множеством меры нуль по Лебегу. Покажем, что $\forall (x, y) \in E \setminus \hat{E}$: $f(x, y) = 0$.

Предположим противное: $\exists (x_0, y_0) \in E \setminus \hat{E}$, т.ч. $f(x_0, y_0) > 0$. По построению множество $E \setminus \hat{E}$ состоит из внутренних точек множества E, в которых функция f непрерывна. Поэтому в силу 8) $\int\int_E f(x, y)\, dxdy > 0$ — получили противоречие, которое доказывает утверждение.

Для полноты приведем еще три утверждения. Отметим, что в дальнейшем они не используются.

10) (измеримость множеств меры нуль в смысле Жордана)

Пусть E является множеством меры нуль в смысле Жордана. Тогда E измеримо по Жордану и $\mu E = 0$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует конечная система замкнутых брусов $P_1, \ldots, P_{k(\varepsilon)}$, т.ч. $E \subset \bigcup_j^{k(\varepsilon)} P_j$ и $\sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \mu P_j < \varepsilon$. Поскольку объединение $\cup_j^{k(\varepsilon)} P_j$ замкнуто, то $\partial E \subset \cup_j^{k(\varepsilon)} P_j$. Поэтому ∂E есть множество меры нуль в смысле Жордана, откуда следует, что множество E измеримо по Жордану. Далее, в силу свойств интеграла

$$\mu E = \int\int_E dxdy \le \int\int_{\bigcup_{j=1}^{k(\varepsilon)} P_j} dxdy \le$$

$$\sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \int\int_{P_j} dxdy = \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \mu P_j < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $\mu E = 0$.

11) *Если $\mu E = 0$, то E является множеством меры нуль в смысле Жордана.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$0 = \mu E = \int\int_E dxdy = \int\int_{P\supset E} \chi_E(x,y)\, dxdy =$$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \sum_j \chi_E(u_i, v_j)\mu P_{ij},\ (u_i, v_j) \in P_{ij}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\delta > 0$, т.ч. для произвольного размеченного разбиения бруса P с диаметром разбиения $\lambda(T) < \delta$: $|\sum_i \sum_j \chi_E(u_i, v_j)\mu P_{ij}| < \varepsilon$. Если для брусов P_{ij}, т.ч. $P_{ij} \bigcap E \neq \emptyset$, выбрать точки разметки (u_i, v_j) из $P_{ij} \bigcap E$, то соответствующая интегральная сумма Римана совпадет с суммой площадей брусов P_{ij}, покрывающих множество E. Значит, для данного $\varepsilon > 0$ предъявлена конечная система замкнутых брусов, объединение которых содержит множество E, с суммарной площадью $< \varepsilon$. В силу произвольности ε утверждение доказано.

12) *Если $\mu E = 0$, то всякая ограниченная на множестве E функция интегрируема на E и ее интеграл по E равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно 11 множество E является множеством меры нуль в сысле Жордана. А любая функция, заданная на множестве меры нуль в смысле Жордана, непрерывна п.в. на нем. Если функция к тому же ограничена, то ее интегрируемость следует из критерия Лебега. Равенство нулю интеграла вытекает из следствия к свойству 3.

Следствие. *Пусть $f\colon E \to \mathbf{R}$, E измеримо по Жордану, $D \subset E$ и $\mu D = 0$. Если функция $f \in R(E)$ и $g = f$ на $E\setminus D$ причем функция g ограничена на множестве D, то $g \in R(E)$ и $\int\int_E g(x,y)\, dxdy = \int\int_E f(x,y)\, dxdy$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий следует, что функции f, $g \in R(D)$. В силу свойства 6) $f \in R(E \setminus D)$, а значит, и $g \in R(E \setminus D)$. Применяя 8, заключаем, что $g \in R(E)$. Далее, учитывая, что интегралы от f и g по множеству D равны нулю и снова используя свойств 8, имеем

$$\int\int_E f(x,y)\, dxdy = \int\int_{E\setminus D} f(x,y)\, dxdy + \int\int_D f(x,y)\, dxdy =$$

$$\int\int_{E\setminus D} g(x,y)\,dxdy + \int\int_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{E} g(x,y)\,dxdy.$$

Утверждение доказано.

Приведенное свойство означает, что изменение функции на множестве нулевой меры при условии, что сохраняется ограниченность функции, не приводит к изменению значения интеграла.

Свойства меры Жордана

Из полученных свойств кратного интеграла Римана следуют соответствующие свойства меры Жордана:

1) для любого измеримого по Жордану множества E: $\mu E \geq 0$ (неотрицательность меры).

2) для произвольных измеримых по Жордану множеств D и E, т.ч. $D \subset E$:

$$\mu D \leq \mu E \text{ (монотонность меры).}$$

3) для любых измеримых по Жордану множеств D и E множества $D \cup E$ и $D \cap E$ измеримы по Жордану и

$$\mu(D \cup E) = \mu D + \mu E - \mu(D \cap E),$$

в частности, если $\mu(D \cap E) = 0$, то

$$\mu(D \cup E) = \mu D + \mu E \text{ (аддитивность меры).}$$

ЛЕКЦИЯ 13
Вычисление кратных интегралов: сведение кратных интегралов к повторным, замена переменной в кратном интеграле.

Вычисление кратных интегралов основано на сведении их к повторным интегралам. Сначала рассмотрим случай, когда интеграл берется по прямоугольнику $P = [a, b] \times [c, d]$.

Теорема 1. *Пусть $f \in R(P)$ и $\forall x \in [a, b]$ функция $f(x, y) \in R[c, d]$ (как функция одной переменной y), и $\forall y \in [c, d]$ функция $f \in R[a, b]$ (как функция переменной x). Пусть $g(x) \doteq \int_c^d f(x, y)\,dy$, $h(y) \doteq \int_a^b f(x, y)\,dx$.*

Тогда $g \in R[a, b]$, $h \in R[c, d]$ и

$$I \doteq \int\int_P f(x, y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx = \int_c^d h(y)\,dy,$$

т.е.

$$\int\int_P f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Доказательство. Докажем, что $\int_a^b g(x)\,dx = \int\int_P f(x, y)\,dxdy$. Возьмем $\forall T(P)$. Пусть его образуют брусы $P_{k,l} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ и $m_{k,l} = \inf_{P_{k,l}} f(x, y)$, $M_{k,l} = \sup_{P_{k,l}} f(x, y)$. Выберем в каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ по одной точке u_k. Тогда

$$g(u_k) = \int_c^d f(u_k, y)\,dy = \sum_l \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(u_k, y)\,dy.$$

Поскольку при $y \in [y_{l-1}, y_l]$ имеем $m_{k,l} \le f(u_k, y) \le M_{k,l}$, то

$$m_{k,l}\Delta y_l \le \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(u_k, y)\,dy \le M_{k,l}\Delta y_l.$$

Следовательно,

$$\sum_l m_{k,l}\Delta y_l \le g(u_k) \le \sum_l M_{k,l}\Delta y_l.$$

Умножим эти неравенства на Δx_k и просуммируем по k:

$$\sum_{k}^{m}\sum_{l}^{n} m_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \le \sum_{k}^{n} g(u_k)\Delta x_k =$$

$$\sigma(g,(T^x,\bar{u})) \le \sum_{k}^{m}\sum_{l}^{n} M_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l,$$

т.е.

$$s(f,T) \le \sigma(g,(T^x,\bar{u})) \le S(f,T),\ T=(T^x,T^y).$$

Но I также удовлетворяет этому неравенству $s(f,T) \le I \le S(f,T)$. Значит,

$$|I-\sigma(g,(T^x,\bar{u}))| \le S(f,T)-s(f,T)$$

В силу критерия Дарбу $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, т.ч. $\forall T=(T^x,T^y)$ с $\lambda(T)<\delta$ и любой разметки $\bar{u}$ разбиения $T^x[a,b]$:

$$|I-\sigma(g,(T^x,\bar{u}))| \le S(f,T)-s(f,T)<\varepsilon.$$

Отсюда получаем, что и для любого размеченного разбиения $(\tilde{T}^x,\bar{w})$ отрезка $[a,b]$ с $\lambda(\tilde{T}^x)<\delta$: $|I-\sigma(g,(\tilde{T}^x,\bar{w}))|<\varepsilon$ (в самом деле, для произвольного разбиения $\tilde{T}^x[a,b]$ с $\lambda(\tilde{T}^x)<\delta$ можно построить такое разбиение $\tilde{T}^y[c,d]$, чтобы для разбиения $\tilde{T}=(\tilde{T}^x,\tilde{T}^y)$ прямоугольника P его мелкость $\lambda(\tilde{T})<\delta$: это следует из того, что если одна сторона прямоугольника $<\delta$, то можно подобрать вторую сторону так, чтобы диагональ прямоугольника также была $<\delta$), т.е. $I=\int_a^b g(x)\,dx$.

Второе равенство доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Условие интегрируемости функции $f(x,y)$ по каждой из переменных включено в формулировку теоремы для упрощения рассуждений при ее доказательстве. Оно выполнено, например, если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике. В этом случае доказанная теорема содержит утверждение об интегрировании параметрического интеграла (теорема 7 лекции 6).

Рассмотрим теперь случай интегрирования по произвольному измеримому множеству $E \subset \mathbf{R}^2$. Пусть брус $P = [a,b] \times [c,d] \supset E$. Тогда

$$\int\int_E f(x,y)\,dxdy = \int\int_P f_0(x,y)\,dxdy =$$

$$\int_a^b dx \int_c^d f_0(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f_0(x,y)\,dx.$$

(при условии, что функция f_0 удовлетворяет условиям доказанной теоремы). Перепишем повторные интегралы так, чтобы в них использовалось лишь значения функции $f(x,y)$, т.е. чтобы повторные интегралы распространялись только на точки множество E.

Рассмотрим первый повторный интеграл. Введем ортогональную проекцию множества E на ось Ox:

$$\mathrm{pr}_{Ox}E \doteq \{x \in \mathbf{R}|\ (x,y) \in E\},$$

(это множество абсцисс точек множества E).

Далее для каждого фиксированного x определим множества

$$E(x) \doteq \{y \in \mathbf{R}|\ (x,y) \in E\}.$$

Очевидно, что $E(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \mathrm{pr}_{Ox}E$.

Множество $E(x_0)$ при фиксированном $x_0 \in \mathrm{pr}_{Ox}E$ является множеством ординат точек (x_0, y) прямой $x = x_0$, параллельной оси Oy, принадлежащих множеству E. Ради краткости множества вида $E(x_0)$ будем называть сечениями множества E прямыми $x = x_0$.

При фиксированном $x \in \mathrm{pr}_{Ox}E$ функция $f_0(x,y) = f(x,y) \Leftrightarrow y \in E(x)$. Если $x \notin \mathrm{pr}_{Ox}E$, то $f_0(x,y) = 0$ для $\forall y$. Поэтому

$$\int_a^b dx \int_c^d f_0(x,y)\,dy = \int_{\mathrm{pr}_{Ox}E} dx \int_{E(x)} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично

$$\int_c^d dy \int_a^b f_0(x,y)\,dx = \int_{\mathrm{pr}_{Oy}E} dy \int_{E(y)} f(x,y)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathrm{pr}_{Ox}E} dx \int_{E(x)} f(x,y)\,dy = \int_{\mathrm{pr}_{Oy}E} dy \int_{E(y)} f(x,y)\,dx.$$

Пример. Если $E = \{(x,y)|\ x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, $g_i \in C[a,b]$, то $\mathrm{pr}_{Ox}E = [a,b]$, $E(x) = [g_1(x), g_2(x)]$ для $x \in \mathrm{pr}_{Ox}E$. Поэтому

$$\int\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Замена переменных в кратном интеграле Римана

Напомним, что замкнутыми областями в $\mathbf{R}^2$ называются замыкания областей (открытых и линейно–связных множеств) и, что замкнутые области являются замкнутыми множествами. Отметим, что одна и та же замкнутая область может быть представлена как замыкания разных областей. В самом деле, замкнутый круг $C = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \le 1\}$ можно представить как замыкание области $B = \{(x,y)|\ x^2+y^2 < 1\}$, так и области $D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 < 1\} \setminus \{(x,0)|\ 0 \le x < 1\}$ — круга B с выброшенным радиусом, лежащим на оси Ox: $C = B\bigcup \partial B = D \bigcup \partial D$.

Пусть отображение (вектор–функция) $\bar h$ отображает замкнутую область $\overline{A} \subset \mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$.

Определение 1. *Отображение $\bar h$ называют непрерывно дифференцируемым на замкнутой области $\overline{A}$ ($\bar h \in C^1(\overline{A})$), если существует открытое в $\mathbf{R}^n$ множество $G \supset \overline{A}$ такое, что $\bar h \in C^1(G)$.*

Перейдем к вопросу о том, как преобразуется интеграл $\int\int_{\overline{E}} f(x,y)\,dxdy$ по замкнутой измеримой по Жордану области $\overline{E}$, если в нем выполнить замену переменных $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ $(u,v) \in \overline{D}$. С каждой такой заменой связано отображение (вектор–функция) $\bar g$: $\overline{D} \to \overline{E}$ замкнутых областей $\overline{D}$ и $\overline{E}$ ($\bar g(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$), т.ч $\bar g(\overline{D}) = \overline{E}$. Условия на отображение $\bar g$, при которых возможна указанная замена, содержатся в следующей теореме. Доказательство ее довольно длинное и поэтому не приводится.

Теорема 2(формула замены переменной). *Пусть D и E — измеримые по Жордану области в* $\mathbf{R}^2$, *$\overline{D}$ и $\overline{E}$ — их замыкания. Пусть отображение $\bar{g}$: $\overline{D} \to \overline{E}$ таково, что*

1) $\bar{g}(\overline{D}) = \overline{E}$,
2) $\bar{g}$: $D \to E$ — *биекция,*
3) $\bar{g} \in C^1(\overline{D})$,
4) *якобиан этого отображения*

$$J_{\bar{g}} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

во всех точках области D.

Тогда для произвольной функции $f \in R(\overline{E})$, функция $f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J_{\bar{g}}| \in R(\overline{D})$ и

$$\iint\limits_{\overline{E}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J_{\bar{g}}|\,dudv.$$

Пример. Переход к полярной системе координат (ПСК), совмещенной с данной декартовой системой координат, осуществляется по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Якобиан этой замены равен $J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \cos\varphi \cdot r\cos\varphi - \sin\varphi \cdot (-r\sin\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$.

Выполним замену переменных (перейдем к ПСК) в интеграле по замкнутому кругу $K \doteq \{(x,y)|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Вектор–функция $(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ отображает замкнутый брус $P = [0, 2\pi] \times [0, R]$ на круг K. Это отображение бесконечно дифференцируемо на P, но оно не является взаимно однозначным отображением P на K: весь отрезок $[0, 2\pi]$ оси φ, т.е. точки вида $(\varphi, 0)$, отображается в одну и ту же точку $(0,0)$ плоскости xOy; точки $(0, r)$ и $(2\pi, r)$, $r \in [0, R]$, переходят в отрезок $[0, R]$ оси Ox. Отметим, что отрезок $\{(\varphi, r)|\ r = R,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ отображается на границу ∂K круга K.

Однако это отображение является взаимно однозначным отображением областей $P \backslash \partial P$ и $K \backslash K_1$, где $K_1 \doteq \partial K \bigcup \{(x,0)| x \in [0, R]\}$, замыкание которых совпадает с K и P соответственно. Эти области измеримы по Жордану. Тогда согласно теореме 2

$$\int\int_K f(x,y)\,dxdy = \int\int_P f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi dr =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Все свойства двойных интегралов без каких–либо принципиальных изменений в доказательствах переносятся на общий случай n–кратных интегралов ($n > 2$).

Ограничимся лишь формулировкой теоремы о сведении тройного интеграла к повторным. Для этого введем некоторые обозначения: $P \doteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $x \doteq (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{x} \doteq (x_1, x_2)$, $dx \doteq dx_1dx_2dx_3$, $d\bar{x} \doteq dx_1dx_2$, $P_{\bar{x}} \doteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in R(P)$ *и* $I \doteq \int_P f(x)\,dx$, $\forall x_3 \in [a_3, b_3]$ *функция* $f(x_1, x_2, x_3) \in R(P_{\bar{x}})$ *и* $\forall \bar{x} \in P_{\bar{x}}$ *функция* $f(x_1, x_2, x_3) \in R[a_3, b_3]$. *Пусть* $g(x_3) \doteq \int_{P_{\bar{x}}} f(x)\,d\bar{x}$ *и* $h(x_1, x_2) \doteq \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx_3$.

Тогда $g \in R[a_3, b_3]$, $h \in R(P_{\bar{x}})$ *и*

$$I = \int_{a_1}^{b_1} g(x_3)\,dx_3 = \int_{P_{\bar{x}}} h(\bar{x})\,d\bar{x}, \text{ т.е.}$$

$$I = \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \int\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1dx_2 =$$

$$\int\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} dx_1dx_2 \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_3.$$

Посмотрим, как будут выглядеть формулы, выражающие тройной интеграл по измеримому множеству через повторные. Пусть $f \in R(D)$, $D \subset \mathbf{R}^3$ измеримо по Жордану. Рассуждая, как и в случае двойных интегралов, получаем, что

$$\int\int\int_D f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1dx_2dx_3 =$$

$$\int_{\mathrm{pr}_{Ox_3} D} dx_3 \int\int_{D(x_3)} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 =$$

$$\int\int_{\mathrm{pr}_{x_1 O x_2} D} dx_1 dx_2 \int_{D(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3.$$

(в первом повторном интеграле внешний интеграл берется по ортогональной проекции множества D на ось Ox_3, а внутренний по сечению $D(x_3) = \{(x_1, x_2) |\ (x_1, x_2, x_3) \in D\}$ множества D плоскостью, проходящей через точку $(0, 0, x_3) \in \mathrm{pr}_{Ox_3} D$ и перпендикулярной оси Ox_3; во втором повторном интеграле внешний интеграл берется по ортогональной проекции множества D на плоскость $x_1 O x_2$, а внутренний — по сечению $D(x_1, x_2) = \{x_3 |\ (x_1, x_2, x_3) \in D\}$ множества D прямой, проходящей через точку $(x_1, x_2, 0) \in \mathrm{pr}_{x_1 O x_2} D$ и перпендикулярной плоскости $x_1 O x_2$). Двойные интегралы по $D(x_3)$ и $\mathrm{pr}_{x_1 O x_2} D$ в свою очередь могут быть сведены к повторным. Тем самым тройной интеграл будет записан в виде повторных однократных интегралов.

Разумеется имеют место аналогичные формулы, если изначально брать проекции множества D на оси Ox_1 и Ox_2 или на плоскости $x_1 O x_3$ и $x_2 O x_3$.

Пример Если $D = \{(x, y, z) |\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$, где $\varphi_i \in C[a, b]$, $\psi_i \in C\{(x, y) |\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, $i = 1, 2$, то

$$\mathrm{pr}_{xOy} D = \{(x, y) |\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

а сечение

$$D(x, y) = \{z |\ \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\},\ \text{если } (x, y) \in \mathrm{pr}_{xOy} D.$$

Поэтому

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dx dy dz = \int\int_{\mathrm{pr}_{xOy} D} dx dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Измеримость множества D по Жордану следует из того, что график непрерывной на компакте функции двух переменных является множеством меры нуль в смысле Жордана в трехмерном пространстве. Доказывается это почти так же, как и для функций одной переменной.

ЛЕКЦИЯ 14
Сферические и цилиндрические координаты в $\mathbf{R}^3$. Кратный несобственный интеграл Римана

Зафиксируем декартову систему координат (ДСК) $Oxyz$ и рассмотрим точку $M(x,y,z) \neq O(0,0,0)$, не лежащую на оси Oz. Тогда $r = OM > 0$. Обозначим через M' ортогональную проекцию точки M на плоскость xOy, а через $\psi = (\widehat{OM', OM})$, причем угол считается положительным, если точка M лежит в верхнем полупространстве $z \geq 0$ и отрицательным — в противном $\Rightarrow -\pi/2 < \psi < \pi/2$ и $z = r\sin\psi$. На плоскости xOy введем обычную полярную систему координат (ПСК):

$$x = OM'\cos\varphi = r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$y = OM'\sin\varphi = r\cos\psi\sin\varphi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$z = OM\sin\psi = r\sin\psi.$$

Упорядоченная тройка чисел (r,φ,ψ) назавается сферическими координатами точки M.

Таким образом, формулы, связывающие ДСК и сферическую систему координат (ССК), имеют вид

$$x = r\cos\varphi\cos\psi$$

$$y = r\sin\varphi\cos\psi$$

$$z = r\sin\psi$$

Для начала координат (точки O) $r = 0$, а φ и ψ однозначно не определены; для других точек оси Oz угол φ однозначно не определяется, а угол $\psi = \pm\pi/2$.

Непосредственный подсчет показывает, что якобиан этого отображения $J = r^2\cos\psi$.

Введем цилиндрическую систему координат (ЦСК). Снова зафиксируем ДСК $Oxyz$ и возьмем точку $M(x,y,h) \neq O$, не лежащую на оси Oz. Пусть M' — ортогональная проекция точки M на плоскость xOy. Обозначим через $r = OM'$ и рассмотрим на плоскости xOy ПСК. Тогда

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = h$$

и упорядоченная тройка (r, φ, h) называется координатами точки M в ЦСК. Для точек, лежащих на оси Oz, φ однозначно не определяется.

Простые вычисления показывают, что якобиан этого отображения $J = r$.

Кратный несобственный интеграл Римана

Ограничимся рассмотрением двойных НИ. При этом все сказанное будет справедливо и в общем случае.

Напомним определение особой точки функции. Пусть $f\colon E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$.

Определение 1. *Точка $a \in E'$ называется особой точкой функции f, если либо a конечная точка и $\forall \dot{U}(a)$ функция $f(x)$ не ограничена в $\dot{U}(a) \bigcap E$, либо $a = \infty$.*

Через $E_s(f)$ обозначим множество особых точек функции f, определенной на множестве E.

Пример. Функции $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $0 < x^2+y^2 < 1$ и $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, если $0 < x^2+y^2 < 1$ и $g(0,0) = 0$ имеют единственную особую точку $(0,0)$, но в одном случае она не принадлежит области определения рассматриваемой функции, а в другом входит в область задания функции.

Сначала определим несобственный интеграл в смысле главного значения по ограниченному множеству. Пусть $f\colon E \to \mathbf{R}$, множество E измеримо по Жордану и у функции f имеется единственная особая точка a ($E_s(f) = \{a\}$). Введем множества

$$E(r) \doteq E \setminus B(a,r),$$

где через $B(a, r)$, как всегда, обозначены шары с центром в точке a и радиусами $r > 0$. Множества $E(r)$ измеримы по Жордану как разность измеримых множеств (пустое множество считается измеримым по Жордану). Пусть функция $f \in R(E(r))$ для всех $r > 0$. Тогда имеет смысл функция

$$I(r) \doteq \int\int_{E(r)} f(x, y)\, dxdy.$$

Замечание. Так как множество E измеримо по Жордану и $E_s(f) = \{a\}$, то из условия $f \in R(E(r))$ для $\forall r > 0$ следует, что функция f непрерывна п.в. на E. Действительно, множество точек разрыва функции f содержится в счетном объединении множеств точек разрыва сужений $f|_{E(1/n)}$ и $\partial E(1/n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Определение 2. *Функция $I(r)$ называется НИ в смысле в смысле главного значения функции f и обозначается символом $p.v.\int\int_E f(x, y)\, dxdy$.*

Если существует конечный $\lim_{r\to 0} I(r)$, то НИ сходится (в смысле главного значения), а величина предела называется значением НИ (в смысле главного значения) и обозначается тем же символом $p.v.\int\int_E f(x, y)\, dxdy$, что и сам несобственный интеграл.

Если не существует $\lim_{r\to 0} I(r)$, то говорят, что интеграл от функции f расходится (не существует) в смысле главного значения.

Дадим теперь общее определение НИ. Для этого введем понятие исчерпания множества.

Определение 3. *Исчерпанием множества $D \subset \mathbf{R}^2$ называется последовательность множеств (D_k), т.ч.*

1) $\forall k \in \mathbf{N}$ *множества D_k измеримы по Жордану*
2) $\forall k :\ D_k \subset D_{k+1} \subset D$
3) $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D_k = D.$

Определение 4. *Измеримое по Жордану множество $A \subset E$ называется допустимым для функции $f\colon E \to \mathbf{R}$, если $f \in R(A)$.*

Как следует из определения, всякое допустимое для функции f множество является подмножеством $E \setminus E_s(f)$.

Определение 5. *Для функции $f\colon E \to \mathbf{R}$ всякое исчерпание множества $E \setminus E_s(f)$ допустимыми множествами называется допустимым.*

Пример. Пусть $E = \{(x,y)|\ x^2+y^2 < 1\}$, а $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, если $x^2+y^2 \neq 0$ и $f(x,y) = 1$, если $x = y = 0$. Тогда $E_s(f) = \{(0,0)\} \subset E$. Последовательность множеств $E_k \doteq \{(x,y)|\ 1/(k+1) \leq x^2+y^2 < 1\}$ является допустимым исчерпанием множества $E \setminus E_s(f)$, ибо $f \in R(E_k)$ $\forall k \in \mathbf{N}$ и $\bigcup_k E_k = E \setminus E_s(f)$. Исчерпание $E \setminus E_s(f)$ последовательностью множеств $E'_k = \{(x,y)|\ 0 < x^2+y^2 \leq 1-1/(k+1)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ не является допустимым, ибо функция f не интегрируема на этих множествах в силу своей неограниченности на них.

Замечание. В приложениях функции обычно не определены на множестве своих особых точек. В этом случае будут браться исчерпания множества E (ибо $E \setminus E_s(f) = E$) множествами, на которых интегрируема рассматриваемая функция, т.е. допустимые исчерпания E.

Всякое допустимое исчерпание (E_k) множества $E \setminus E_s(f)$ порождает числовую последовательность $I_k \doteq \int\int_{E_k} f(x,y)\,dxdy$.

Определение 6. *Совокупность всех таких последовательностей называется двойным НИ функции f по множеству E и обозначается символом $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$.*

Определение 7. *НИ $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$ сходится (существует), если все последовательности (I_k) имеют один и тот же предел I, который называется значением НИ и обозначается тем же символом $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$, что и сам НИ. В противном случае НИ $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$ расходится (не существует).*

Теорема 1. *Пусть множество E измеримо по Жордану и функция $f \in R(E)$. Тогда для любого исчерпания (E_k) множества E имеет место равенство*

$$\lim_{k\to+\infty} \int\int_{E_k} f(x,y)\,dxdy = \int\int_E f(x,y)\,dxdy,$$

где справа стоит интеграл Римана функции f по множеству E.

Останавливаться на доказательстве этого утверждения не будем.

Из свойств предела и интеграла Римана сразу следует линейность НИ: если функции f и g имеют одни и те же особые точки и НИ от этих функций по множеству E существуют, то НИ от любой их линейной комбинации сходится и его значение равно линейной комбинации значений НИ от f и g.

Непосредственно проверять определение сходимости НИ не всегда удобно. На практике часто используют следующую теорему, которую приведем без доказательства.

Теорема 2. *Пусть $f(x,y) \geq 0$ на E. Если хотя бы для одного допустимого исчерпания (E_k) множества $E \setminus E_s(f)$ существует $\lim_{k\to+\infty} \int\int_{E_k} f(x,y)\,dxdy = I$, то НИ $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$ сходится и его значение равно I.*

Как и в одномерном случае имеет место признак сравнения.

Теорема 3. *Пусть функции f, g: $D \to \mathbf{R}$ интегрируемы на одних и тех же подмножествах множества D и $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ на D.*

Если

1) НИ $\int\int_D g(x,y)\,dxdy$ сходится, то сходится и НИ $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$;

2) НИ $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ расходится, то НИ $\int\int_D g(x,y)\,dxdy$ также расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Обозначим через D_s множество особых точек функций f и g и возьмем произвольное допустимое исчерпание (D_k) множества $D \setminus D_s$. В силу монотонности интеграла по множествам от неотрицательных функций и теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности (лекция 1.7)

$$\int\int_{D_k} f(x,y)\,dxdy \leq \int\int_{D_{k+1}} f(x,y)\,dxdy \leq \int\int_{D_{k+1}} g(x,y)\,dxdy \leq$$

$$\lim_{m\to+\infty} \int\int_{D_m} g(x,y)\,dxdy = \int\int_D g(x,y)\,dxdy.$$

Значит, возрастающая последовательность $\int\int_{D_k} f(x,y)\,dxdy$ ограничена сверху и, следовательно, согласно теореме Вейерштрасса имеет конечный предел. Тогда по предыдущей теореме НИ $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ сходится.

2) Зафиксируем допустимое исчерпание (D_k) множества $D \setminus D_s$. Из условий теоремы следует, что предел $\lim_{k\to+\infty}\int\int_{D_k} f(x,y)\,dxdy = +\infty$. Но тогда неравенство $\int\int_{D_k} f(x,y)\,dxdy \leq \int\int_{D_k} g(x,y)\,dxdy$ влечет то, что и $\lim_{k\to+\infty}\int\int_{D_k} f(x,y)\,dxdy = +\infty$, что означает расходимость НИ $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$. Теорема доказана.

Принципиальное отличие кратного НИ от одномерного заключается в том, что всякий сходящийся кратный НИ сходится абсолютно, т.е. в многомерном случае нет условно сходящихся интегралов.

Теорема 4. *Пусть функции f и $|f|$ интегрируема на одних и тех же подмножествах множества $E \setminus E_s(f)$.*

Тогда несобственные интегралы $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$ и $\int\int_E |f(x,y)|\,dxdy$ существют или не существуют одновременно. В случае их сходимости имеет место оценка $|\int\int_E f(x,y)\,dxdy| \leq \int\int_E |f(x,y)|\,dxdy$.

Оставим это важное утверждения без доказательства.

Приведем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 5. *Если НИ $\int\int_E f(x,y)\,dxdy$ сходится и существует повторный интеграл от f по множеству E, то двойной НИ равен повторному.*

Если $f(x,y) \geq 0$ на E, то из существования одного из повторных интегралов следует существование как другого повторного интеграла, так и двойного интеграла и равенство всех трех интегралов.

Примеры.

1) Вычислим НИ $\int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.

Так как подынтегральная функция ≥ 0, то достаточно выбрать подходящее исчерпание $\mathbf{R}^2$. Возьмем исчерпание плоскости кругами $K_n \doteq$

$\{(x,y)|\, x^2+y^2 \le n^2\}$. После перехода к ПСК имеем:

$$\int\int_{K_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n re^{-r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{1}{2}2\pi(e^{-n^2}-1) \to \pi\ (n \to +\infty) \quad \Rightarrow$$

НИ сходится и его значение равно π.

Теперь рассмотрим исчерпание $\mathbf{R}^2$ квадратами $P_n \doteq \{(x,y)|\, |x| \le n,\ |y| \le n\}$. Тогда по теореме 2

$$\int\int_{P_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{-n}^{n} dx \int_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dy = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \left(\int_{-n}^{n} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \left(2\int_0^n e^{-t^2}\,dt\right)^2 \to \pi\ (n \to +\infty).$$

Следовательно, НИ $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ сходится (см. рассуждения при доказательстве теоремы 2 лекции 1.45) и имеют место равенства

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(этот интеграл называется *интегралом Эйлера–Пуассона*) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

2) Найдем условия сходимости НИ от $1/r^p(x)$, где $r(x) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $x \in \mathbf{R}^3$, по проколотому шару $\dot{B}(0,R)$.

Так как подынтегральная функция положительна, то выберем наиболее подходящее для вычислений исчерпание. Таковым будет исчерпание этого множества шаровыми слоями $K_{m,R} \doteq \{x \in \mathbf{R}^3|\, 1/m \le r(x) \le R\}$. Переходя к сферической системе координат, получим, что

$$\int\int\int_{K_{m,R}} \frac{1}{r^p(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1dx_2dx_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_{1/m}^{R} \frac{r^2\cos\psi}{r^p}\,dr =$$

$$= 4\pi \int_{1/m}^{R} r^{2-p}\,dr$$

Этот интеграл для $p \ne 3$ имеет конечный предел при $m \to +\infty \Leftrightarrow 2-p > -1$, т.е. при $p < 3$. Очевидно, что для $p = 3$ интеграл расходится.

ЛЕКЦИЯ 15
Кривые в $\mathbf{R}^3$. Касательная к кривой. Поверхности в $\mathbf{R}^3$.

Для определенности речь в основном будет идти о кривых в $\mathbf{R}^3$, хотя все остается справедливым, если кривые брать в $\mathbf{R}^n$ при любом $n \geq 2$. Ограничимся изучением кривых, обычно называемых *простыми.* Такие кривые можно рассматривать как определенные множества в $\mathbf{R}^3$. Далее как в теории кривых, так и в теории поверхностей будем считать, что $\mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^2$) рассматриваются с правой системой координат.

Определение 1. *Множество* $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ *называется кривой, если существуют некоторый отрезок* $[a, b]$ *и непрерывное взаимно–однозначное отображение (вектор–функция)* $\bar{r}(t)$ *отрезка* $[a, b]$ *на* Γ.

Таким образом, любая непрерывная инъекция $\bar{\rho}$: $[\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^3$ задает кривую, являющуюся образом отрезка $[\alpha, \beta]$.

Замечание. В определении кривой вместо отрезков можно брать невырожденные промежутки числовой прямой. Отрезок рассматривается для удобства, т.к. в этом случае кривые будут ограниченными множествами.

Определение 2. *Множество* $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ *называется замкнутой кривой, или контуром, если существуют непрерывное отображение* $\bar{r}$*:* $[a, b] \to \gamma$ *некоторого отрезка* $[a, b]$ *такое, что*

1) $\bar{r}[a, b] = \gamma$,

2) $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$,

3) $\bar{r}$*:* $(a, b) \to \gamma \setminus \{\bar{r}(a)\}$ *— биекция.*

Далее термин "кривая" будет использоваться для обозначения как собственно кривых, так и контуров.

В случае, если задана кривая Γ будем писать $\Gamma = \{\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]\}$, или короче $\Gamma = \{\bar{r}(t),\ t \in [a, b]\}$. Саму вектор–функцию $\bar{r}(t)$, или ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, будем называть *параметризацией* кривой Γ.

Заметим, что одну и ту же кривую можно запараметризовать по–разному.

Пример. Рассмотрим кривую $\Gamma = \{\bar{r}_1(t),\ t \in [0,1]\}$, где $\bar{r}_1(t) = (t,t,t)$. Пусть $\bar{r}_2(s) = (2s,2s,2s)$, $s \in [0,1/2]$ и $\bar{r}_3(\tau) = (1-\tau, 1-\tau, 1-\tau)$, $\tau \in [0,1]$. Очевидно, что $\bar{r}_2[0,1/2] = \Gamma$, $\bar{r}_3[0,1] = \Gamma$ и, что эти эти отображения взаимно–однозначны $\Rightarrow$ они являются параметризациями кривой Γ.

Определение 3. *Две параметризации $\bar{r}_1(t)$, $t \in [a,b]$ и $\bar{r}_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ кривой Γ называются эквивалентными, если существует непрерывная строго монотонная функция $\lambda(\tau)$: $[\alpha,\beta] \to [a,b]$ такая, что 1) $\lambda([\alpha,\beta]) = [a,b]$ и 2) $\bar{r}_1(\lambda(\tau)) = \bar{r}_2(\tau)$ $\forall \tau \in [\alpha,\beta]$. Функция $\lambda(\tau)$ называется допустимой заменой параметра.*

Таким образом, если $\bar{r}_1(t)$, $t \in [a,b]$ это параметризация кривой Γ, а $\mu(\tau)$ — непрерывная строго монотонная на отрезке $[\alpha,\beta]$ функция, т.ч. $\mu([\alpha,\beta]) = [a,b]$, то вектор–функция $\bar{r}_2(\tau) \doteq \bar{r}_1(\lambda(\tau))$ будет эквивалентной параметризацией кривой Γ.

Всякая параметризация $\bar{r}(t)$ кривой Γ порождает направление обхода кривой (или порядок следования точек кривой) в сторону возрастания параметра от ее начальной точки $\bar{r}(a)$ к концевой точке $\bar{r}(b)$, которое называется *ориентацией* кривой. Кривая, на которой выбрана ориентация, называется *ориентированной* кривой. Сформулируем, что означает, что две параметризации данной кривой задают одну и ту же или противоположную ориентацию.

Определение 4. *Две эквивалентные параметризации $\bar{r}_1(t)$, $t \in [a,b]$ и $\bar{r}_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ задают одну и ту же ориентацию кривой Γ, если допустимая замена параметра $\lambda(\tau) \uparrow\uparrow$ на $[\alpha,\beta]$.*

Две эквивалентные параметризации $\bar{r}_1(t)$, $t \in [a,b]$ и $\bar{r}_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ задают противоположные ориентации кривой Γ, если допустимая замена параметра $\lambda(\tau) \downarrow\downarrow$ на $[\alpha,\beta]$.

В рассмотренном примере параметризации $\bar{r}_1(t)$ и $\bar{r}_2(s)$ задают одну и ту же ориентацию кривой, а замена параметра $\lambda(s) = 2s$. Соответственно параметризации $\bar{r}_1(t)$ и $\bar{r}_3(\tau)$ порождают противоположные ориентации, а замена параметра $\mu(\tau) = 1 - \tau$.

Определение 5. *Кривая Γ называется непрерывно дифференцируемой, если существует ее параметризация $\bar{r}(t)$ такая, что вектор–функция $\bar{r}(t) \in C^1[a,b]$ (т.е. $\bar{r}'(t) \in C[a,b]$).*

Короче, кривая Γ — непрерывно дифференцируема, если существует ее непрерывно дифференцируемая параметризация. Можно было дать аналогичное определение для дифференцируемой кривой, но в дальнейшей теории будут рассматриваться непрерывно дифференцируемые кривые.

Пример. Пусть Γ — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 1$. Ее параметризация $x = t$, $y = \sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1, 1]$ не является непрерывно дифференцируемой, а $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$ — непрерывно (и даже бесконечно) дифференцируемая параметризация этой кривой.

Для (непрерывно) дифференцируемых кривых также можно говорить о заменах параметра. При этом, кроме общих требований, замена параметра должна обладать (непрерывной) производной, не обращающейся в нуль (смысл последнего условия будет ясен из следующего пункта).

В дальнейшем под параметризацией дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.д. кривой всегда будет пониматься дифференцируемая, непрерывно дифференцируемая и т.д. параметризация.

Касательная к кривой

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]\}$, причем $\bar{r} \in D(t_0)$ и $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$ (если точка t_0 является концевой точкой отрезка, то под производной понимается односторонняя производная).

Для проводимых ниже рассуждений будем представлять себе вектор $\bar{r}(t)$ как радиус–вектор точки M с координатами $(x(t), y(t), z(t))$, т.е. $\bar{r}(t) = \overline{OM}$. При изменении параметра t на отрезке $[a, b]$ конец радиус–вектора $\bar{r}(t)$ пробегает множество Γ, т.е. кривая Γ является множеством концов радиус–векторов $\bar{r}(t)$.

Поскольку $\overline{OM}_0 = \bar{r}(t_0) \neq \bar{r}(t_0 + \Delta t) = \overline{OM}$ при $\Delta t \neq 0$, то через точки M_0 и M можно провести единственную прямую M_0M, называемую *секущей* кривой Γ. Далее, так как $\Delta\bar{r}(t_0) = \overline{M_0M}$, то вектор $\Delta\bar{r}(t_0)/\Delta t$ параллелен секущей MM_0. Поскольку существует $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\bar{r}(t_0)/\Delta t = \bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$, то прямую, проходящую через точку M_0 и параллельную вектору $\bar{r}'(t_0)$, называют предельным положением секущих при $M \to M_0$, или *касательной* к кривой Γ в точке M_0. Сам вектор $\bar{r}'(t_0)$ называется *касательным вектором* к кривой Γ в точке M_0. Уравнение касательной в векторной форме имеет вид:

$$\bar{\rho} = \bar{r}(t_0) + \bar{r}'(t_0)\tau,\ \tau \in \mathbf{R}$$

($\bar{\rho}$ — радиус–вектор точек касательной прямой). Переписав это уравнение в координатах, получим параметрическое уравнение касательной

$$X = x(t_0) + x'(t_0)\tau$$

$$Y = y(t_0) + y'(t_0)\tau$$

$$Z = z(t_0) + z'(t_0)\tau.$$

((X, Y, Z) — текущие координаты точек касательной прямой).

Отметим, что определение касательной прямой не зависит от параметризации кривой, если замена параметра $\nu(s)$ дифференцируема в точке s_0, т.ч. $t_0 = \nu(s_0)$ при условии, что $\nu'(s_0) \neq 0$ (поэтому дополнительное требование на допустимую замену параметра вполне естественно). Это следует из цепного правила для вектор–функций: $(\bar{r}(\nu(s)))'|_{s=s_0} = \bar{r}'(\nu(s_0))\nu'(s_0) = \bar{r}'(t_0)\nu'(s_0)$.

Замечание. Легко убедиться, что если кривая Γ является графиком функции, дифференцируемой в точке x_0, т.е. $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x \in [a, b],\ y = f(x)\}$, то определение касательной прямой совпадает с определением касательной, введенным при обсуждении геометрического смысла производной (см. лекцию 1.17).

Поверхности в $\mathbf{R}^3$

Ниже под замкнутыми областями $\overline{D}$, $\overline{E}$ и т.д. понимаются замкнутые множества, являющиеся замыканиями областей D, E и т.д. соответственно. Непрерывная дифференцируемость отображения в замкнутой области, как и прежде предполагает, что рассматриваемое отображение непрерывно дифференцируемо на некотором открытом множестве, содержащем данную замкнутую область.

Определение 6. *Множество $S \subset \mathbf{R}^3$ называется поверхностью, если существует такая замкнутая измеримая по Жордану* *область* $\overline{D} \subset \mathbf{R}^2$ *и непрерывное отображение (вектор–функция)* $\bar{r}(u,v)$ *такое, что*

1) $\bar{r}(\overline{D}) = S$ *и*

2) *отображение* $\bar{r}(u,v)\colon \overline{D} \to S$ *является биекцией.*

В случае, если задана поверхность S пишут $S = \{\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ \ (u,v) \in \overline{D}\}$, или короче $S = \{\bar{r}(u,v),\ \ (u,v) \in \overline{D}\}$. Вектор–функцию $\bar{r}(u,v)$ (или ее координатные функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ и $z(u,v)$) называют *параметризацией* поверхности S, а u и v — *параметрами.*

Как и в случае кривых, удобно представлять себе вектор $\bar{r}(u,v)$ как радиус–вектор точки $M = M(u,v)$ с координатами $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, т.е. что $\bar{r}(u,v) = \overline{OM}$.

Пример. Уравнение $z = f(x,y)$, $f \in C(\overline{D})$ задает поверхность $S = \{(u, v, f(u,v)),\ (u,v) \in \overline{D}\}$, которая является графиком функции двух переменных $f(x,y)$.

Как и кривые, одна и та же поверхность может быть запараметризована по–разному. Допустимой замены параметров и независимости приводимых далее определений от параметризации коснемся в лекции 20. Останавливаться на теории поверхностей во всей полноте не будем.

ЛЕКЦИЯ 16

Касательная плоскость и нормаль к гладкой поверхности. Криволинейный интеграл I рода. Длина кривой.

Пусть дана поверхность

$$S = \{\bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in \overline{D}\}.$$

Определение 1. *Кривые $\bar{r}(u, v_0)$ и $\bar{r}(u_0, v)$ (u_0 и v_0 фиксированы) называются координатными линиями на поверхности S.*

Определение 2. *Поверхность S называется непрерывно дифференцируемой, если существует ее параметризация $\bar{r} \in C^1(\overline{D})$.*

Определение 3. *Поверхность S называется гладкой, если существует ее непрерывно дифференцируемая параметризация $\bar{r}(u, v)$ такая, что $\forall (u, v) \in \overline{D}$ векторы $\bar{r}'_u(u, v)$ и $\bar{r}'_v(u, v)$ линейно независимы.*

Отметим, что векторы $\bar{r}'_u(u, v)$ и $\bar{r}'_v(u, v)$ являются касательными векторами к соответствующим координатным линиям поверхности S.

В дальнейшем под параметризацией непрерывно дифференцируемой или гладкой поверхности будет пониматься непрерывно дифференцируемая или гладкая параметризация соответственно.

Определение 4. *Плоскость, проходящая через точку $M_0 = M(u_0, v_0)$ гладкой поверхности S ($\overline{OM}_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$) и параллельная векторам $\bar{r}'_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}'_v(u_0, v_0)$, называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0.*

Вспоминая из курса аналитической геометрии векторную запись уравнения плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум неколлинеарным векторам, получаем, что уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(\bar{\rho} - \bar{r}_0)\bar{r}'_u(u_0, v_0)\bar{r}'_v(u_0, v_0) = 0, \tag{9}$$

где $\bar{r}_0 = \overline{OM}_0$, а $\bar{\rho}$ — радиус–вектор текущей точки касательной плоскости.

Если поверхность S задается уравнением $z = f(x,y)$, где $f \in C^1(\overline{D})$, то $\bar{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ — ее гладкая параметризация, т.к. векторы

$$\bar{r}'_x(x_0,y_0) = (1,0,f'_x(x_0,y_0)),\ \bar{r}'_y(x_0,y_0) = (0,1,f'_y(x_0,y_0)),$$

линейно независимы. Тогда

$$(\bar{\rho}-\bar{r}_0)\bar{r}'_x(x_0,y_0)\bar{r}'_y(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} =$$

$$-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + z - z_0$$

и уравнение (9) касательной плоскости примет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),\ z_0 = f(x_0,y_0).$$

Таким образом, новое определение касательной плоскости к поверхности совпадает с тем, что было дано в лекции 1.38 для поверхностей, задаваемых функциями двух переменных.

Согласно определению (см. лекцию 1.41) в качестве нормали к гладкой поверхности в точке $M(u,v)$ можно взять вектор

$$\bar{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} =$$

$$\bar{i}\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} =$$

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\bar{i} - \frac{D(x,z)}{D(u,v)}\bar{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\bar{k} = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\bar{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\bar{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\bar{k}$$

(в последнем равенстве были переставлены столбцы во втором якобиане).

Вычислим по полученной формуле нормаль для поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$, $f \in C^1(\overline{D})$. Так как $\bar{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ — ее гладкая параметризация, то $\bar{r}'_x = (1,0,f'_x)$, а $\bar{r}'_y = (0,1,f'_y)$. Поэтому

$$\bar{N} = \bar{r}'_x \times \bar{r}'_y = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -\bar{i} f'_x - \bar{j} f'_y + \bar{k},$$

т.е.

$$\bar{N} = (-f'_x, -f'_y, 1).$$

Далее нас будут интересовать единичные нормали. Очевидно, в каждой точке гладкой поверхности $S = \{\bar{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\}$ имеется ровно две единичные нормали

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} \text{ и } \bar{\nu} = -\bar{n} = -\frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}.$$

Подсчитаем $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$: по определению векторного произведения

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = |\bar{r}'_u||\bar{r}'_v| \sin\psi,\ \psi = (\widehat{\bar{r}'_u, \bar{r}'_v}).$$

Так как

$$\bar{r}'_u \bar{r}'_v = |\bar{r}'_u||\bar{r}'_v| \cos\psi,$$

то

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|^2 + (\bar{r}'_u \bar{r}'_v)^2 = |\bar{r}'_u|^2 |\bar{r}'_v|^2.$$

Поэтому

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|^2 = |\bar{r}'_u|^2 |\bar{r}'_v|^2 - (\bar{r}'_u \bar{r}'_v)^2 = EG - F^2,$$

где

$$E = |\bar{r}'_u|^2,\ G = |\bar{r}'_v|^2,\ F = \bar{r}'_u \bar{r}'_v.$$

Полученное тождество называется тождеством Лагранжа, а E, G и F — коэффициентами Гаусса первой квадратичной формы поверхности.

Для поверхности, являющейся графиком функции $f(x,y)$, $f \in C^1(\overline{D})$, единичная нормаль $\bar{n}$ имеет вид

$$\bar{n} = \left(-\frac{f'_x}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}}, -\frac{f'_y}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}} \right).$$

Вычислим еще коэффициенты Гаусса для такой поверхности. В этом случае $\bar{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ — ее гладкая параметризация и $\bar{r}'_u = (1, 0, f'_u)$, а $\bar{r}'_v = (0, 1, f'_v)$. Следовательно,

$$E = 1 + {f'_u}^2,\ G = 1 + {f'_v}^2 \text{ и } F = f'_u f'_v$$

и

$$EG - F^2 = (1 + {f'_u}^2)(1 + {f'_v}^2) - (f'_u f'_v)^2 = 1 + {f'_u}^2 + {f'_v}^2.$$

Замечание. Напомним, что если гладкая поверхность задана неявно уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$, то единичными нормалями к поверхности будут векторы $\pm\dfrac{\mathrm{grad}\Phi}{|\mathrm{grad}\Phi|}$, $\mathrm{grad}\Phi = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z)$.

Криволинейный интеграл I рода

Пусть дана непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)); t \in [a,b]\}$ и на множестве Γ задана непрерывная скалярная функция $F(x,y,z)$ (тогда $F(\bar{r}(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) \in C[a,b]$ как композиция непрерывных функций).

Определение 5. *Криволинейным интегралом I рода функции F по кривой Γ, обозначаемым символом $\int_\Gamma F(x,y,z)\,ds$, называется число, равное*

$$\int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Итак, по определению

$$\int_\Gamma F(x,y,z)\,ds \doteq \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

или, короче,

$$\int_{\Gamma} F(x,y,z)\,ds \doteq \int_a^b F(\bar{r}(t))|\bar{r'}(t)|\,dt.$$

Таким образом, под символом $\int_{\Gamma} F(x,y,z)\,ds$ понимается соответствующий интеграл Римана (в сделанных предположениях этот интеграл существует).

Выражение $ds \doteq \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt = |\bar{r'}(t)|dt$ называется дифференциалом длины кривой Γ.

Через Γ^+ и Γ^- будем обозначать кривую Γ с противоположными ориентациями.

Теорема 1. *Криволинейный интеграл I рода не зависит от параметризации кривой. В частности, интеграл не зависит от ориентации кривой, т.е.*

$$\int_{\Gamma^-} F(x,y,z)\,ds = \int_{\Gamma^+} F(x,y,z)\,ds$$

(Γ — непрерывно дифференцируемая кривая).

Доказательство. Докажем независимость интеграла от ориентации кривой. Пусть $\Gamma^+ = \{\bar{r}(t); t \in [a,b]\}$ кривая Γ с ориентацией, порожденной ее параметризацией, а $\bar{\rho}(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ — непрерывно дифференцируемая эквивалентная параметризация, задающая противоположную ориентацию кривой Γ. Тогда существует замена параметра $\mu(\tau) \in C^1[\alpha,\beta]$, $\mu(\tau) \downarrow\downarrow$, $\mu'(\tau) \neq 0$ и $\mu(\alpha) = b$, $\mu(\beta) = a$, т.ч. $\bar{r}(\mu(\tau)) = \bar{\rho}(\tau)$. Имеем

$$\int_{\Gamma^+} F(x,y,z)\,ds = \int_a^b F(\bar{r}(t))|\bar{r}'(t)|\,dt \underset{t=\mu(\tau)}{=}$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} F(\bar{r}(\mu(\tau))|(\bar{r}'(\mu(\tau))|\mu'(\tau)\,d\tau =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\bar{\rho}(\tau))|\bar{r}'(\mu(\tau))|(-\mu'(\tau))\,d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} F(\bar{\rho}(\tau))|\bar{r}'(\mu(\tau))\mu'(\tau)|\,d\tau =$$

$$\int_\alpha^\beta F(\bar\rho(\tau))|(\bar r(\mu(\tau)))'|\,d\tau = \int_\alpha^\beta F(\bar\rho(\tau))|\bar\rho'(\tau)|\,d\tau = \int_{\Gamma^-} F(x,y,z)\,ds$$

(по ходу вычислений было использовано то, что $|\mu'(\tau)| = -\mu'(\tau)$ и цепное правило для вектор–функций).

Доказательство независимости интеграла от параметризации, не меняющей ориентацию аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема показывает естественность использования введенного обозначения $\int_\Gamma F(x,y,z)\,ds$ криволинейного интеграла I рода, не использующее в явном виде конкретной параметризацию кривой.

Криволинейный интеграл I рода можно ввести, следуя общей схеме построения интеграла по множеству, как предел интегральных сумм. Но прежде необходимо определить, что следует понимать под длиной кривой.

Длина кривой

Из курса школьной математики известно, что длина окружности определяется как предел при $n \to +\infty$ периметров правильных n–угольников, вписанных в окружность, или что то же самое, длин n–звенных замкнутых ломаных с равными звеньями, вписанных в окружность. На этой же идее основывается определение длины кривой в общем случае. Ради упрощения записи ограничимся рассмотрением кривых в $\mathbf{R}^2$.

Пусть дана кривая $\Gamma = \{\bar r(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]\}$. Возьмем произвольное разбиение $T[a,b] = \{t_j\}_{j=0}^m$ и обозначим через M_j точки кривой Γ с координатами $(x(t_j), y(t_j))$. Ломаная Γ_T с вершинами в точках M_j называется вписанной в кривую Γ. Длина $l(\Gamma_T)$ ломаной равна сумме длин ее звеньев

$$l(\Gamma_T) = \sum_{j=1}^m \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2}.$$

Определение 6. *Длиной $l(\Gamma)$ кривой Γ называется предел $\lim_{\lambda(T)\to 0} l(\Gamma_T)$, если он существует.*

Определение 7. *Кривые, для которых существует* $\lim_{\lambda(T)\to 0} l(\Gamma_T)$, *называются спрямляемыми.*

Напомним, что равенство $l(\Gamma) = \lim_{\lambda(T)\to 0} l(\Gamma_T)$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $|l(\Gamma) - l(\Gamma_T)| < \varepsilon$.

Замечание. Можно доказать, что если $\sup_T l(\Gamma_T) < +\infty$, то $\exists \lim_{\lambda(T)\to 0} l(\Gamma_T) = \sup_T l(\Gamma_T)$.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma = \{(x(t), y(t)),\ t \in [a,b]\}$ *непрерывно дифференцируемая кривая. Тогда*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Для доказательства потребуется одно элементарное неравенство.

Лемма 1. *Для любых трех действительных чисел* u, v *и* w *справедливо неравенство*

$$|\sqrt{u^2+v^2} - \sqrt{u^2+w^2}| \le |v - w|.$$

Доказательство. При $u^2 + v^2 \ne 0$ имеем

$$|\sqrt{u^2+v^2} - \sqrt{u^2+w^2}| = \left| \frac{u^2+v^2-u^2-w^2}{\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+w^2}} \right| \le$$

$(\sqrt{u^2+v^2} \ge |v|,\ \sqrt{u^2+w^2} \ge |w|)$

$$\frac{|v-w||v+w|}{|v|+|w|} \le \frac{|v-w|(|v|+|w|)}{|v|+|w|} = |v-w|.$$

При $u = v = 0$ неравенство очевидно.

Замечание. В невырожденном случае неравенство имеет простой геометрический смысл: модуль разности длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны.

Доказательство теоремы. Пусть T — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Преобразуем выражение для $l(\Gamma_T)$ с помощью формулы Лагранжа

$$l(\Gamma_T) = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2} =$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)(\Delta t_j)^2+y'^2(d_j)(\Delta t_j)^2}=\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(d_j)}\Delta t_j$$

$(c_j,\ d_j\in[t_{j-1},t_j])$.

Обозначим через

$$S(\sqrt{x'^2+y'^2},(T,\bar c))=\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(c_j)}\Delta t_j$$

интегральную сумму Римана функции $\sqrt{x'^2+y'^2}$, соответствующую разбиению T и разметке $\bar c=(c_1,\dots,c_m)$. Поскольку $\sqrt{x'^2+y'^2}\in C[a,b]$, то $\sqrt{x'^2+y'^2}\in R[a,b]$ и, следовательно,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}S(\sqrt{x'^2+y'^2},(T,\bar c))=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Поэтому теорема будет доказана, если показать, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(c_j)}\Delta t_j-\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(d_j)}\Delta t_j\right)=0.$$

С использованием леммы 1 имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(c_j)}\Delta t_j-\sum_{j=1}^{m}\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(d_j)}\Delta t_j\right|\le$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(c_j)}-\sqrt{x'^2(c_j)+y'^2(d_j)}\right|\Delta t_j\le$$

$$\sum_{j=1}^{m}|y'(d_j)-y'(c_j)|\Delta t_j\le\sum_{j=1}^{m}\omega(y',\Delta_j)\Delta t_j.$$

Поскольку $y'\in R[a,b]$, то согласно критерию Дарбу интегрируемости (теорема 1 лекции 1.25) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, т.ч. $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T)<\delta$: $\sum_{j=1}^{m}\omega(y',\Delta_j)\Delta t_j<\varepsilon$. Теорема доказана.

Теперь введем криволинейный интеграл I рода функции Φ с помощью интегральных сумм. Пусть $\Gamma = \{\bar{r}(t);\, t \in [a,b]\}$ — непрерывно дифференцируемая кривая. Возьмем произвольное разбиение Γ точками M_j, $j = 0, \ldots, k$, где $\overline{OM}_j = \bar{r}(t_j)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$. Обозначим через Δs_j длину участка кривой Γ, заключенного между точками M_{j-1} и M_j. Выберем произвольно по одной точке P_j на кривой между точками M_{j-1} и M_j (из определения кривой следует, что $\overline{OP}_j = \bar{r}(\tau_j)$, где $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$) и составим интегральную сумму Римана

$$\sigma(\Phi, (T, \bar{P})) \doteq \sum_{j=1}^{k} \Phi(P_j)\Delta s_j,\ \bar{P} = (P_1, \ldots, P_k).$$

Тогда по определению

$$\int_\Gamma \Phi(x,y,z)\, ds \doteq \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(\Phi, (T, \bar{P})),$$

если последний предел существует. Можно показать, что для непрерывной на Γ функции Φ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(\Phi, (T, \bar{P})) = \int_a^b \Phi(\bar{r}(t))|\bar{r}'(t)|\, dt.$$

Физический смысл криволинейного интеграла I рода. Если $\Phi(x,y,z)$ — плотность точек кривой Γ, то масса m_j участка кривой между точками M_{j-1} и M_j при достаточно мелком разбиении кривой Γ с большой степенью точности равна произведению $\Phi(P_j)\Delta s_j$. Тогда масса всей кривой $m \approx \sum_{j=1}^{k} \Phi(P_j)\Delta s_j$. Поэтому предел при $\lambda(T) \to 0$ сумм $\sum_{j=1}^{k} \Phi(P_j)\Delta s_j$, т.е. интеграл $\int_\Gamma \Phi(x,y,z)\, ds$ естественно назвать массой кривой Γ.

Дадим более общее определение кривых, на которое распространим криволинейные интегралы I рода.

Определение 8. *Отображение $\bar{r}(t)\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$ кусочно непрерывно дифференцируемо, если*

1) $\bar{r} \in C[a,b]$*;*

2) существует разбиение $T[a,b] = \{t_j\}_{j=0}^{j=m}$ *такое, что* $\bar{r} \in C^1[t_{j-1}, t_j]$ *(под производными в точках* t_j *понимаются односторонние производные).*

Определение 9. *Множество* γ *называется кусочно непрерывно дифференцируемой кривой в* $\mathbf{R}^3$*, если существуют отрезок* $[a,b]$ *и кусочно непрерывно дифференцируемая на нем вектор–функция* $\bar{r}(t)$ *такие, что*

1) $\bar{r}[a,b] = \gamma$*;*

2) отображение $\bar{r}: [a,b] \to \gamma$ *является биекцией.*

Аналогично определяется кусочно непрерывно дифференцирумый контур.

Определим криволинейный интеграл I рода по кусочно непрерывно дифференцируемой кривой.

Криволинейный интеграл I рода по кусочно непрерывно дифференцируемой кривой γ от непрерывной функции $F(x,y,z)$ определяется как сумма интегралов по непрерывно дифференцируемым кускам $\gamma_j = \{\bar{r}(t),\ t \in [t_{j-1}, t_j]\}$:

$$\int_\gamma F(x,y,z)\,ds = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} F(x,y,z)\,ds.$$

ЛЕКЦИЯ 17
Криволинейный интеграл II рода. Связь криволинейных интегралов I и II рода. Физический смысл криволинейного интеграла II рода. Формула Грина.

Криволинейный интеграл II рода

Пусть дана непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]\}$ и вектор–функциия $\bar{F}(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ($\bar{F} = (P, Q, R)$), непрерывная на множестве Γ (тогда функция $\bar{F}(\bar{r}(t)) \in C[a, b]$ как композиция непрерывных функций).

Определение 1. *Криволинейным интегралом II рода вектор–функции $\bar{F}$ по кривой Γ, обозначаемым символом $\int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r}$, называется число, равное*

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\bar{r}'(t)\,dt$$

(под знаком интеграла стоит скалярное произведение).

Итак, по определению

$$\int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\bar{r}'(t)\,dt,$$

т.е. символ $\int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r}$ используется для обозначения соответствующего интеграла Римана.

Имеем

$$\int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\bar{r}'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b (P(\bar{r}(t))x'(t) + Q(\bar{r}(t))y'(t) + R(\bar{r}(t))z'(t))\,dt =$$

$$\int_a^b P(\bar{r}(t))\,dx(t) + Q(\bar{r}(t))\,dy(t) + R(\bar{r}(t))\,dz(t).$$

Поэтому для криволинейного интеграла II рода также удобно использовать следующее обозначение

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где под этим символом понимается интеграл Римана

$$\int_a^b (P(\bar r(t))x'(t) + Q(\bar r(t))y'(t) + R(\bar r(t))z'(t))\,dt$$

при данной параметризации кривой Г.

Если $\bar F = (P, 0, 0)$, то

$$\int_\Gamma P\,dx = \int_a^b P(\bar r(t))x'(t)\,dt,$$

если $\bar F = (0, Q, 0)$, то

$$\int_\Gamma Q\,dy = \int_a^b Q(\bar r(t))y'(t)\,dt,$$

если $\bar F = (0, 0, R)$, то

$$\int_\Gamma R\,dz = \int_a^b R(\bar r(t))z'(t)\,dt.$$

Теорема 1. *Криволинейный интеграл II рода меняет знак при изменении ориентации кривой, т.е.*

$$\int_{\Gamma^-} \bar F\,d\bar r = -\int_{\Gamma^+} \bar F\,d\bar r$$

и неизменен, если параметризации задают одну и ту же ориентацию кривой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma^+ = \{\bar r_1(t);\ t \in [a, b]\}$ — непрерывно дифференцируемая кривая, ориентация которой порождается параметризацией, а $\bar r_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ — непрерывно дифференцируемая эквивалентная параметризация, задающая противоположную ориентацию кривой Г. Тогда существует замена параметра $\mu(\tau) \in C^1[\alpha, \beta]$, $\mu(\tau) \downarrow\downarrow$, $\mu'(\tau) \neq 0$ и $\mu(\alpha) = b$, $\mu(\beta) = a$, т.ч. $\bar r_1(\mu(\tau)) = \bar r_2(\tau)$. Имеем

$$\int_{\Gamma^+} \bar F\,d\bar r = \int_a^b \bar F(\bar r(t))\bar r_1{}'(t)\,dt =$$

(делаем подстановку $t = \mu(\tau)$)

$$\int_\beta^\alpha \bar{F}(\bar{r_1}(\mu(\tau))\bar{r_1}'(\mu(\tau))\mu'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_\beta^\alpha \bar{F}(\bar{r_2}(\tau))(\bar{r_1}(\mu(\tau)))'\,d\tau = \int_\beta^\alpha \bar{F}(\bar{r_2}(\tau))\bar{r_2}'(\tau)\,d\tau =$$

$$-\int_\alpha^\beta \bar{F}(\bar{r_2}(\tau))\bar{r_2}'(\tau)\,d\tau = -\int_{\Gamma^-} \bar{F}\,d\bar{r}.$$

Случай замены параметра, сохраняющей ориентацию кривой, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Для ориентированных кусочно непрерывно дифференцируемых кривых γ криволинейный интеграл II рода определяется как сумма интегралов по непрерывно дифференцируемым кускам γ_j:

$$\int_\gamma \bar{F}\,d\bar{r} = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \bar{F}\,d\bar{r},$$

причем ориентации γ_j выбираются в соответствии с ориентацией γ.

Получим связь между криволинейными интегралами I и II родов. Пусть $\Gamma = \{\bar{r}(t),\ t \in [a,b]\}$ — непрерывно дифференцируемая кривая, т.ч. $|\bar{r}'(t)| \neq 0\ \forall t \in [a,b]$ (такие кривые называются *гладкими*). Если Γ является контуром, то в определении гладкости надо добавить еще одно условие: $\dfrac{\bar{r}'(a)}{|\bar{r}'(a)|} = \dfrac{\bar{r}'(b)}{|\bar{r}'(b)|}$, чтобы избежать угловых точек. Тогда

$$\int_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\bar{r}'(t)\,dt = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}|\bar{r}'(t)|\,dt =$$

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\bar{\xi}(t)|\bar{r}'(t)|\,dt = \int_\Gamma \bar{F}\bar{\xi}\,ds,$$

$\bar{\xi}$ — единичный касательный вектор к Γ, задающий направление обхода, порожденное параметризацией $\bar{r}(t)$.

В приложениях встречаются интегралы вида $\int_\gamma \bar{E}\bar{n}\,ds$, взятые по ориентированному гладкому контуру γ, где $\bar{n}$ внешняя нормаль к этому контуру. Выразим такой интеграл через криволинейный интеграл II рода. Пусть $\bar{r}(t)$, $t \in [a,b]$ — гладкая параметризация контура γ, задающая обход контура против часовой стрелки. Из полученной выше формулы для $\bar{F} = (P,0)$ и $\bar{F} = (0,Q)$ соответственно имеем

$$\int_\gamma P\,dx = \int_a^b P(\bar{r}(t))\cos\alpha(t)|\bar{r}'(t)|\,dt = \int_\gamma P\cos\alpha\,ds,$$

$$\int_\gamma Q\,dy = \int_a^b Q(\bar{r}(t))\cos\beta(t)|\bar{r}'(t)|\,dt = \int_\gamma Q\cos\beta\,ds,$$

где $\cos\alpha(t)$ и $\cos\beta(t)$ — направляющие косинусы единичного касательного вектора $\bar{\xi}(t)$, т.е. $\bar{\xi}(t) = (\cos\alpha(t), \cos\beta(t))$. Это позволяет формально написать, что $dx = \cos\alpha\,ds$, а $dy = \cos\beta\,ds$. Теперь заметим, что внешним вектором нормали будет вектор $\bar{n} = (\cos\beta, -\cos\alpha)$. Тогда для $\bar{E} = (R,T)$ получим, что

$$\int_\gamma \bar{E}\bar{n}\,ds = \int_\gamma (R\cos\beta - T\cos\alpha)\,ds = \int_\gamma -T\,dx + R\,dy.$$

Замечание. Не всякая непрерывно дифференцируемая кривая является гладкой. Так кривая $\Gamma = \{(t^3, t^2),\ t \in [-1,1]\}$ не является гладкой, хотя она бесконечно дифференцируема. Гладкость нарушается в точке $t = 0$.

Выясним физический смысл криволинейного интеграла II рода.

Пусть каждой точке $M(x,y,z)$ некоторой области $G \subset \mathbf{R}^3$ сопоставлен вектор $\bar{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M)) \in \mathbf{R}^3$. В этом случае говорят, что в области G задано *векторное поле* $\bar{F}(M)$. Короче, векторным полем в G называется произвольная вектор–функция, заданная в области G, со значениями в $\mathbf{R}^3$.

Пусть $\Gamma = \{\bar{r}(t);\ t \in [a,b]\}$ — непрерывно дифференцируемая кривая ($\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$), лежащая в G, и $\bar{F}$ — непрерывное векторное поле в G. Найдем работу векторного поля $\bar{F}$ по перемещению единичной пробной частицы вдоль кривой Γ в направлении возрастания параметра.

Напомним, что если поле $\bar{F}$ постоянно, то при перемещении частицы на вектор $\bar{d}$ совершается работа $A = \bar{F}\bar{d}$.

Возьмем $\forall T[a, b] = \{t_j\}_{j=0}^{m}$. Смещение частицы за время $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ из точки с радиус–вектором $\bar{r}(t_{j-1})$ в точку с радиус–вектором $\bar{r}(t_j)$ вдоль кривой Γ происходит на вектор

$$\Delta\bar{r}(t_{j-1}) \doteq \bar{r}(t_j) - \bar{r}(t_{j-1}) = (\Delta x(t_{j-1}), \Delta y(t_{j-1}), \Delta z(t_{j-1})) =$$

$$(x'(c_1)\Delta t_j, y'(c_2)\Delta t_j, z'(c_3)\Delta t_j) =$$

$$(x'(c_1), y'(c_2), z'(c_3))\Delta t_j \approx \bar{r}'(t_{j-1})\Delta t_j,$$

т.е. смещение происходит на вектор, который можно считать приближенно равным вектору $\bar{d}_j = \bar{r}'(t_{j-1})\Delta t_j$, и который является касательным вектором к кривой Γ в точке с радиус–вектором $\bar{r}(t_{j-1})$. Ввиду непрерывности векторного поля $\bar{F}$ его можно считать локально постоянным на рассматриваемом участке кривой и равным $\bar{F}(\bar{r}(t_{j-1}))$. Следовательно, работу на этом участке кривой можно считать приближенно равной

$$A_j = \bar{F}(\bar{r}(t_{j-1}))\bar{d}_j = \bar{F}(\bar{r}(t_{j-1}))\bar{r}'(t_{j-1})\Delta t_j.$$

Тогда работа вдоль всей кривой

$$A = \sum_{j=1}^{m} A_j = \sum_{j=1}^{m} \bar{F}(\bar{r}(t_{j-1}))\bar{r}'(t_{j-1})\Delta t_j,$$

что является интегральной суммой Римана непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $\bar{F}(\bar{r}(t))\bar{r}'(t)$. Поскольку непрерывная функция интегрируема, то существует предел при $\lambda(T) \to 0$ этой интегральной суммы и он равен $\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\bar{r}'(t)\, dt = \int_\Gamma \bar{F}\, d\bar{r}$. Поэтому естественно определить работу векторного поля $\bar{F}$ вдоль кривой Γ как криволинейный интеграл $\int_\Gamma \bar{F}\, d\bar{r}$.

Формула Грина

Пусть на плоскости $\mathbf{R}^2$ зафиксирована правая система координат и дан контур Γ. Направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным, а по часовой стрелке — отрицательным. Для гладкого контура $\Gamma = \{\bar{r}(t),\ t \in [a, b]\}$ это означает, что параметризация $\bar{r}(t)$ задает положительную ориентацию, если упорядоченная пара векторов $(\bar{n}, \bar{\xi})$, где $\bar{n}$ и $\bar{\xi} = \bar{r}'(t)/|\bar{r}'(t)|$ — соответственно внешняя (по отношению к конечной области, ограниченной контуром Γ) единичная нормаль и единичный касательный вектор к Γ, имеет ту же ориентацию, что и пара единичных ортов $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

Положительно ориентированный контур Γ обозначается Γ^+, а отрицательно ориентированный — через Γ^-.

Через ∂G^+ и ∂G^- обозначается положительная и соответственно отрицательная ориентация границы конечной области G в случае, если ее граница является контуром.

Определение 2. *Ограниченная замкнутая область $\overline{D}$ называется элементарной относительно оси Oy, если*

$$\overline{D} = \{(x, y)|\, x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},\ \varphi, \psi \in C[a, b]\},$$

$\varphi(x) < \psi(x),\ x \in (a, b).$

Определение 3. *Ограниченная замкнутая область $\overline{G}$ называется элементарной относительно оси Ox, если*

$$\overline{G} = \{(x, y)|\, y \in [c, d],\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\},\ \alpha, \beta \in C[c, d]\},$$

$\alpha(y) < \beta(y),\ y \in (c, d).$

Из определений следует, что граница $\partial\bar{E}$ замкнутой области $\bar{E}$, элементарной относительно одной из осей координат, является контуром.

Определение 4. *Область, элементарная относительно обеих осей координат, называется элементарной.*

Элементарными областями являются, например, прямоугольник, треугольник, круг.

Очевидно, что элементарные области измеримы по Жордану.

Теорема 2. *Пусть* $\overline{D}$ *— элементарная область с кусочно непрерывно дифференцируемой границей,* $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y) \in C(\overline{D})$. *Тогда*

$$\int\int_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = \int_{\partial\overline{D}^+} P\,dx + Q\,dy.$$

Доказательство. Введем точки $A(a,\varphi(a))$, $B(b,\varphi(b))$, $A_1(a,\psi(a))$, $B_1(b,\psi(b))$ (точки A и A_1, B и B_1 могут совпадать). Через $\breve{AB}$ и $\breve{A_1B_1}$ обозначим ориентированные кривые $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ (ориентации порождены их параметризацией) соответственно, указав их начальную и конечную точки. Таким образом, $\breve{AB} = \{(x,\varphi(x)),\ x \in [a,b]\}$, $\breve{A_1B_1} = \{(x,\psi(x)),\ x \in [a,b]\}$.

Рассмотрим двойной интеграл $\int\int_{\bar{D}} P'_y\,dxdy$. Поскольку замкнутая область $\overline{D}$ элементарна относительно оси Oy, то (см. лекцию 13)

$$\int\int_{\overline{D}} P'_y\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} P'_y\,dy =$$

(применяем формулу Ньютона–Лейбница)

$$\int_a^b (P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\,dx = \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx =$$

$$\int_{\breve{A_1B_1}} P\,dx - \int_{\breve{AB}} P\,dx = -\int_{\breve{B_1A_1}} P\,dx - \int_{\breve{AB}} P\,dx,$$

(ибо $\breve{AB} = \{(x,\varphi(x)),\ x \in [a,b]\}$, $\breve{A_1B_1} = \{(x,\psi(x)),\ x \in [a,b]\}$).

Интегралы

$$\int_{\breve{BB_1}} P\,dx,\ \int_{\breve{A_1A}} P\,dx$$

по вертикальным отрезкам BB_1 и A_1A равны нулю (это непосредственно следует из определения интеграла, т.к. $\breve{BB_1} = \{(b,t),\ t \in [\varphi(b),\psi(b)]\}$, $\breve{AA_1} = \{(a,t),\ t \in [\varphi(a),\psi(a)]\}$). Поэтому

$$-\int_{\breve{B_1A_1}} P\,dx - \int_{\breve{AB}} P\,dx = -\int_{\partial\overline{D}^+} P\,dx$$

и, следовательно,

$$\int\int_{\overline{D}} P'_y\, dxdy = -\int_{\partial\overline{D}^+} P\, dx.$$

Поскольку $\overline{D}$ элементарна и относительно Ox, то аналогичными рассуждениями получаем, что

$$\int\int_{\bar{D}} Q'_x\, dxdy = \int_{\partial\bar{D}^+} Q\, dy.$$

Теорема доказана.

Распространим эту формлу на несколько более общие области.

Если замкнутая область $\overline{D} \subset \mathbf{R}^2$ такова, что

1) $\overline{D} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{D}_j$, $\overline{D}_j$ — элементарные области,

2) $\overline{D}_j$ могут пересекаться разве что по частям своих границ, причем эти части границ принадлежат не более чем двум областям,

то говорят, что область $\overline{D}$ можно разбить на конечное число элементарных областей.

Граница такой области может быть представлена как объединение кривых, являющихся участками границ замкнутых областей $\overline{D}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, принадлежащих только одной из перечисленных областей.

Как следует из свойств меры Жордана, область $\overline{D}$, которую можно разбить на конечное число элементарных областей, измерима по Жордану.

Пример. Кольцо $\overline{K} = \{(x, y)|\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ можно "разрезать" отрезками прямых $x = 0$ и $y = 0$ на 4 элементарные области. При этом положительная ориентация границ элементарных областей порождает обход границы кольца $\overline{K}$. А именно, обход внешней окружности будет против часовой стрелки, а внутренней окружности — по часовой стрелке. Такую ориентацию границы кольца называют положительной. Другими словами, положительная ориентация границы кольца это совокупность ориентаций окружностей такая, что при их обходе в соответствии с выбранными ориентациями кольцо остается слева.

Теорема 3. *Пусть $\overline{D}$ — замкнутая ограниченная область, которую можно разбить на конечное число элементарных областей с кусочно непрерывно дифференцируемыми границами, P, Q, P'_y, $Q'_x \in C(\overline{D})$. Тогда*

$$\int\int_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\, dxdy = \int_{\partial\overline{D}^+} P\, dx + Q\, dy.$$

Доказательство. В силу аддитивности интеграла Римана и теоремы 2

$$\int\int_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\, dxdy = \sum_{j=1}^{k} \int\int_{\overline{D}_j} (Q'_x - P'_y)\, dxdy =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial\overline{D}_j^+} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial\overline{D}^+} P\, dx + Q\, dy,$$

ибо интегралы по общим участкам границ областей $\overline{D}_j$ встретятся в сумме дважды и с противоположной ориентацией и, следовательно, взаимно уничтожатся (положительная ориентация $\partial\overline{D}$ понимается в смысле рассмотренного выше примера). Теорема доказана.

Пример. Применим формулу Грина для пар функций $P = 0$, $Q = x$ и $P = -y$, $Q = 0$. С учетом того, что в обоих случаях $Q'_x - P'_y = 1$, имеем

$$\mu\overline{D} = \int\int_{\overline{D}} dxdy = \int_{\partial\overline{D}^+} xdy = -\int_{\partial\overline{D}^+} y\, dx.$$

Из полученных выражений получаем еще одну формулу для площади области:

$$\mu\overline{D} = \frac{1}{2}\int_{\partial\overline{D}^+} x\, dy - y\, dx.$$

Формула Грина остается справедливой и для замкнутых областей, границы которых состоят из конечного числа попарно непересекающихся кусочно непрерывно дифференцируемых замкнутых кривых (это утверждение оставим без доказательства). Здесь требуется пояснить, что понимается под положительной (отрицательной) ориентацией границы таких областей. Пусть граница $\partial\overline{D}$ ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ состоит из конечного числа попарно непересекающихся контуров. Положительной ориентацией $\partial\overline{D}$ (в правой системе координат) называется совокупность таких ориентаций этих контуров, что при обходе контуров в соответствии с их ориентацией множество $\overline{D}$ остается слева. Противоположная ориентация называется отрицательной ориентацией $\partial\overline{D}$.

ЛЕКЦИЯ 18
Потенциальные векторные поля. Критерии потенциальности векторного поля.

Пусть в области $E \subset \mathbf{R}^3(\mathbf{R}^2)$ задано векторное поле $\bar{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ($\bar{a}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$).

Определение 1. *Векторное поле $\bar{a}$ называется потенциальным в области E, если существует дифференцируемая функция u: $E \to \mathbf{R}$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} u$, т.е. $\bar{a} = (u'_x, u'_y, u'_z)$ (соответственно $\bar{a} = (u'_x, u'_y)$). Функция u называется потенциалом векторного поля $\bar{a}$.*

Потенциальность векторного поля $\bar{a} = (P, Q, R)$ означает, что выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz = du$ является дифференциалом некоторой дифференцируемой функции u.

Теорема 1. *Пусть непрерывное векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$ потенциально в области E и $u(x, y, z)$ его потенциал, а A и B — произвольные точки E. Тогда для любой кусочно непрерывно дифференцируемой ориентированной кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B, лежащей в области E,*

$$\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(B) - u(A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\breve{AB} = \{\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t));\, t \in [a, b]\}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая с началом в точке A и концом в точке B, содержащаяся в E. Тогда

$$\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$\int_a^b (P(\bar{r}(t))x'(t) + Q(\bar{r}(t))y'(t) + R(\bar{r}(t))z'(t))\,dt =$$

$$\int_a^b (u'_x(\bar{r}(t))x'(t) + u'_y(\bar{r}(t))y'(t) + u'_z(\bar{r}(t))z'(t))\,dt = \int_a^b (u(\bar{r}(t)))'_t\,dt =$$

(применяем формулу Ньютона–Лейбница)

$$u(\bar r(b)) - u(\bar r(a)) = u(B) - u(A).$$

Если $\breve{AB}$ кусочно непрерывно дифференцируемая кривая, то обозначим через $A_{j-1}\breve{}A_j$, $j = 1\ldots,k$, $A_0 = A,\ldots,A_k = B$ ее непрерывно дифференцируемые ориентированные куски. В силу определения криволинейного интеграла по кусочно непрерывно дифференцируемой кривой и полученного выше равенства

$$\int_{\breve{AB}} \bar a\,d\bar r = \sum_{j=1}^{k}\int_{A_{j-1}\breve{}A_j} \bar a\,d\bar r = \sum_{j=1}^{k}(u(\bar r(A_j)) - u(\bar r(A_{j-1}))) =$$

$$u(\bar r(b)) - u(\bar r(a)) = u(B) - u(A).$$

Теорема доказана.

Замечание. Доказанная формула является распространением формулы Ньютона–Лейбница на интегралы по кривым. Действительно, условие потенциальности поля равносильно тому, что выражение $Pdx+Qdy+Rdz = du$. Тогда полученное равенство может быть записано как

$$\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\breve{AB}} du = u(B) - u(A).$$

Физический смысл формулы $\int_{\breve{AB}} \bar a\,d\bar r = u(B) - u(A)$ — работа потенциального векторного поля $\bar a$ вдоль кривой $\breve{AB}$ равна разности потенциалов в конечной и начальной точках кривой.

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывное векторное поле $\bar a = (P,Q,R)$ было потенциальным в области E необходимо и достаточно, чтобы для любых точек $A,B \in E$ интеграл $I = \int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависел от кусочно непрерывно дифференцируемой кривой $\breve{AB} \subset E$ с началом в точке A и концом в точке B, а зависел лишь от начальной и концевой точек этой кривой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость сразу же следует из теоремы 1.

Достаточность. Зафиксируем точку $M_0 \in E$. Из условий теоремы следует, что равенство

$$u(M) \doteq \int_{M_0 \breve{} M} \bar{a}\, d\bar{r},$$

где $M_0 \breve{} M$ — произвольная ориентированная кусочно непрерывно дифференцируемая кривая, лежащая в E и соединяющая точки M_0 и M, однозначно определяет функцию на множестве E. Покажем, что $u(M)$ является потенциалом векторного поля $\bar{a}$. Для этого найдем ее частные производные в произвольной точке M области E.

Поскольку E открыто, то существует окрестность $U(M, \delta) \subset E$. Пусть $M = M(x, y, z)$, $M_h = M_h(x + h, y, z)$, $|h| < \delta$. Через $M_0 \breve{} M_h$ обозначим кривую, составленная из кусочно непрерывно дифференцируемой ориентированной кривой $M_0 \breve{} M$, лежащей в E, и отрезка $M \breve{M}_h$, соединяющего точки M и M_h (что такую кривую всегда можно предъявить оставим без доказательства). Тогда

$$u(M_h) - u(M) = \int_{M_0 \breve{} M_h} \bar{a}\, d\bar{r} - \int_{M_0 \breve{} M} \bar{a}\, d\bar{r} =$$

$$\int_{M_0 \breve{} M \bigcup M \breve{M}_h} \bar{a}\, d\bar{r} - \int_{M_0 \breve{} M} \bar{a}\, d\bar{r} =$$

$$\int_{M_0 \breve{} M} \bar{a}\, d\bar{r} + \int_{M \breve{M}_h} \bar{a}\, d\bar{r} - \int_{M \breve{M}_0} \bar{a}\, d\bar{r} = \int_{M \breve{M}_h} \bar{a}\, d\bar{r}.$$

Параметризация отрезка $M \breve{M}_h$ имеет вид $x = x + t$, $y = y$, $z = z$, $t \in [0, h]$, если $h > 0$ и $t \in [h, 0]$, если $h < 0$. Поэтому (считаем для определенности, что $h > 0$)

$$u(M_h) - u(M) = \int_0^h P(x + t, y, z)\, dt = P(x + \theta h, y, z)h, \ 0 < \theta < 1$$

(применили теорему о среднем для интеграла от непрерывной функции). Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(M_h) - u(M)}{h} = P(x, y, z),$$

т.е. $u'_x = P$. Аналогично проверяется, что $u'_y = Q$, $u'_z = R$. Теорема доказана.

Замечания.

1) Условие независимости интеграла $\int_{\breve{AB}} \bar{a}\,d\bar{r}$ от пути интегрирования равносильно тому, что интеграл по любой замкнутой кусочно непрерывно дифференцируемой кривой равен нулю. Действительно, пусть интеграл по любой замкнутой кривой обращается в нуль. Рассмотрим два интеграла $\int_{A\breve{m}B} \bar{a}\,d\bar{r}$ и $\int_{A\breve{n}B} \bar{a}\,d\bar{r}$ по кривым, соединяющим точки A и B. Покажем, что эти интегралы равны в предположении, что у кривых $A\breve{m}B$ и $A\breve{n}B$ нет общих точек, кроме A и B. В этом случае $\Gamma \doteq A\breve{m}\breve{B}nA$ будет контуром. Тогда с одной стороны $\int_\Gamma \bar{a}\,d\bar{r} = 0$ как интеграл по контуру, а с другой стороны $\int_\Gamma = \int_{A\breve{m}B} + \int_{B\breve{n}A} = \int_{A\breve{m}B} - \int_{A\breve{n}B}$. Следовательно, интегралы по кривым $A\breve{m}B$ и $A\breve{n}B$ совпадают. В общем случае кривые $A\breve{m}B$ и $A\breve{n}B$ могут иметь общие участки (на них интегралы совпадают) и пересекаться, образовывая петли. Так как петли являются контурами, то и по этим участкам кривых интегралы будут равны.

Обратное утверждение следует из теоремы 2 и 1, поскольку в этом случае $\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(B) - u(A) = 0$, т.к. для замкнутой кривой $A = B$.

2) В доказательстве теоремы было использовано то, что любые две точки области можно соединить кусочно непрерывно дифференцируемой кривой. Действительно, во втором семестре отмечалось (см. лекцию 1.36), что две произвольные точки области можно соединить ломаной с конечным числом звеньев. При этом ломаную всегда можно взять без точек самопересечения, а такая ломаная является кусочно непрерывно дифференцируемой кривой.

Условие потенциальности векторного поля, содержащееся в теореме, труднопроверяемо. На практике удобно пользоваться теоремой, приводимой ниже.

Теорема 3. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в шаре B векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$ было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы в шаре B выполнялись равенства:*

$$P'_y = Q'_x,\ Q'_z = R'_y,\ R'_x = P'_z.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть поле $\bar{a}$ потенциально в B, т.е. существует функция $u \in D(B)$, т.ч. $u'_x = P$, $u'_y =$

Q, $u'_z = R$ в B. По условию теоремы $\exists P'_y$, $Q'_x \in C(B)$. Но $P'_y = u''_{xy}$, а $Q'_x = u''_{yx}$. Следовательно, u''_{xy}, $u''_{yx} \in C(B)$. Тогда по теореме о равенстве смешанных производных $u''_{xy} = u''_{yx}$ в B, следовательно, имеет место равенство $P'_y = Q'_x$. Оставшиеся соотношения проверяются аналогично.

Для небольшого сокращения выкладок достаточность докажем для двумерного случая. Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in B$ является центром шара, а точка $M(x, y) \in B$ — произвольна. Обозначим через $M_0\breve{}M$ ломаную из 2-х звеньев $M_0\breve{}M_1$ и $M_1\breve{}M$, где $M_1(x, y_0)$, параллельных осям координат. Покажем, что функция

$$u(x,y) = \int_{M_0\breve{}M} P\,dx + Q\,dy = \int_{M_0\breve{}M_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{M_1\breve{}M} P\,dx + Q\,dy$$

является потенциалом векторного поля $\bar{a} = (P, Q)$.

Поскольку $M_0\breve{}M_1 = \{(t, y_0),\ t$ принадлежит отрезку с концами в точках x_0 и $x\}$, а $M_1\breve{}M = \{(x, s),\ s$ принадлежит отрезку с концами в точках y_0 и $y\}$, то полагая для определенности, что $x > x_0$ и $y > y_0$, имеем:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\,ds$$

Найдем u'_x. Фиксируем y: функция $u(x, y)$ как функция переменной x является суммой интеграла с переменным верхним пределом и интеграла, зависящего от параметра x. На основании правил дифференцирования интегралов такого вида (теорема 2 лекции 1.26 и теорема 1 лекции 7)

$$u'_x(x,y) = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} Q'_x(x, s)\,ds =$$

(по условию $Q'_x = P'_y$)

$$= P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} P'_y(x, s)\,ds = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y)$$

(воспользовались формулой Ньютона–Лейбница).

Теперь найдем u'_y. Для этого фиксируем x. Тогда функция $u(x,y)$ как функция переменной y является суммой постоянной и интеграла с переменным верхним пределом. Поэтому

$$u'_y(x,y) = Q(x,y).$$

Наконец, из доказанных равенств и условий теоремы следует, что частные производные функции u непрерывны и, следовательно, функция $u \in D(B)$. Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве необходимости нигде не использовалось, что векторное поле задано в шаре, т.е. необходимость справедлива для любых областей. Следовательно, равенства

$$P'_y = Q'_x,\ Q'_z = R'_y,\ R'_x = P'_z$$

являются необходимым условием потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля в любой области. В двумерном случае необходимое условие потенциальности векторного поля запишется как $P'_y = Q'_x$.

Приведенные теоремы 2 и 3 дают критерии того, что выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом.

Пример. Пусть $\bar{a}$=grad(arctg(x/y)). Вычислим $\int_{\Gamma_\rho} \bar{a}\,d\bar{r}$ по окружности Γ_ρ радиуса ρ с центром в начале координат, пробегаемой против часовой стрелки. Имеем

$$P = (\operatorname{arctg}(x/y))'_x = \frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{1}{y^2} = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$Q = (\operatorname{arctg}(x/y))'_y = \frac{1}{1+(x/y)^2}(-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Легко убедиться, что $P'_y = Q'_x$ в $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Но интеграл по любой окружности с центром в начале координат отличен от нуля. Действительно, пусть $\Gamma_\rho = \{(\rho\cos t, \rho\sin t),\ t \in [0,2\pi]\}$ положительно ориентированная окружность радиуса ρ. Тогда

$$\int_{\Gamma_\rho} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_\rho} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t)\, dt = -2\pi \neq 0.$$

Стало быть, векторное поле $\bar{a} = (P, Q)$, определенное и бесконечно дифференцируемое в $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, не является потенциальным в любой проколотой окрестности начала координат. Отметим, что функция $u = \operatorname{arctg}(x/y)$ не может быть потенциалом векторного поля $\bar{a}$ в $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ибо функция $\operatorname{arctg}(x/y)$ не определена в точках вида $(x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$.

ЛЕКЦИЯ 19
Площадь поверхности Поверхностный интеграл I рода. Ориентация гладкой поверхности. Поверхностный интеграл II рода

Пусть дана гладкая поверхность $S = \{\bar{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{D}\}$, где $\overline{D} \subset \mathbf{R}^2$ — замкнутая и измеримая по Жордану область. Возьмем разбиение $\overline{D}$, образованное прямыми, параллельными осям Ou и Ov, и рассмотрим брусы разбиения, целиком лежащие в $\overline{D}$ (такие брусы всегда существуют, если диаметр разбиения достаточно мал). Пусть P_{ij} один из таких брусов и длины его сторон равны Δu_i и Δv_j соответственно. При отображении $\bar{r}(u,v)$ этот прямоугольник отобразится в криволинейный "четырехугольник" $\bar{r}(P_{ij})$ на поверхности S, образованный пересечением соответствющих координатных линий. Пусть $M_{ij}(u_i,v_j)$ — левая нижняя вершина P_{ij}. Ввиду дифференцируемости $\bar{r}(u,v)$:

$$\bar{r}(u_i+\Delta u_i, v_j) - \bar{r}(u_i,v_j) = \bar{r}'_u(M_{ij})\Delta u_i + o(\Delta u_i),\ \Delta u_i \to 0,$$

$$\bar{r}(u_i, v_j+\Delta v_j) - \bar{r}(u_i,v_j) = \bar{r}'_v(M_{ij})\Delta v_j + o(\Delta v_j), \Delta v_j \to 0. \quad (10)$$

Из (10) следует что параллелограмм, натянутый на векторы $\bar{r}'_u(M_{ij})\Delta u_i$ и $\bar{r}'_v(M_{ij})\Delta v_j$, мало отличается от криволинейного "четырехугольника" $\bar{r}(P_{ij})$. Обозначим через σ_{ij} площадь этого параллелограмма. Тогда

$$\sigma_{ij} = |\bar{r}'_u(M_{ij})\Delta u_i \times \bar{r}'_v(M_{ij})\Delta v_j| = |\bar{r}'_u(M_{ij}) \times \bar{r}'_v(M_{ij})|\Delta u_i \Delta v_j =$$

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|(M_{ij})\mu P_{ij}.$$

Определим площадь (меру) μS поверхности S как

$$\mu S \doteq \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \sum_j |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|(M_{ij})\mu P_{ij} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}.$$

Стоящая под знаком предела сумма является интегральной суммой для функции $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|_0$ — продолжения функции $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$ нулем с $\overline{D}$.

Поскольку $\overline{D}$ измерима по Жордану, то функция $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| \in R(\overline{D})$ как непрерывная функция. Поэтому написанный предел существует и равен $\int\int_{\bar{D}} |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, dudv$.

Определение 1. *Площадью гладкой поверхности* $S = \{\bar{r}(u,v); (u,v) \in \overline{D}\}$, *где замкнутая область* $\overline{D}$ *измерима по Жордану, называется величина*

$$\mu S = \int\int_{\bar{D}} |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, dudv.$$

Так как $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$, где $E = \bar{r}'_u\bar{r}'_u$, $G = \bar{r}'_v\bar{r}'_v$, $F = \bar{r}'_u\bar{r}'_v$ (см. лекцию 16), то

$$\mu S = \int\int_{\bar{D}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Выражение $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ называется *дифференциалом площади поверхности* S и обозначается dS.

Если поверхность задана в виде $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$ (замкнутая область $\overline{G}$ измерима по Жордану), то (см. лекцию 16)

$$\mu S = \int\int_{\overline{G}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy.$$

Чтобы определение площади поверхности было корректным, надо показать, что площадь не зависит от параметризации поверхности. Пусть $S = \{\bar{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\}$ — непрерывно дифференцируемая поверхность и замкнутая измеримая по Жордану область $\overline{D}$ является образом замкнутой измеримой по Жордану области $\overline{D'}$ ($\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — замыкания областей D и D') при непрерывно дифференцируемом отображении $\bar{\lambda}(s,t) = (\alpha(s,t), \beta(s,t))$. Пусть при этом $\bar{\lambda}$ отображает взаимно однозначно замкнутую область $\overline{D'}$ на замкнутую область $\overline{D}$ с якобианом $\dfrac{D(\alpha,\beta)}{D(s,t)}$, отличным от нуля в $\overline{D'}$. Вектор–функции $\bar{r}(u,v)$ и $\bar{\rho}(s,t) \doteq \bar{r}(\alpha(s,t), \beta(s,t))$ называются эквивалентными параметризациями поверхности S, а $\bar{\lambda}(s,t)$ — гладкой заменой параметра.

Лемма. *Если вектор–функции $\bar{r}(u,v)$ и $\bar{\rho}(s,t)$ являются эквивалентными параметризациями поверхности S, то*

$$\bar{\rho}'_s \times \bar{\rho}'_t = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \frac{D(\alpha,\beta)}{D(s,t)} \tag{11}$$

где частные производные $\bar{\rho}'_s$ и $\bar{\rho}'_t$ взяты в точке (s,t), а $\bar{r}'_u$ и $\bar{r}'_v$ — в точке $(\alpha(s,t),\beta(s,t))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу цепного правила

$$\bar{\rho}'_s(s,t) = (\bar{r}(\alpha(s,t),\beta(s,t))'_s = \bar{r}'_u \cdot \alpha'_s + \bar{r}'_v \cdot \beta'_s,$$

$$\bar{\rho}'_t(s,t) = \bar{r}'_u \cdot \alpha'_t + \bar{r}'_v \cdot \beta'_t.$$

Отсюда

$$\bar{\rho}'_s \times \bar{\rho}'_t = (\bar{r}'_u \cdot \alpha'_s + \bar{r}'_v \cdot \beta'_s) \times (\bar{r}'_u \cdot \alpha'_t + \bar{r}'_v \cdot \beta'_t) =$$

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_u \alpha'_s \alpha'_t + \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \alpha'_s \beta'_t + \bar{r}'_v \times \bar{r}'_u \beta'_s \alpha'_t + \bar{r}'_v \times \bar{r}'_v \beta'_s \beta'_t =$$

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \alpha'_s \beta'_t - \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \beta'_s \alpha'_t =$$

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \begin{vmatrix} \alpha'_s & \alpha'_t \\ \beta'_s & \beta'_t \end{vmatrix} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \frac{D(\alpha,\beta)}{D(s,t)}.$$

Лемма доказана.

Инвариантность площади поверхности относительно гладкой замены параметра сразу следует из доказанной леммы и теоремы о замене переменной в кратном интеграле.

Из формулы (11) также следует независимость от замены параметра определений касательной плоскости и нормали к поверхности.

Поверхностный интеграл I рода

Пусть $S = \{\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v));\ (u,v) \in \overline{D}\}$ — гладкая поверхность, замкнутая область $\overline{D} \subset \mathbf{R}^2$ измерима по Жордану, $F(x,y,z)$ — функция, непрерывная на S (тогда $F(\bar{r}(u,v)) =$

$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in C(\bar{D})$ как композиция непрерывных функций).

Определение 2. *Поверхностным интегралом I рода функции F по поверхности S называется величина*

$$\int\int_S F(x,y,z)\,dS \doteq \int\int_{\overline{D}} F(\bar{r}(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Из леммы следует, что поверхностный интеграл I рода не меняется при гладких заменах параметра.

Если $F = 1$ на S, то $\int\int_S dS = \int\int_{\overline{D}} \sqrt{EG-F^2}\,dudv = \mu S$.

Для поверхности S, заданной уравнением $z = f(x,y)$, $f \in C^1(\overline{D})$

$$\int\int_S F(x,y,z)\,dS = \int\int_{\overline{D}} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy.$$

Следуя общей схеме, поверхностный интеграл I рода можно ввести как интеграл по множеству S с помощью интегральных сумм Римана (для этого требуется определение площади поверхностей, что было сделано). Можно показать, что при сделанных ранее предположениях такое определение совпадает с приведенным выше. К появлению криволинейных интегралов I рода приводит задача вычиления массы поверхности с данной плотностью.

Ориентация гладкой поверхности

Пусть задана гладкая поверхность $S = \{\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v));\ (u,v) \in \overline{D}\}$, $\overline{D}$ — замкнутая область в $\mathbf{R}^2$. Как было показано ранее (см. лекцию 16), в каждой точке поверхности S имеются ровно две единичные нормали $\bar{n} = (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)/|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$ и $\bar{\nu} = -(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)/|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$, которые являются непрерывными функциями параметров u и v. Для удобства будем говорить, что указанные нормали непрерывны на поверхности S.

Определение 3. *Всякая непрерывная нормаль на гладкой поверхности S называется ее ориентацией.*

Таким образом, любая гладкая поверхность имеет две ориентации. Поверхности, обладающие этим свойством, называются *двусторонними.*

Определение 4. *Поверхность, на которой выбрана ориентация, называется ориентированной поверхностью. Поверхность, на которой можно выбрать ориентацию, называется ориентируемой.*

Как и в случае кривых, будем полагать, что данная параметризация $\bar{r}(u,v)$ поверхности S определяет ее ориентацию, а именно, что ориентация задается единичной нормалью $\bar{n}$. Так ориентированную гладкую поверхность $S = \{\bar{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{D}\}$ будем обозначать S^+. Поверхность, на которой выбрана единичная нормаль $\bar{\nu}$, обозначается S^-.

Пусть гладкая поверхность S задается уравнением $z = f(x,y)$, $f \in C^1(\overline{G})$. Тогда единичной нормалью $\bar{n}$ к S для параметризации $\bar{r}(u,v) = (x, y, f(x,y))$ будет вектор (см. лекцию 16)

$$\bar{n} = \left(-\frac{f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, -\frac{f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \right).$$

Следовательно, $\cos\widehat{(\bar{n},\bar{k})} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} > 0$, т.е. единичная нормаль $\bar{n}$ образует острый угол с осью Oz. Поэтому говорят, что для поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$, нормаль $\bar{n}$ определяет верхнюю сторону поверхности. Соответственно нормаль $\bar{\nu}$ задает нижнюю сторону данной поверхности.

Замечание. Пусть поверхности S_1 и S_2 заданы соответственно уравнениями $x = g(y,z)$ и $y = h(x,z)$ (функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторых замкнутых областях). Посмотрим, какие ориентации этих поверхностей задают параметризации $\bar{r}_1(x,y) = (g(y,z), y, z)$ и $\bar{r}_2(x,z) = (x, h(x,z), z)$. Имеем

$$(\bar{r}_1)'_y = (g'_y, 1, 0),\ (\bar{r}_1)'_z = (g'_z, 0, 1) \Rightarrow \bar{N}_1 = (\bar{r}_1)'_y \times (\bar{r}_1)'_z = (1, -g'_y, -g'_z)$$

$$(\bar{r}_2)'_x = (1, h'_x, 0),\ (\bar{r}_2)'_z = (0, h'_z, 1) \Rightarrow \bar{N}_2 = (\bar{r}_2)'_x \times (\bar{r}_2)'_z = (h'_x, -1, h'_z).$$

Поскольку у вектора $\bar{N}_1$ положительна первая координата, а у вектора $\bar{N}_2$ отрицательна вторая координата, то единичная нормаль $\bar{n}_1 = \bar{N}_1/|\bar{N}_1|$ образует острый угол с осью Ox, а единичная нормаль $\bar{n}_2 = \bar{N}_2/|\bar{N}_2|$, образует тупой угол с осью Oy.

Чтобы и уравнение $y = h(x, z)$ также определяло параметризацию, для которой единичная нормаль $\bar{n}_2$ образует острый угол с осью Oy, надо в качестве параметров взять упорядоченную пару (z, x), а не (x, z): $\bar{\rho}_2(z, x) = (x, h(x, z), z)$. В этом случае $(\bar{\rho})'_z \times (\bar{\rho})'_x = (-h'_x, 1, -h'_z)$ и, следовательно, для такой параметризации единичная нормаль образует острый угол с осью Oy.

Пример. Пусть поверхность S является частью плоскости $-x + y + z - 1 = 0$, удовлетворяющей неравенствам $x \leq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Эту поверхность можно задать уравнениями $z = x-y+1$ и $x = y+z-1$. Тогда параметризации $\bar{r}(x, y) = (x, y, x-y+1)$ и $\bar{r}_1(y, z) = (y+z-1, y, z)$ задают разные стороны поверхности S, ибо $\bar{N} = (-1, 1, 1)$, а $\bar{N}_1 = (1, -1, -1)$.

Поверхностный интеграл II рода

Пусть гладкая поверхность $S^+ = \{\bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v));\ (u, v) \in \overline{D}\}$, где $\overline{D}$ замкнутая измеримая по Жордану область, ориентирована с помощью нормали $\bar{n} = (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)/|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$. Пусть еще даны функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z) \in C(S)$ (тогда функции $P(\bar{r}(u, v)),\ Q(\bar{r}(u, v)),\ R(\bar{r}(u, v)) \in C(\overline{D})$ как композиции непрерывных функций).

Определение 5. *Поверхностными интегралами II рода по ориентированной поверхности S^+ называются величины*

$$\int\int_{S^+} P(x, y, z)\, dydz \doteq \int\int_S P(x, y, z) \cos\widehat{(\bar{n}, \bar{i})}\, dS,$$

$$\int\int_{S^+} Q(x, y, z)\, dzdx \doteq \int\int_S Q(x, y, z) \cos\widehat{(\bar{n}, \bar{j})}\, dS,$$

$$\int\int_{S^+} R(x, y, z)\, dxdy \doteq \int\int_S R(x, y, z) \cos\widehat{(\bar{n}, \bar{k})}\, dS.$$

Если поверхность S отрицательно ориентирована, то в определении интегралов вместо нормали $\bar{n}$ надо взять нормаль $\bar{\nu} = -\bar{n}$. Поскольку $\cos\widehat{(-\bar{n},\bar{i})} = -\cos\widehat{(\bar{n},\bar{i})}$, $\cos\widehat{(-\bar{n},\bar{j})} = -\cos\widehat{(\bar{n},\bar{j})}$, $\cos\widehat{(-\bar{n},\bar{k})} = -\cos\widehat{(\bar{n},\bar{k})}$, то $\int\int_{S^-} = -\int\int_{S^+}$, т.е при изменении ориентации поверхности интеграл II рода меняет знак на противоположный.

Теперь выясним, как влияет на поверхностный интеграл II рода замена параметра. Лемма из начала лекции приводит к следующему определению.

Определение 6. *Замена параметра сохраняет ориентацию гладкой поверхности, если якобиан замены положителен; замена параметра меняет ориентацию гладкой поверхности, если якобиан замены отрицателен.*

Можно показать (не будем на этом останавливаться), что при замене параметра, сохраняющей ориентацию поверхности, поверхностный интеграл II рода не меняется; при замене параметра, меняющей ориентацию, поверхностный интеграл II рода меняет знак на противоположный.

ЛЕКЦИЯ 20

Формулы для вычислений поверхностных интегралов II рода. Физический смысл поверхностного интеграла II рода. Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция и ее физический смысл.

Вспомним, что

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} = \frac{1}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right).$$

Поэтому

$$\int\int_{S^+} P(x,y,z)\,dydz = \int\int_S P(x,y,z)\cos\widehat{(\bar{n},\bar{i})}\,dS =$$

$$\int\int_{\overline{D}} P(\bar{r}(u,v))\frac{1}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,dudv =$$

$$\int\int_{\overline{D}} P(\bar{r}(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv.$$

Аналогично

$$\int\int_{S^+} Q(x,y,z)\,dzdx = \int\int_{\overline{D}} Q(\bar{r}(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv,$$

$$\int\int_{S^+} R(x,y,z)\,dxdy = \int\int_{\overline{D}} R(\bar{r}(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv.$$

Например, если поверхность S задана уравнением $z = f(x,y)$, т.е. $\bar{r}(u,v) = (u,v,f(u,v))$ (положили $x = u$ и $y = v$), то

$$\bar{n} = \frac{1}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}(-f'_u, -f'_v, 1).$$

Следовательно,

$$\int\int_{S^+} P(x,y,z)\,dydz = -\int\int_{\overline{D}} P(u,v,f(u,v))f'_u(u,v)\,dudv,$$

$$\int\int_{S^+} Q(x,y,z)\,dzdx = -\int\int_{\overline{D}} Q(u,v,f(u,v))f'_v(u,v)\,dudv,$$

$$\int\int_{S^+} R(x,y,z)\,dxdy = \int\int_{\overline{D}} R(u,v,f(u,v))\,dudv.$$

Физический смысл поверхностного интеграла II рода

Пусть задано постоянное векторное поле $\bar{v}$. Можно считать, что $\bar{v}$ — это поле скоростей установившегося течения жидкости (или газа). Вычислим объем жидкости, протекающий через данную сторону площадки S в единицу времени. Эта величина называется *потоком* векторного поля через S.

Пусть площадка S является параллелограммом, натянутым на векторы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, а сторона площадки определяется единичной нормалью $\bar{n}$. Объем жидкости, протекающий через S за единицу времени, равен объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и $\bar{v}$, а поток Π жидкости в сторону нормали $\bar{n}$ равен ориентированному объему параллелепипеда, натянутого на эти векторы, т.е. поток

$$\Pi = |\bar{r}_1 \times \bar{r}_2|h = |\bar{r}_1 \times \bar{r}_2||\bar{v}|\cos\widehat{(\bar{v},\bar{n})} =$$

$$|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2||\bar{v}|\frac{\bar{v}\bar{n}}{|\bar{v}||\bar{n}|} = |\bar{r}_1 \times \bar{r}_2|\bar{v}\bar{n}.$$

Пусть теперь в области $V \subset \mathbf{R}^3$ заданы непрерывное векторное поле $\bar{a} = (P,Q,R)$ и гладкая ориентированная поверхность $S^+ = \{\bar{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{D}\}$, $\overline{D}$ — замкнутая измеримая по Жордану область в $\mathbf{R}^2$. Возьмем разбиение $\overline{D}$, образованное прямыми, параллельными осям Ou и Ov, и рассмотрим брусы разбиения целиком лежащие в $\overline{D}$ (такие брусы всегда существуют, если диаметр разбиения достаточно мал). Пусть P_{ij} один из таких брусов и длины его сторон равны Δu_i и Δv_j соответственно. При отображении $\bar{r}(u,v)$ этот прямоугольник отобразится в криволинейный "четырехугольник" $S_{ij} = \bar{r}(P_{ij})$ на поверхности S, образованный пересечением соответствующих координатных линий. Пусть $M_{ij}(u_i,v_j)$ — левая нижняя вершина P_{ij}.

Так как векторное поле $\bar{a}$ и единичная нормаль $\bar{n}$ непрерывны на S, то их можно считать локально постоянными на $\bar{r}(P_{ij})$ и равными $\bar{a}(\bar{r}(M_{ij}))$ и $\bar{n}(\bar{r}(M_{ij}))$ соответственно. Поток Π_{ij} через S_{ij} можно считать равным потоку через параллелограмм, натянутый на векторы $\bar{r}'_u(M_{ij})\Delta u_i$ и $\bar{r}'_v(M_{ij})\Delta v_j$:

$$\Pi_{ij} = |\bar{r}'_u(M_{ij}) \times \bar{r}'_v(M_{ij})|\bar{a}(\bar{r}(M_{ij}))\bar{n}(\bar{r}(M_{ij}))\Delta u_i \Delta v_j$$

Поэтому весь поток

$$\Pi = \sum_i \sum_j \bar{a}(\bar{r}(M_{ij}))\bar{n}(\bar{r}(M_{ij}))|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|(M_{ij})\Delta u_i \Delta v_j.$$

Эта сумма является интегральной суммой Римана для продолжения функции $\bar{a}\bar{n}|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$ нулем с $\overline{D}$. Поскольку $\bar{a}\bar{n}|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|$ интегрируема на $\overline{D}$ как непрерывная функция, то существует

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i \sum_j \bar{a}(\bar{r}(M_{ij}))\bar{n}(\bar{r}(M_{ij}))|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|(M_{ij})\Delta u_i \Delta v_j =$$

$$\int\int_{\overline{D}} \bar{a}(\bar{r}(u,v))\bar{n}(\bar{r}(u,v))|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, dudv = \int\int_S \bar{a}\bar{n}\, dS.$$

Определение 1. *Потоком непрерывного векторного поля $\bar{a} = (P, Q, R)$ через сторону гладкой поверхности S, определяемую единичной нормалью $\bar{n}$, называется число*

$$\Pi = \int\int_S \bar{a}\bar{n}\, dS = \int\int_S (P\cos\widehat{(\bar{n},\bar{i})} + Q\cos\widehat{(\bar{n},\bar{j})} + R\cos\widehat{(\bar{n},\bar{k})})\, dS,$$

где $\bar{n} = (\cos\widehat{(\bar{n},\bar{i})}, \cos\widehat{(\bar{n},\bar{j})}, \cos\widehat{(\bar{n},\bar{k})})$.

Формула Гаусса–Остроградского

Пусть $\overline{V}$ — замкнутая область в $\mathbf{R}^3$, $\overline{D} \subset \mathbf{R}^2$ — замкнутая измеримая по Жордану область с границей $\partial\overline{D}$, являющейся гладкой кривой. Предположим, что граница $\partial\overline{V}$ области $\overline{V}$ состоит из 2-х гладких поверхностей S_1 и S_2, задаваемых уравнениями

$$z = \varphi(x, y),\ z = \psi(x, y),\ \varphi, \psi \in C^1(\overline{D})$$

и, быть может, поверхности

$$S_0 = \{(x, y, z) |\ (x, y) \in \partial\overline{D},\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$$

(S_0 является цилиндрической поверхностью с направляющей $\partial\overline{D}$ и образующими, параллельными оси Oz). Такие области $\overline{V}$ называются элементарными относительно оси Oz.

Таким образом, граница $\partial\overline{V}$ элементарной относительно оси Oz области $\overline{V}$ представима в виде объединения $S_0 \bigcup S_1 \bigcup S_2$ трех гладких поверхностей. Поверхностным интегралом по $\partial\overline{V}$ назовем сумму поверхностных интегралов по S_0, S_1 и S_2 (с соответствующими ориентациями см. теорему ниже).

Определение 2. *Область, элементарная относительно всех осей, называется элементарной.*

Теорема 1(формула Гаусса–Остроградского). *Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, P'_x, Q'_y, $R'_z \in C(\overline{V})$, где $\overline{V} \subset \mathbf{R}^3$ — замкнутая элементарная область. Тогда*

$$\int\int_{\partial\overline{V}} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \int\int\int_{\overline{V}} (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dxdydz,$$

где на поверхности $\partial\overline{V}$ выбрана внешняя единичная нормаль (точнее, на поверхностях S_0, S_1 и S_2 выбраны внешние по отношению к области $\overline{V}$ единичные нормали).

Доказательство. Рассмотрим $\int\int_{\partial\overline{V}} R(x, y, z)\, dxdy$. В силу элементарности области $\overline{V}$ относительно оси Oz имеем

$$\int\int_{\partial\overline{V}} R(x, y, z)\, dxdy = \int\int_{S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_0} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$\int\int_{S_0} + \int\int_{S_1} + \int\int_{S_2}.$$

По определению поверхностного интеграла II рода

$$\int\int_{S_0} R(x,y,z)\,dxdy = \int\int_{S_0} R(x,y,z)\cos\widehat{(\bar{n},\bar{k})}\,dS = 0,$$

ибо $\bar{n}\perp\bar{k}$. Далее используя формулы, выражающие поверхностные интегралы через интегралы Римана, имеем

$$\int\int_{S_1} R(x,y,z)\,dxdy = -\int\int_{\overline{D}} R(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy,$$

т.к. интеграл берется по нижней стороне S_1,

$$\int\int_{S_2} R(x,y,z)\,dxdy = \int\int_{\overline{D}} R(x,y,\psi(x,y))\,dxdy.$$

Следовательно,

$$\int\int_{\partial\overline{V}} R(x,y,z)\,dxdy = \int\int_{\overline{D}} \left(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\right)\,dxdy =$$

$$\int\int_{\overline{D}} dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R'_z(x,y,z)\,dz = \int\int\int_{\bar{V}} R'_z(x,y,z)\,dxdydz$$

(сначала применили формулу Ньютона–Лейбница, а затем свели повторный интеграл к кратному).

С остальными членами, стоящими в формуле слева, поступаем аналогично. Теорема доказана.

Определение 3. *Пусть в области G задано непрерывное векторное поле $\bar{a} = (P,Q,R)$ причем $P'_x,\ Q'_y,\ R'_z \in C(G)$. Тогда функция*

$$P'_x + Q'_y + R'_z$$

называется дивергенцией векторного поля $\bar{a}$ и обозначается символом $\mathrm{div}\bar{a}$.

Итак, $\mathrm{div}\bar{a} = (P'_x, Q'_y, R'_z)$. Если ввести символический вектор $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ (∇ читается "набла"), то $\mathrm{div}\bar{a} = \nabla\bar{a}$, т.е. дивергенция будет равна формальному скалярному произведению вектора набла и векторного поля $\bar{a}$.

Векторный вариант записи формулы Гаусса–Остроградского имеет вид

$$\int\int_{S=\partial\overline{V}} \bar{a}\bar{n}\, dS = \int\int\int_{\overline{V}} \mathrm{div}\bar{a}\, dxdydz,$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S. Таким образом поток векторного поля через замкнутую поверхность S в сторону внешней нормали к ней равен интегралу от дивергенции векторного поля по объему, ограниченному поверхностью S.

Физический смысл дивергенции

Пусть в открытом множестве $G \subset \mathbf{R}^3$ задано векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$, P, Q, R, P'_x, Q'_y, $R'_z \in C(G)$ и точка $M_0 \in G$. Тогда

$$\mathrm{div}\bar{a}(M_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu\overline{B}(M_0, r)} \int\int_{\partial\overline{B}(M_0,r)} \bar{a}\bar{n}\, dS,$$

где замкнутый шар $\overline{B}(M_0, r) \subset G$, $\bar{n}$ — внешняя нормаль к сфере.

Действительно, применим формулу Гаусса–Остроградского к интегралу по сфере, а затем теорему о среднем к интегралу от дивергенции:

$$\int\int_{\partial\overline{B}(M_0,r)} \bar{a}\bar{n}\, dS = \int\int\int_{\overline{B}(M_0,r)} \mathrm{div}\bar{a}\, dxdydz =$$

$$\mathrm{div}\bar{a}(M(r))\mu\overline{B}(M_0, r),$$

где $M(r) \in \overline{B}(M_0, r)$ — некоторая точка. Так как $\mathrm{div}\bar{a} \in C(G)$ и $\lim_{r\to 0} M(r) = M_0$, то $\mathrm{div}\bar{a}(M_0) = \lim_{r\to 0} \mathrm{div}\bar{a}(M(r))$. Поэтому

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu\overline{B}(M_0, r)} \int\int_{\partial\overline{B}(M_0,r)} \bar{a}\bar{n}\, dS = \lim_{r\to 0} \mathrm{div}\bar{a}(M(r)) = \mathrm{div}\bar{a}(M_0).$$

Из полученной для дивергенции формулы следует, что значение дивергенции в точке есть предел отношения объема жидкости, протекающей за единицу времени через сферу с центром в этой точке, к объему шара, ограниченного сферой, при стремлении к нулю их радиусов.

Если же $\mathrm{div}\bar{a}(M_0) \neq 0$, то согласно полученной формуле поток векторного поля $\bar{a}$ через произвольную сферу с центром в точке M_0 и достаточно малого радиуса также отличен от нуля, т.е. объем жидкости, втекающий в шар, отличается от объема вытекающей жидкости.

Определение 4. *Точки открытого множества G, в которых $\mathrm{div}\bar{a} \neq 0$, называются источниками векторного поля $\bar{a}$.*

Таким образом, если $\mathrm{div}\bar{a}(M_0) \neq 0$, то приведенная выше формула для дивергенции показывает, что $\mathrm{div}\bar{a}(M_0)$ характеризует производительность источника в точке M_0 и называется *плотностью* источника.

Из этой же формулы следует инвариантность дивергенции относительно выбора системы координат, т.к. правая часть формулы выражена через скалярное произведение, объем множества и площадь поверхности, которые не зависят от выбора системы координат.

ЛЕКЦИЯ 21
Формула Стокса. Ротор векторного поля.

Формула Стокса будет доказана для гладкой поверхности, заданной уравнением, которое можно разрешить относительно одной из переменных. Для определенности считаем, что поверхность можно задать уравнением $z = f(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}$. После чего будет показано, как формулу можно распространить на более широкий класс поверхностей.

Итак, пусть S — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}$, где

1) $f \in C^2(\overline{D})$,

2) $\overline{D}$ – замкнутая измеримая по жордану область в $\mathbf{R}^2$, границей $\partial\overline{D}$ которой является кусочно непрерывно дифференцируемый контур Γ_0.

Далее поверхность S будет рассматриваться с гладкой параметризацией $\bar{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)),\ (u = x,\ \ v = y)$. Обозначим образ множества Γ_0 при отображении $\bar{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ — через Γ. Очевидно, что Γ является контуром (подробности ниже). Этот контур называется *краем поверхности* S и обозначается ∂S. Геометрически Γ_0 является ортогональной проекцией ∂S на плоскость xOy.

Пусть

$$\Gamma_0^+ = \{(x(t), y(t)),\ t \in [a, b]\}$$

положительно ориентированный на плоскости xOy контур Γ_0. Тогда вектор–функция

$$\bar{\rho}(t) = \{(u(t), v(t), f(u(t), v(t))),\ t \in [a, b]\}$$

является параметризацией ∂S и, следовательно, ∂S является замкнутой кусочно непрерывно дифференцируемой кривой. Положительной ориентацией края поверхности S назовем обход ∂S, порожденной параметризацией $\bar{\rho}(t) = (u(t), v(t), f(u(t), v(t))),\ t \in [a, b]$, т.е. $\partial S^+ \doteq \{(x(t), y(t), f(x(t), y(t)),\ t \in [a, b]\}$.

По определению считают, что указанная ориентация края задает ориентацию поверхности S с помощью нормали $\bar{n}$, т.е. определяет S^+, а противоположная ориентация края задает S^-. И обратно, положительная (отрицательная) ориентация поверхности S задает по определению положительную (отрицательную) ориентацию ∂S. Другими словами, направление единичной нормали к S и направление обхода ∂S согласованы по "правилу буравчика".

Теорема 1(формула Стокса). *Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^3$ заданы функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C^1(G)$ и поверхность S, удовлетворяющая приведенным выше условиям. Если поверхность S ориентирована с помощью единичной нормали $\bar{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то*

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\int_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$\int\int_S (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_x - P'_y)\,dxdy,$$

где ориентация ∂S согласована с выбором нормали $\bar{m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности считаем, что край ∂S поверхности положительно ориентирован. Это значит, что в качестве единичной нормали $\bar{m}$ к поверхности S взят вектор $\bar{n}$ (см. лекцию 19). Схема доказательства может быть представлена в виде следующих переходов $\int_{\partial S^+} \to \int_a^b \to \int_{\Gamma_0} \to \int\int_{\overline{D}} \to \int\int_{S^+}$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\partial S^+} P(x,y,z)\,dx = \int_a^b P(u(t), v(t), f(u(t), v(t))u'(t)\,dt =$$

$$\int_{\partial\overline{D}^+} P(x,y,f(x,y))\,dx,$$

т.к. $\partial\overline{D}^+ = \Gamma_0^+ = \{(u(t), v(t)),\ t \in [a,b]\}$. Таким образом, криволинейный интеграл по ∂S^+ от $P(x,y,z)$ равен криволинейному интегралу по $\partial\overline{D}^+$, но от функции $P(x, y, f(x, y))$. К полученному интегралу применим формулу Грина

$$\int_{\partial\overline{D}^+} P(x, y, f(x, y))\, dx = -\int\int_{\overline{D}} (P(x, y, f(x, y)))'_y\, dxdy =$$

$$-\int\int_{\overline{D}} (P'_y(x, y, f(x, y)) + P'_z(x, y, f(x, y)) f'_y(x, y))\, dxdy =$$

$$-\int\int_{\overline{D}} P'_y\, dxdy - \int\int_{\overline{D}} P'_z f'_y\, dxdy.$$

Проинтерпретируем написанные двойные интегралы как поверхностные интегралы. Для этого обратимся к формулам для вычисления поверхностных интегралов II рода. Из них следует, что

$$-\int\int_{\overline{D}} P'_y(x, y, f(x, y))\, dxdy = -\int\int_{S^+} P'_y\, dxdy,$$

а

$$-\int\int_{\overline{D}} P'_z(x, y, f(x, y)) f'_y(x, y)\, dxdy = \int\int_{S^+} P'_z\, dzdx.$$

Таким образом,

$$\int_{\partial S^+} P\, dx = -\int\int_{S^+} P'_y\, dxdy + \int\int_{S^+} P'_z\, dzdx.$$

Аналогично

$$\int_{\partial S^+} Q\, dy = \int\int_{S^+} Q'_x\, dxdy - \int\int_{S^+} Q'_z\, dydz.$$

Перейдем к рассмотрению третьего криволинейного интеграла $\int_{\partial S^+} R\, dz$. Для него выкладки будут выглядеть следующим образом.

$$\int_{\partial S^+} R(x, y, z)\, dz = \int_a^b R(u(t), v(t), f(u(t), v(t))(f'_x u'(t) + f'_y v'(t))\, dt =$$

$$\int_a^b (R(u(t),v(t),f(u(t),v(t))f'_x u'(t)+R(u(t),v(t),f(u(t),v(t))f'_y v'(t))\,dt =$$

$$\int_{\partial\overline{D}^+} R(x,y,f(x,y))f'_x\,dx + R(x,y,f(x,y))f'_y\,dy.$$

К полученному интегралу применим формулу Грина

$$\int_{\partial\overline{D}^+} R(x,y,f(x,y))f'_x\,dx + R(x,y,f(x,y))f'_y\,dy =$$

$$\int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(R(x,y,f(x,y))f'_y) - \frac{\partial}{\partial y}(R(x,y,f(x,y))f'_x)\right)\,dxdy =$$

(учитываем, что $f''_{xy} = f''_{yx}$)

$$\int\int_{\overline{D}} (f'_y \frac{\partial}{\partial x}(R(x,y,f(x,y))) - f'_x \frac{\partial}{\partial y}(R(x,y,f(x,y))))\,dxdy =$$

$$\int\int_{\overline{D}} (f'_y R'_x(x,y,f(x,y)) - f'_x R'_y(x,y,f(x,y)))\,dxdy$$

(последнее равенство было получено после дифференцирования сложных функций и приведения подобных).

Теперь проинтерпретируем двойные интегралы $\int\int_{\overline{D}} f'_y R'_x(x,y,f(x,y))\,dxdy$ и $\int\int_{\overline{D}} f'_x R'_y(x,y,f(x,y))\,dxdy$ как поверхностные интегралы II рода. Из формул для вычисления поверхностных интегралов II рода имеем

$$\int\int_{\overline{D}} R'_x(x,y,f(x,y))f'_y\,dxdy = -\int\int_{S^+} R'_x\,dzdx,$$

$$\int\int_{\overline{D}} R'_y(x,y,f(x,y))f'_x\,dxdy = -\int\int_{S^+} R'_y\,dydz.$$

Складывая полученные для криволинейных интегралов равенства, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Можно показать, что формула Стокса верна в случае, если функция $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема.

Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^3$ задано дифференцируемое векторное поле $\bar{a} = (P, Q, R)$.

Определение 3. *Ротором, или вихрем, векторного поля $\bar{a}$ называется векторное поле*

$$\mathrm{rot}\bar{a} \doteq \nabla \times \bar{a} \equiv \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \equiv (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

Используя ротор, формулу Стокса можно переписать в векторном виде

$$\int_{\partial S} \bar{a}\, d\bar{r} = \int\int_S \mathrm{rot}\bar{a}\bar{n}\, dS,$$

(выбор нормали $\bar{n}$ и ориентация ∂S согласованы по "правилу буравчика"). Стоящий слева интеграл называется *циркуляцией* векторного поля $\bar{a}$ по контуру ∂S. Поэтому формула Стокса означает, что циркуляция векторного поля по краю поверхности равна потоку ротора поля через поверхность при выборе соответствующих ориентаций края и поверхности.

С помощью ротора просто записывается критерий потенциальности векторного поля $\bar{a}$ в шаре: $\mathrm{rot}\bar{a} = \bar{0}$. В частности, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} u) = \bar{0}$ (функция u предполагается дважды непрерывно дифференцируемой). Отметим еще одну формулу $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\bar{a}) = 0$, устанавливаемую непосредственной проверкой.

Распространим формулу Стокса на кусочно гладкие поверхности. Для этого надо сформулировать, что понимается под такими поверхностями и определить их ориентацию (прежнее определение ориентации годится только для гладких поверхностей).

Определение 4. *Поверхность S называется кусочно гладкой ориентированной поверхностью, если*

1) она является объединением конечного числа гладких ориетированных поверхностей S_j, $j = 1, \ldots, k$,

2) S_j, $j = 1, \ldots, k$, пересекаются разве что по краям, причем общие участки, являющиеся кривыми, принадлежат не более чем *двум поверхностям, и пробегаются эти участки в противоположных направлениях.*

Отметим, что "склейка" гладких поверхностей может привести к неориентируемой поверхности. Таковой является лента Мебиуса.

Замечание. Если $\partial\overline{V}$ в формуле Гаусса–Остроградского оказывается кусочно гладкой поверхностью, то выбор внешней нормали приводит к выбору ориентации $\partial\overline{V}$ в смысле данного определения.

Поверхностный интеграл $\int\int_S$ по кусочно гладкой ориентированной поверхности S определяется как сумма интегралов по гладким кускам S_j с соответствующими ориентациями:

$$\int\int_S \doteq \sum_{j=1}^{k} \int\int_{S_j}$$

Теорема 3. *Если S — кусочно гладкая ориетированная поверхность, полученная "склейкой" поверхностей, для которых справедлива формула Стокса, то эта формула имеет место и для всей поверхности S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, поскольку общие участки границ поверхностей S_j встречаются дважды и с противоположной ориентацией, то

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial S_j} = \int_{\partial S}$$

С другой стороны, применяя формулу Стокса и определение интеграла по кусочно гладкой поверхности, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial S_j} = \sum_{j=1}^{k} \int\int_{S_j} = \int\int_S$$

Следовательно, $\int_{\partial S} = \int\int_S$. Теорема доказана.

Чтобы охватить более широкий класс поверхностей, включающий поверхности второго порядка и их части, надо несколько изменить условия в определении поверхности из лекции 14. Прежде чем сделать это, рассмотрим один пример.

Пример. Пусть S — часть цилиндрической поверхности $x^2+y^2=1$, удовлетворяющая условию $0 \le z \le H$. Переходя к цилиндрическим координатам, получим, что уравнение цилиндра в ЦСК примет вид $r=1$, $0 \le z \le H$. Вектор–функция $\bar{\rho}(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$ отображает замкнутый прямоугольник $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, H]$ на S. Но это отображение не является биекцией: точки вида $(\cos 0, \sin 0, z)$ и $(\cos 2\pi, \sin 2\pi, z)$, $z \in [0, H]$ отображаются в один и тот же отрезок $\{(1, 0, z),\ z \in [0, H]\}$, лежащий на цилиндре S. При этом $\bar{\rho}(\varphi, z)$ отображает взаимно однозначно область $D = (0, 2\pi) \times (0, H)$ на $S \setminus \bar{\rho}(\partial D)$.

Определение 5. *Множество $S \subset \mathbf{R}^3$ называется поверхностью, если существует такая измеримая по Жордану область $D \subset \mathbf{R}^2$ и непрерывное отображение $\bar{r}(u, v)$: $\overline{D} \to S$ такое, что*

1) $\bar{r}(\overline{D}) = S$ *и*

2) $\bar{r}$: $D \to S \setminus \bar{r}(\partial D)$ *— биекция*

Если отображение $\bar{r}(u, v)$ непрерывно диференцируемо на $\overline{D}$, то поверхность называется непрерывно дифференцируемой. Гладкой будем называть непрерывно дифференцируемую поверхность такую, что $\forall (u, v) \in D$ векторы $\bar{r}'_u(u, v)$ и $\bar{r}'_v(u, v)$ линейно независимы.

Теперь в определении поверхности нет требования, чтобы отображение $\bar{r}(u, v)$ являлось биекцией $\overline{D}$ на S. Точка M поверхности S называется *кратной*, если существует по крайней мере две различные точки (u_1, v_1) и $(u_2, v_2) \in \overline{D}$, т.ч. $\bar{r}(u_1, v_1) = \bar{r}(u_2, v_2) = \overline{OM}$. В противном случае точка поверхности называется *простой*.

При заданной параметризации $\bar{r}(u, v)$ поверхности S каждую ее точку M можно рассматривать как упорядоченную тройку $(M, u, v) \equiv M(u, v)$, где $\bar{r}(u, v) = \overline{OM}$. Тогда кратные точки поверхности S можно будет различать друг от друга, т.к. они будут соответствовать несовпадающим парам параметров (u, v).

Пусть $S = \{\bar{r}(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}\}$ — непрерывно дифференцируемая поверхность и замкнутая измеримая по Жордану область $\overline{D}$ является образом замкнутой измеримой по Жордану области $\overline{D'}$ ($\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — замыкания областей D и D') при непрерывно дифференцируемом отображении $\bar{\lambda}(s, t) = (\alpha(s, t), \beta(s, t))$. Пусть при этом $\bar{\lambda}$ отображает взаимно однозначно область D' на область D с якобианом $\dfrac{D(\alpha,\beta)}{D(s,t)}$, отличным от нуля в D'. Будем говорить, что вектор–функции $\bar{r}(u,v)$ и $\bar{\rho}(s,t) \doteq \bar{r}(\alpha(s,t),\beta(s,t))$ определяют одну и ту же поверхность S (являются допустимыми параметризациями поверхности S), а $\bar{\lambda}(s,t)$ — допустимой заменой параметров. Отметим, что отображение $\bar{\lambda}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 из лекции 13 о замене переменной в кратном интеграле Римана.

Для таких поверхностей площадь поверхности и поверхностный интеграл I рода определяются, как и прежде. Что касается поверхностных интегралов II рода, то они определяются посредством равенств (см. лекцию 19):

$$\int\!\!\int_{\overline{S^+}} P(x,y,z)\,dydz = \int\!\!\int_{\overline{D}} P(\bar{r}(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv,$$

$$\int\!\!\int_{S^+} Q(x,y,z)\,dzdx = \int\!\!\int_{\overline{D}} Q(\bar{r}(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv,$$

$$\int\!\!\int_{S^+} R(x,y,z)\,dxdy = \int\!\!\int_{\overline{D}} R(\bar{r}(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv.$$

ЛЕКЦИЯ 22

Тригонометрический ряд. Формулы для коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье четных и нечетных функций. Теорема Римана и ее следствие.

Перейдем к изучению функциональных рядов вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

где $a_0, a_k, b_k \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$, $k = 1, 2, \ldots$, называемых *тригонометрическими* рядами. Числа a_0, a_k, b_k $(k \in \mathbf{N})$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Членами тригонометрического ряда являются функции тригонометрической системы $\{1,\ \cos x,\ \sin x, \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos kx,\ \sin kx, \ldots\}$, умноженные на коэффициенты a_k и b_k.

При каждом n частичные суммы тригонометрического ряда

$$S_n(x) \doteq a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

являются 2π–периодическими функциями. Поэтому если тригонометрический ряд сходится в некоторой точке x_0, то он сходится к тому же значению и во всех точках вида $x_0 + 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$.

Лемма 1. *Функции тригонометрической системы обладают следующими свойствами:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0 \ k \neq m,\ k, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0 \ k, m = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эти равенства проверяются непосредственно. Например, при $k \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+m)x + \cos(k-m)x)\,dx = 0,$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos lx\,dx = \frac{1}{l}\sin lx|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ l = 1,\ 2, \ldots .$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx)\,dx = \pi,\ k = 1,\ 2 \ldots .$$

Другие тождества проверяются аналогично.

В этой лемме вместо интегралов по отрезку $[-\pi, \pi]$ можно брать интегралы по любым отрезкам $[a, a + 2\pi]$ длины 2π. Это следует из приводимого ниже утверждения.

Лемма 2. *Если T–периодическая функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке $[a, a + T]$ длины T, то она интегрируема и на любом другом отрезке той же длины и интегралы по этим отрезкам равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что функция определена на всей числовой прямой и интегрируема на любом отрезке. Последнее будет следовать из того, что f интегрируема на любых отрезках вида $[a + mT, a + kT]$, где $m,\ k \in \mathbf{Z}$, $m < k$.

Чтобы доказать интегрируемость f на указанных отрезках, в силу аддитивности интеграла достаточно показать, что для $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ функция $f \in R[a + kT, a + (k + 1)T]$. Действительно, если $x \in [a + kT, a + (k + 1)T]$, то $x = u + kT$, где $u \in [a, a + T]$. Поскольку f периодична, то $f(u) = f(u + kT) = f(x)$. Поэтому при выборе соответствующих друг другу размеченных разбиений интегральные суммы Римана функции f для отрезков $[a, a+T]$ и $[a+kT, a+(k+1)T]$ совпадают. Следовательно,

$$\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Поскольку для любого отрезка можно указать отрезок $[a + mT, a + kT]$, содержащий его, то интегрируемость на нем следует из свойств интеграла Римана (интегрируемость по подотрезкам см. лекцию 1.25).

Так как функция f интегрируема на любом отрезке и периодична, то, как и выше доказывается, что для любого отрезка $[c, d]$

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{c+T}^{d+T} f(x)\,dx.$$

Лемма будет доказана, если показать, что для любого $b \in \mathbf{R}$

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Действительно, используя аддитивность интеграла Римана и полученное равенство, имеем

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_b^T f(x)\,dx + \int_{0+T}^{b+T} f(x)\,dx =$$

$$\int_b^T f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Лемма доказана.

Для степенных рядов известно, как выражаются их коэффициенты через суммы рядов. Для тригонометрических рядов имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если тригонометрический ряд сходится равномерно на* $\mathbf{R}$ *к функции* $f(x)$, *то*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как члены тригонометрического ряда являются непрерывными функциями и ряд сходится равномерно на **R**, то его можно почленно проинтегрировать по отрезку $[-\pi, \pi]$(теорема 9 лекции 2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right) =$$

$$a_0 2\pi.$$

Значит, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

Теперь умножим обе части равенства

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

на $\cos mx$:

$$f(x)\cos mx = a_0\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx\cos mx + b_k\sin kx\cos mx.$$

Так как функция $\cos mx$ ограничена на **R**, то полученный ряд сходится равномерно к $f(x)\cos mx$ (лемма 1 лекции 2). Поскольку члены нового ряда непрерывны, то его можно почленно проинтегрировать по $[-\pi, \pi]$. С учетом леммы 1 имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mx\,dx\right) =$$

$$a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx = a_m\pi,\ \text{т.е. } a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx.$$

Если домножить исходный тригонометрический ряд на $\sin mx$ и почленно проинтегрировать, то получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = b_m\pi, \text{ т.е. } a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Теорема доказана.

Замечание. Обычно вместо коэффициента a_0 в записи тригонометрического ряда пишут $\frac{a_0}{2}$. В этом случае для вычисления a_0 надо воспользоваться общей формулой, положив в ней $k = 0$. Действительно, если a_0 вычисляется по общей формуле, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Тогда

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

совпадает с выражением для нулевого коэффициента равномерно сходящегося тригонометрического ряда.

Тригонометрические ряды Фурье

Через $QL_1(-\pi,\pi)$ обозначим множество всех действительнозначных функций f, имеющих конечное число особых точек на $(-\pi,\pi)$, интегрируемых по Риману на любых отрезках, принадлежащих $(-\pi,\pi)$ и не содержащих особых точек (данной функции), и таких, что НИ $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$ сходится. Функции из $QL_1(-\pi,\pi)$ называются абсолютно интегрируемыми на интервале $(-\pi,\pi)$. Поскольку $\forall k \in \mathbf{N}$: $|f(x)\cos kx|$, $|f(x)\sin kx| \le |f(x)|$, то интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

сходятся как абсолютно сходящиеся интегралы. Следовательно, для произвольной функции $f \in QL_1(-\pi,\pi)$ определены величины

$$a_k \doteq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ b_k \doteq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 0, 1, 2\ldots, \tag{12}$$

называемые *коэффициентами Фурье* функции f по тригонометрической системе функций.

Совокупность ненулевых коэффициентов Фурье периодической функции назыывается ее *спектром*.

Определение 1. *Тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

коэффициенты которого заданы формулами (12), называется тригонометрическим рядом Фурье функции f.

Если f — 2π–периодическая функция, то в формулах для коэффициентов Фурье интеграл можно брать по любому отрезку длины 2π (это следует из леммы 2).

Замечание. Тригонометрические ряды Фурье можно рассматривать для функций, абсолютно интегрируемых на произвольном интервале $(a, a + 2\pi)$ длины 2π. В этом случае интегралы в формулах для коэффициентов Фурье будут распространяться на рассматриваемый промежуток.

Некоторые свойства функций очень просто описываются через ее коэффициенты Фурье. Чтобы избежать дополнительных деталей будем предполагать, что $f \in R[-\pi, \pi]$.

Если f — нечетная, т.е. $\forall x \in (-\pi, \pi)$: $f(-x) = -f(x)$, то

$$a_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots,\ \ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Действительно,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\right).$$

В первом интеграле сделаем замену $x = -t$ (отметим, что законность такой подстановки не вытекает из доказанной во втором семестре теоремы о замене переменной; для ее доказательства следует сравнить интегральные суммы функций $f(x)$ и $g(x) \doteq f(-x)$):

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos kt\,dt =$$

$$\int_{0}^{\pi} f(-t)\cos kt\,dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \;\Rightarrow\; a_k = 0\,\forall k.$$

Далее,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right).$$

Снова в первом слагаемом сделаем замену $x = -t$. Так как произведение $f(x)\sin kx$ нечетных функций является четной функцией, то

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} f(t)\sin kt\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Если f — четная, т.е. $\forall x \in (-\pi,\pi)$: $f(-x) = f(x)$, то

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \text{ а коэффициенты } b_k = 0\,\forall k.$$

Обоснование этой формулы проводится, как и в случае нечетных функций.

Одним из принципиальных результатов в теории тригонометрических рядов Фурье является следующая теорема (в литературе часто называемая леммой Римана).

Теорема(Риман). *Если $f \in QL_1(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, то*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Следствие. *Коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой на* $(-\pi, \pi)$ *функции стремятся к нулю.*

Предпошлем доказательству теоремы два утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $f \in R[a_0, b_0]$. *Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдется разбиение* $T[a_0, b_0] = \{t_i\}_{i=0}^{k_0}$ *и функция* $g(t) = \sum_{i=1}^{k_0} m_i \chi_{D_i}(t)$, $(D_i = [t_{i-1}, t_i))$, $g(b_0) = m_{k_0}$ *такие, что*

$$\int_{a_0}^{b_0} |f(t) - g(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу критерия Дарбу существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. для любого разбиения $T[a_0, b_0]$ с диаметром $\lambda(T) < \delta$: $S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon$.

Зафиксируем разбиение $T[a_0, b_0] = \{t_i\}_{i=0}^{k_0}$ так, чтобы его диаметр $\lambda(T) < \delta$. Поскольку $s(f, T) \le \int_{a_0}^{b_0} f(t)\, dt \le S(f, T)$, то

$$\int_{a_0}^{b_0} f(t)\, dt - s(f, T) < \varepsilon.$$

Пусть $m_i = \inf_{\Delta_i} f(t)$, $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$, $D_i = [t_{i-1}, t_i)$ и $s(f, T) = \sum_{i=1}^{k_0} m_i \Delta t_i$. Положим $g(t) \doteq \sum_{i=1}^{k_0} m_i \chi_{D_i}(t)$, $g(b_0) \doteq m_{k_0}$. Функции $\chi_{D_i}(t)$ кусочно непрерывны на отрезке $[a_0, b_0]$, $i = 1, \ldots, k_0$, следовательно, интегрируемы на нем (см. лекцию 1.26). Тогда в силу линейности интеграла Римана (см. лекцию 1.24) $g \in R[a_0, b_0]$ и

$$\int_{a_0}^{b_0} g(t)\, dt = \sum_{i=1}^{k_0} \int_{a_0}^{b_0} m_i \chi_{D_i}(t)\, dt =$$

$$\sum_{i=1}^{k_0} m_i \int_{a_0}^{b_0} \chi_{D_i}(t)\, dt = \sum_{i=1}^{k_0} m_i \Delta t_i = s(f, T).$$

При этом $g(t) \le f(t)\ \forall t \in D_i$, $i = 1, \ldots, k_0$. Значит, с учетом значения функции $g(t)$ в точке b_0 имеет место неравенство $g(t) \le f(t)$ на $[a_0, b_0]$.

Наконец,

$$\int_{a_0}^{b_0} |f(t)-g(t)|\,dt = \int_{a_0}^{b_0} (f(t)-g(t))\,dt =$$

$$\int_{a_0}^{b_0} f(t)\,dt - \int_{a_0}^{b_0} g(t)\,dt = \int_{a_0}^{b_0} f(t)\,dt - s(f,T) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Распространим лемму на несобственные интегралы.

Лемма 4. *Пусть функция f такова, что она интегрируема по Риману на любом отрезке из полуинтервала $[a,b)$ причем НИ $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно указать отрезок $[a,\eta_\varepsilon]$, где $\eta_\varepsilon \in (a,b)$, и его разбиение $T[a,\eta_\varepsilon] = \{x_i\}_{i=1}^{i_0}$, т.ч. функция $g(x) \doteq \sum_{i=1}^{i_0} m_i \chi_{E_i}(x)$, $E_i = [x_{i-1},x_i)$, $m_i \doteq \inf_{\Delta_i} f(x)$, $\Delta_i = [x_{i-1},x_i]$ удовлетворяет неравенству*

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию НИ $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится. Следовательно, существует $\eta_\varepsilon \in [a,b)$, т.ч. "хвост" НИ $\int_{\eta_\varepsilon}^b |f(x)|\,dx < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, функция $f \in R[a,\eta_\varepsilon]$. Поэтому согласно лемме 1 для данного ε существует разбиение отрезка $[a,\eta_\varepsilon]$ такое, что функция $g(x) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \chi_{E_i}(x)$, $g(\eta_\varepsilon) \doteq m_{i_0}$ обладает тем свойством, что

$$\int_a^{\eta_\varepsilon} |f(x)-g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отметим, что $g(x) \le f(x)$ на $[a,\eta_\varepsilon]$ и $g(x)=0$ для $x \in (\eta_\varepsilon, b)$. Далее,

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = \int_a^{\eta_\varepsilon} |f(x)-g(x)|\,dx + \int_{\eta_\varepsilon}^b |f(x)-g(x)|\,dx <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \int_{\eta_\varepsilon}^b |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы Римана. В силу определения несобственного интеграла теорему достаточно доказать для функций f, заданных на полуинтервале $[a, b)$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, интегрируемых на любом отрезке из $[a, b)$, и таких, что НИ $\int_a^b |f(x)|\, dx$ сходится.

1) Пусть $f(x) = c$ на полуинтервале $[d_0, d_1)$, где $a \leq d_0 < d_1 < b$, и $f(x) = 0$ вне $[d_0, d_1)$. Тогда функция $f \in R[d_0, d_1]$ при любом ее доопределении в точке d_1 и

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x\, dx = \int_{d_0}^{d_1} c \cos \lambda x\, dx = c \int_{d_0}^{d_1} \cos \lambda x\, dx =$$

$$\frac{c}{\lambda} (\sin \lambda d_1 - \sin \lambda d_0) \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

2) Для функций

$$f(x) \doteq \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{[d_{i-1}, d_i)}(x), \text{ где } a \leq d_0 < d_1 < \ldots d_k < b$$

утверждение теоремы следует из 1) и линейности интеграла и предела.

3) Общий случай. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию НИ $\int_a^b |f(x)|\, dx$ сходится. Выберем $\eta_\varepsilon \in [a, b)$ и функцию $g(x)$ такими же, как и в лемме 4. Точнее, чтобы выполнялись неравенства:

$$\int_{\eta_\varepsilon}^b |f(x)|\, dx < \varepsilon, \ \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Теперь оценим

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x\, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x) + g(x)) \cos \lambda x\, dx \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \cos \lambda x\, dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \cos \lambda x\, dx \right| = I + J.$$

Имеем ($g(x) = 0$ для $x \in (\eta_\varepsilon, b)$)

$$J = \left| \int_a^{\eta_\varepsilon} g(x) \cos \lambda x \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{i_0} m_i \int_a^{\eta_\varepsilon} \chi_{E_i}(x) \cos \lambda x \, dx \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x \, dx \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{i_0} m_i \left(\sin \lambda x_{i-1} - \sin \lambda x_i \right) \right| \leq$$

$$\frac{1}{|\lambda|} \sum_{i=1}^{i_0} 2|m_i| = \frac{C(\varepsilon)}{|\lambda|} < \varepsilon \text{ для } |\lambda| > \lambda_\varepsilon$$

(выбор функции g зависит от ε и потому $\sum_{i=1}^{i_0} 2|m_i| = C(\varepsilon)$). Перейдем к оценке I:

$$I \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| |\cos \lambda x| \, dx \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon.$$

Объединяя полученные неравенства, получаем, что

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx \right| < \varepsilon \text{ для } \forall |\lambda| > \lambda_\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то $\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$.

ЛЕКЦИЯ 23
Сходимость тригонометрических рядов Фурье. Пространство $QL_2[a,b]$ кусочно непрерывных функций. Сходимость в пространстве $QL_2[a,b]$. Непрерывность скалярного произведения.

Распространим понятие односторонних производных на точки, в которых функция имеет односторонние пределы.

Пусть функция f определена в правой (левой) окрестности точки x. Величины

$$f'(x+0) \doteq \lim_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},$$

$$f'(x-0) \doteq \lim_{h\to+0} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h},$$

если они существуют, называются соответственно *правосторонней* и *левосторонней* производными в точке x.

Очевидно, что если функция f непрерывна в точке x, то левосторонняя и правосторонняя производные в этой точке совпадают с левой и правой производными.

Примеры.

1) $f(x) = x$, $x \in [0,1)$, $f(x) = 0$, $x \in (1,2]$ и $f(1) = 1/2$. Поскольку $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, то $f'(1-0) = \lim_{h\to+0}((1-h)-1)/(-h) = 1$, $f'(1+0) = 0$. При этом левая и правая производные в точке $x = 1$ не существуют.

2) Для $f(x) = |x|^{1/2}$ $f'_l(0) = f'(0-0) = -\infty$, $f'_r(0) = f'(0+0) = +\infty$.

Далее введем новый класс функций для того, чтобы сформулировать теорему о поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Определение 1. *Функция f называется кусочно дифференцируемой на $[a,b]$, если существует разбиение $T[a,b] = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, т.ч.*

1) $f \in D(x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) существуют конечные $f'(x_{i-1}+0)$, $f'(x_i - 0)$, $i = 1\ldots, n$.

Функция из примера 1) является кусочно дифференцируемой, а из второго — нет.

Кусочно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции являются кусочно непрерывными и, следовательно, интегрируемыми на нем (см. лекцию 1.26).

Теорема 1. *Тригонометрический ряд Фурье кусочно дифференцируемой на* $[-\pi, \pi]$ *функции сходится в каждой точке* x *интервала* $(-\pi, \pi)$ *к* $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *а в концевых точках* $x = \pm\pi$ *отрезка* $[-\pi, \pi]$ *сходится к* $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Следствие. *В точках непрерывности кусочно дифференцируемой функции* f, *принадлежащих интервалу* $(-\pi, \pi)$, *ее тригонометрический ряд Фурье сходится к значениям функции.*

Теорема 2. *Если* $f \in C[-\pi, \pi]$ *и* $\forall x \in (-\pi, \pi)$ *существуют как левая, так и правая производные* $f'_l(x)$ *и* $f'_r(x)$, *а в концевых точках существуют односторонние производные* $f'_r(-\pi)$ *и* $f'_l(\pi)$, *то* $\forall x \in (-\pi, \pi)$ *тригонометрический ряд Фурье функции* f *сходится к* $f(x)$, *а в точках* $x = \pm\pi$ *сходится к* $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$.

Не будем останавливаться на доказательстве этих теорем.

Замечание. Поскольку частичные суммы тригонометрического ряда являются 2π–периодическими функциями, то тригонометрический ряд Фурье кусочно дифференцируемой функции сходится не только на $[-\pi, \pi]$, но и во всех точках числовой прямой.

Пример. Найдем разложение функции $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ для $x \in [0, 2\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье. Для этого сосчитаем ее коэффициенты Фурье. Для $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi k}\left(\frac{\pi - x}{2}\sin kx|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx\right) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi k}\left(\frac{\pi - x}{2}\cos kx|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$-\frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Далее,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\,dx = -\frac{(\pi - x)^2}{4}|_0^{2\pi} = 0.$$

Следовательно,
$$\frac{\pi - x}{2} \overset{(0,2\pi)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$
(в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ ряд сходится к нулю).

Тригонометрические ряды Фурье можно рассматривать для функций, абсолютно интегрируемых на промежутках вида $(-l, l)$ (или любых других промежутков $(a, a+2l)$ длины $2l$). Если f абсолютно интегрируема на $(-l, l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье имеет вид
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x,$$
где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам
$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx,\ \ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx.$$

Сформулированные выше теоремы остаются справедливыми, если вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ брать отрезки вида $[a, a+2l]$.

Пространство кусочно непрерывных функций

Дополним определение кусочно непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f, которое было дано в лекции 1.26, еще одним условием.

Определение 2. *Функция f называется кусочно непрерывной на $[a, b]$, если существует разбиение $T[a, b] = \{x_j\}_{j=0}^{n}$, $n = n(f)$, т.ч.*

1) $f \in C(x_{j-1}, x_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$*;*

2) *существуют конечные односторонние пределы* $f(x_{j-1}+0)$, $f(x_j - 0)$ $(j = 1, 2\ldots, n)$*;*

3) $f(x_j) = \dfrac{1}{2}(f(x_j - 0) + f(x_j + 0))$ *для* $j = 1, \ldots, n-1$ *и* $f(a) = f(b) = \dfrac{1}{2}(f(a+0) + f(b-0))$.

Рассмотрим множество всех кусочно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, которое обозначим $KC[a, b]$. Сложение (поточечное) таких функций и умножение их на числа дают в результате снова кусочно непрерывные функции. Легко убедиться, что множество $KC[a,b]$ всех кусочно непрерывных на отрезке функций является векторным пространством.

При умножении двух функций из $KC[a,b]$ получается функция, для которой выполнены условия 1) и 2) определения 2. Следовательно, произведение двух кусочно непрерывных функций интегрируемо по Риману на $[a,b]$ (см. лекцию 1.26).

Лемма 1. *Формула*

$$(f,g) \doteq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{13}$$

задает в векторном пространстве $KC[a,b]$ скалярное произведение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для этого проверим, что для (13) выполняются аксиомы скалярного произведения. Действительно, симметричность очевидна, линейность следует из линейности интеграла; неотрицательность скалярного произведения $(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$ — из неотрицательности интеграла от неотрицательной функции. Наконец, если $0 = (f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx$, то из свойств интеграла Римана (см. теорему 1 лекции 1.26) следует, что функция $f^2(x) = 0$ во всех своих точках непрерывности, а поэтому и $f(x) = 0$ во всех точках своей непрерывности. Следовательно, $f(x) = 0$ для $\forall x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Но тогда в силу пункта 3 определения кусочно непрерывной функции $f(x_j) = 0$ и $f(a) = f(b) = 0$, т.к. $f(x_{j-1}+0) = f(x_j - 0) = 0$, и $f(a+0) + f(b-0) = 0$. Значит, из условия $(f,f) = 0$ следует, что $f(x) = 0$ на $[a,b]$, т.е. f является нулевым элементом векторного пространства $KC[a,b]$.

Определение 3. *Векторное пространство $KC[a,b]$, в котором введено скалярное произведение (13), будем обозначать $QL_2[a,b]$.*

Если функция g задана на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 2, то ее очевидно можно изменить не более чем в конечном числе точек так, чтобы видоизмененная функция принадлежала пространству $QL_2[a,b]$. Другими словами, для любой такой функции g можно указать функцию $g^* \in QL_2[a,b]$, отличающуяся от g не более чем в конечном числе точек.

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца для введенного скалярного произведения выглядит следующим образом:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(это частный случай неравенства Гельдера для интегралов).

Напомним, что в пространстве со скалярным произведением можно ввести норму, порожденную скалярным произведением: $\|f\| \doteq (f,f)^{1/2}$.

Определение 4. *Величина*

$$\|f\| \doteq (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

называется нормой функции f в пространстве $QL_2[a,b]$.

Неравенство треугольника $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ для нормы (14) имеет вид

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(оно является частным случаем неравенства Минковского для интегралов).

Определение 5. *Последовательность функций $(f_n) \subset QL_2[a,b]$ сходится к функции $f \in QL_2[a,b]$ в пространстве (или по норме пространства) $QL_2[a,b]$, если*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Для сходимости в пространстве $QL_2[a,b]$ используется обозначение $f_n \overset{QL_2[a,b]}{\to} f$ $(n \to +\infty)$.

Сходимость по норме пространства $QL_2[a,b]$ называют также сходимостью в смысле среднего квадратичного.

Лемма 2(единственность предела). *Предел последовательности в пространстве $QL_2[a,b]$ единствен, если он существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_n \overset{QL_2[a,b]}{\to} f$ и $f_n \overset{QL_2[a,b]}{\to} g$ при $n \to +\infty$. Имеем

$$\|f-g\| = \|f-f_n-(g-f_n)\| \le \|f-f_n\|+\|g-f_n\| \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Тогда $\|f-g\| = 0$. Следовательно, $f-g = 0$ на $[a,b]$. Лемма доказана.

Замечание. Сходимость по норме в нормированном пространстве означает сходимость по метрике $d(f,g) \doteq \|f-g\|$, индуцированной нормой (это относится к любым векторным пространствам). Таким образом, всякое векторное нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой, порожденной нормой. Поэтому единственность предела по норме последовательности в нормированном пространстве можно было получить из единственности предела в метрическом пространстве (лекция 1.32).

Лемма 3(непрерывность скалярного произведения). *Если $f_n \overset{QL_2[a,b]}{\to} f$ при $n \to +\infty$, f_n, $f \in QL_2[a,b]$, то для $\forall g \in QL_2[a,b]$*

$$(f_n, g) \to (f,g) \text{ при } n \to +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$|(f_n,g)-(f,g)| = |(f_n-f,g)| \le \|f_n-f\|\|g\| \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

(сначала воспользовались линейностью скалярного произведения, а затем — неравенством Коши–Буняковского–Шварца).

Замечание. Непрерывность скалярного произведения означает, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n,g) = (f,g) = (\lim_{n\to+\infty} f_n, g),$$

если $f_n \overset{QL_2[a,b]}{\to} f$ при $n \to +\infty$.

Лемма 4. *Если* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ $(f_n,\ f \in QL_2[a,b])$, *то* $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ *в пространстве* $QL_2[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неравенства

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|$$

и sup–критерия равномерной сходимости имеем:

$$\left(\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\left(\int_a^b (\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|(b-a)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

при $n \to +\infty$. Лемма доказана.

Замечание. Из сходимости по норме пространства $QL_2[a,b]$ не следует поточечная сходимость на $[a,b]$. Пусть $n \ge 2$. Положим $f_n(x) = 0$ для $x \in [0, 1-1/n^2) \bigcup (1+1/n^2, 2]$, $f_n(x) = \sqrt{n}$ для $x \in (1-1/n^2, 1+1/n^2)$ и $f_n(1-1/n^2) = f_n(1+1/n^2) = \sqrt{n}/2$. Тогда $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ в пространстве $QL_2[0,2]$, ибо

$$\|f_n(x) - 0\| = \|f_n(x)\| = \left(\int_{1-1/n^2}^{1+1/n^2} n\, dx\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \to 0.$$

Но в точке $x = 1$ последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{+\infty}$ расходится.

Определение 6. *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$, *где* $f_k(x)$, $f(x) \in QL_2(a,b)$ *сходится к* $f(x)$ *в пространстве* $QL_2[a,b]$, *если последовательность* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в пространстве* $QL_2(a,b)$.

ЛЕКЦИЯ 24

Ортогональные и ортонормированные системы функций. Коэффициенты Фурье и ряды Фурье по ортогональным и ортонормированным системам функций. Теорема о коэффициентах сходящегося ортогонального ряда. Полные ортогональные системы функций. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Критерий сходимости ряда Фурье в пространстве $QL_2[a,b]$. Равенство Парсеваля.

Определение 1. *Функции ϕ, $\psi \in QL_2[a,b]$ называются ортогональными, если $(\phi,\psi)=0$.*

Определение 2. *Система функций $\{\psi_k\}=\{\psi_1,\ldots,\psi_k,\ldots\}$ называется ортогональной в пространстве $QL_2[a,b]$, если*

1) функции этой системы принадлежат $QL_2[a,b]$;

2) имеют положительные нормы;

3) попарно ортогональны, т.е. $(\psi_i,\psi_j)=0$ при $i\neq j$.

Замечание. Условие 2 означает, что среди функций нет нулевых элементов пространства $QL_2[a,b]$, т.е. функций, обращающихся в нуль на отрезке $[a,b]$.

Из курса линейной алгебры известно, что произвольная конечная система ненулевых попарно ортогональных векторов линейно независима. Стало быть, и любая конечная система ортогональных в $QL_2[a,b]$ функций линейно независима.

Примеры.

1) Система функций $\{1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos kx,\sin kx,\ldots\}$ ортогональна в $QL_2[-\pi,\pi]$ (см. лемму 1 лекции 22). Ее подсистемы $\{1,\cos x,\cos 2x,\ldots,\cos kx,\ldots\}$ и $\{\sin x,\sin 2x,\ldots,\sin kx,\ldots\}$ и также ортогональны в $QL_2[-\pi,\pi]$.

2) Легко проверить, что системы функций $\{1,\cos x,\cos 2x,\ldots,\cos kx,\ldots\}$ и $\{\sin x,\sin 2x,\ldots,\sin kx,\ldots\}$ остаются ортогональными также и в пространстве $QL_2[0,\pi]$.

Определение 3. *Функция $\phi\in QL_2[a,b]$ называется нормальной, если $\|\phi\|=(\phi,\phi)^{1/2}=1$.*

Определение 4. *Система функций $\{\phi_k\}=\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k,\ldots\}$ называется ортонормированной системой (ОНС) в $QL_2[a,b]$, если*

1) функции этой системы принадлежат $QL_2[a,b]$;

2) скалярные произведения $(\phi_k, \phi_l) = \delta_{kl}$, где $\delta_{kl} = 1$, если $k = l$ и $\delta_{kl} = 0$, если $k \neq l$.

Как следует из определений, всякая ортонормированная в пространстве $QL_2[a,b]$ система функций является ортогональной в этом пространстве системой.

Пусть $f \in QL_2[a,b]$.

Определение 5. *Числа $\dfrac{1}{\|\psi_k\|^2}(f, \psi_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$ называются коэффициентами Фурье функции $f \in QL_2[a,b]$ по ортогональной в $QL_2[a,b]$ системе функций $\{\psi_k\}$, а числа (f, ϕ_k) $(k = 1, 2, \dots)$ — коэффициентами Фурье функции f по ОНС $\{\phi_k\}$.*

Определение 6. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\|\psi_k\|^2}(f, \psi_k)\psi_k$$

называется рядом Фурье функции $f \in QL_2[a,b]$ по ортогональной системе функций $\{\psi_k\}$. Рядом Фурье функции f по ОНС $\{\phi_k\}$ называется ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(f, \phi_k)\phi_k.$$

Ряды по ортогональным системам называются *ортогональными*.

Теорема 1(о коэффициентах сходящегося ортогонального ряда). *Пусть $\{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортогональная система функций в $QL_2[a,b]$, $f \in QL_2[a,b]$. Если $f \overset{QL_2[a,b]}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\psi_k$, то $c_k = \dfrac{1}{\|\psi_k\|^2}(f, \psi_k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно (пояснения ниже),

$$(f, \psi_l) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k\psi_k, \psi_l\right) = (\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k, \psi_l) =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k, \psi_l\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k(\psi_k,\psi_l) = c_l\|\psi_l\|^2$$

(сначала воспользовались непрерывностью и линейностью скалярного произведения, а затем ортогональностью функций ψ_k).

Теорема 1 означает, что если ряд по ортогональной системе функций сходится в $QL_2[a,b]$, то он является рядом Фурье своей суммы.

Следствие (единственность разложения). *Если* $f \overset{QL_2[a,b]}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\psi_k$ *и* $f \overset{QL_2[a,b]}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\psi_k$*, то* $a_k = b_k$ *для* $\forall k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сразу следует из формулы для коэффициентов ряда.

Естественно возникают вопросы о том, сходятся ли в каком–либо смысле ряды Фурье функций из $QL_2[a,b]$, а если сходятся, то что является их суммами. Ниже будет идти речь только о сходимости по норме пространства $QL_2[a,b]$.

Пример. Пусть $\mu(x) = \sin x$, $x \in [-\pi,\pi]$. Рассмотрим ортогональныую в $QL_2[-\pi,\pi]$ систему функций $\{\sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin kx, \dots\}$. Очевидно, что коэффициенты Фурье функции $\mu(x)$ равны нулю. Значит, и сумма в $QL_2[-\pi,\pi]$ ее ряда Фурье равна нулевой функции. Следовательно, ряд Фурье функции $\mu(x)$ сходится, но не к самой функции.

Далее заметим, что функция $\lambda(x) = 0$ на $[-\pi,\pi]$ также имеет нулевые коэффициенты Фурье. Таким образом, две различные непрерывные функции могут иметь одинаковые коэффициенты Фурье по данной ортогональной системе функций.

Поэтому естественным будет выделение таких ортогональных систем, для которых ряд Фурье любой функции из $QL_2[a,b]$ сходится по норме в $QL_2[a,b]$ к самой функции.

Определение 7. *Ортогональная система функций* $\{\psi_k\}$ *называется полной ортогональной системой в* $QL_2[a,b]$*, если для каждой* $f \in QL_2[a,b]$ *ее ряд Фурье сходится в* $QL_2[a,b]$ *к* f.

Лемма. *Пусть ортогональная система функций* $\{\psi_k\}$ *полна в* $QL_2[a,b]$*. Тогда совпадение коэффициентов Фурье функций из* $QL_2[a,b]$ *влечет равенство функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $f, g \in QL_2[a,b]$ таковы, что $\frac{1}{\|\psi_k\|^2}(f,\psi_k) = \frac{1}{\|\psi_k\|^2}(g,\psi_k) = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу полноты в $QL_2[a,b]$ системы функций $\{\psi_k\}$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\psi_k$ сходится в пространстве $QL_2[a,b]$ как к функции f, так и к функции g. В силу единственности предела в $QL_2[a,b]$ заключаем, что функции f и g совпадают. Лемма доказана.

Таким образом, полные ортогональные системы функций обладают тем свойством, что любая функция из пространства $QL_2[a,b]$ однозначно восстанавливается по своими коэффициентами Фурье с помощью ряда Фурье. Это значит, что вся информация о функции содержится в счетном наборе чисел, а именно, в последовательности ее коэффициентов Фурье.

Теорема 2(минимальное свойство коэффициентов Фурье). *Если $\{\phi_k\}$ — произвольная ОНС в $QL_2[a,b]$, то для каждого $n \in \mathbf{N}$ и каждой функции $f \in QL_2[a,b]$:*

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{R}} \|f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_k\| = \|f - \sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)\phi_k\|,$$

т.е. минимум левой части достигается, когда $\alpha_k = (f,\phi_k)$ являются коэффициентами Фурье функции f. При этом

$$\|f - \sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)\phi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим

$$\|f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_k, f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_k) =$$

(используем свойства скалярного произведения)

$$= (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f,\phi_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j(\phi_k,\phi_j) =$$

(по условию $(\phi_k,\phi_j)=\delta_{kj}$)

$$=(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f,\phi_k)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2=$$

(дополняем последние два слагаемых до полного квадрата)

$$=(f,f)+\sum_{k=1}^{n}((((f,\phi_k)^2-2\alpha_k(f,\phi_k)+\alpha_k^2)-(f,\phi_k)^2)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}((f,\phi_k)-\alpha_k)^2+(f,f)-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2\geq$$

(отбрасываем неотрицательное слагаемое $\sum_{k=1}^{n}((f,\phi_k)-\alpha_k)^2$)

$$\geq (f,f)-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2,$$

причем минимум достигается тогда и только тогда, когда $\alpha_k=(f,\phi_k)$. При таком выборе коэффициентов α_k имеем

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)\phi_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2$$

(полученая формула дает точное значение квадрата нормы уклонения частичной суммы порядка n ряда Фурье функции f от самой функции f).

Теорема доказана.

Теорема 3(неравенство Бесселя). *Если $\{\phi_k\}$ — произвольная ОНС в $QL_2[a,b]$, то для любой функции $f\in QL_2[a,b]$ и каждого $n\in\mathbf{N}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2\leq\|f\|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 для любого натурального n

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)\phi_k\|^2.$$

Так как правая часть равенства ≥ 0, то $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2 \geq 0$ для $\forall n \in \mathbf{N}$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2 \leq \|f\|^2.$$

Следствие 1. *Для любой функции $f \in QL_2[a,b]$ ряд из квадратов ее коэффициентов Фурье по произвольной ОНС $\{\phi_k\}$ сходится и при этом имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(f,\phi_k)^2 \leq \|f\|^2$$

(также называемое неравенством Бесселя).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следствия вытекает из теоремы 3 в силу критерия сходимости знакопостоянного ряда (теорема 4 лекция 1.44).

Следствие 2. *Для любой функции $f \in QL_2[a,b]$ ее коэффициенты Фурье по произвольной ОНС $\{\phi_k\}$ стремятся к нулю при $k \to +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}(f,\phi_k)^2$ следует, что $\lim_{k\to+\infty}(f,\phi_k)^2 = 0$. Но тогда и $\lim_{k\to+\infty}(f,\phi_k) = 0$.

Теорема 4. *Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty}(f,\phi_k)\phi_k$ функции $f \in QL_2[a,b]$ по ОНС $\{\phi_k\}$ сходится к f в пространстве $QL_2[a,b]$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}(f,\phi_k)^2,$$

называемое равенством Парсеваля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S_n(f) = \sum_{k=1}^{n}(f, \phi_k)\phi_k$ — n–я частичная сумма ряда Фурье функции f. По теореме 2

$$\|f - S_n(f)\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f, \phi_k)^2.$$

Поэтому $\lim_{n\to+\infty}\|f - S_n(f)\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to+\infty}(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f, \phi_k)^2) = 0$. Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\|f\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(f, \phi_k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \phi_k)^2$.

Следствие. *Для того, чтобы ОНС $\{\phi_k\}$ была полной ОНС в $QL_2[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции $f \in QL_2[a, b]$ выполнялось равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}(f, \phi_k)^2$.*

Доказательство сразу следует из теоремы и определения полной ОНС.

Все сказаннное выше относится и к ортогональным в $QL_2[a, b]$ системам функций. Посмотрим, как будет выглядеть неравенство Бесселя для $f \in QL_2[a, b]$ по ортогональной системе $\{\psi_k\}$. Для k–го коэффициента Фурье c_k функции f по этой системе имеем

$$c_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2}(f, \psi_k) = \frac{1}{\|\psi_k\|}\left(f, \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|}\right) = \frac{1}{\|\psi_k\|}(f, \phi_k),$$

где $\phi_k = \dfrac{\psi_k}{\|\psi_k\|}$. Поэтому

$$(f, \phi_k) = c_k\|\psi_k\|.$$

Поскольку система функций $\{\phi_k\}$ ортонормирована в $QL_2[a, b]$, то для коэффициентов Фурье по этой системе функций справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(f, \phi_k)^2 \le \|f\|^2.$$

Следовательно, для коэффициентов Фурье c_k по ортогональной системе функций $\{\psi_k\}$ имеем следующее неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\psi_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

В случае тригонометрической системы функций $\|\sin kx\|^2 = \|\cos kx\|^2 = \pi$, $\|1\|^2 = 2\pi$. Поэтому для функции $f \in QL_2[-\pi, \pi]$ неравенство Бесселя примет вид

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2\pi + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 \pi + b_k^2 \pi) \leq \|f\|^2,$$

или

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|^2.$$

ЛЕКЦИЯ 25

Полнота тригонометрической системы функций. Полнота систем из косинусов и синусов. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье. Комплекснозначные функции. Комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье

Пусть ряд
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$
является тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in QL_2[-\pi, \pi]$ и $S_n(x) = S_n(x, f) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — его n–я частичная сумма. Приведем без доказательства теорему о полноте тригонометрической системы функций.

Теорема 1. *Для каждой функции $f \in QL_2[-\pi, \pi]$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к f в пространстве $QL_2[-\pi, \pi]$, т.е.*
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x, f)|^2 \, dx \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Отсюда на основании теоремы 3 лекции 23 заключаем, что для любой функции $f \in QL_2[-\pi, \pi]$ выполняется равенство Парсеваля
$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Рассмотрим теперь систему функций $\{1, \cos x, \ldots, \cos kx, \ldots\}$. Как уже отмечалось, эта система функций является ортогональной в $QL_2[0, \pi]$. Докажем ее полноту в $QL_2[0, \pi]$.

Теорема 2. *Всякая функция $f \in QL_2[0, \pi]$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье по косинусам (по системе $\{\cos kx\}_{k=0}^{+\infty}$), сходящийся к ней в пространстве $QL_2[0, \pi]$:*
$$f(x) \overset{QL_2[0,\pi]}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx, \text{ где } a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$\|\cos kx\|^2 = \int_0^\pi \cos^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2kx)\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\|1\|^2 = \int_0^\pi dx = \pi,$$

то

$$a_k = \frac{1}{\|\cos kx\|^2}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx,\ k=1,2\ldots.$$

Положим

$$a_0 \doteq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx.$$

Тогда

$$\frac{1}{\|1\|^2}\int_0^\pi f(x)\cdot 1\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(0x)\,dx\right) = \frac{a_0}{2}.$$

Следовательно, ряд Фурье функции f имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx.$$

Обозначим через f^* четное продолжение функции f с $[0,\pi]$ $[-\pi,0)$. Очевидно, что f^* удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 2 лекции 23 $\Rightarrow$ существует функция $f^{**}\in QL_2[-\pi,\pi]$, отличающаяся от f^* не более чем в конечном числе точек (такими точками могут быть только 0 и $\pm\pi$). В случае $f^*\in QL_2[-\pi,\pi]$ будем считать, что $f^{**}=f^*$. Можно утверждать, что 1) функция f^{**} четная и 2) на $[0,\pi]$ функция f^{**} может отличаться от f не более чем в 2-х точках — нуле и π.

Пусть a_k^{**} и b_k^{**} — коэффициенты Фурье f^{**}. Используя формулы для коэффициентов Фурье четной функции, имеем

$$a_k^{**} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^{**}(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx = a_k,$$

(написанные интегралы равны, т.к. подынтегральные функции могут не совпадать лишь в конечном числе точек) и

$$b_k^{**} = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots .$$

Из совпадения коэффициентов Фурье функций f и f^{**} следует, что для $\forall x \in [0, \pi]$ и $\forall n \in \mathbf{N}$: $S_n(x, f) = S_n(x, f^{**})$ ($S_n(x, f)$ и $S_n(x, f^{**})$ частичные суммы рядов Фурье функций f и f^{**} соответственно). Тогда функции $f(x) - S_n(x, f)$ и $f^{**}(x) - S_n(x, f^{**})$ могут отличаться друг от друга на отрезке $[0, \pi]$ не более чем в конечном числе точек, что влечет совпадение интегралов от них по отрезку $[0, \pi]$. Теперь утверждение теоремы вытекает из следующей оценки для $\|f(x) - S_n(x, f)\|^2$:

$$\int_0^\pi |f(x) - S_n(x, f)|^2 \, dx = \int_0^\pi |f^{**}(x) - S_n(x, f^{**})|^2 \, dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^\pi |f^{**}(x) - S_n(x, f^{**})|^2 \, dx$$

и предыдущей теоремы, согласно которой $S_n(x, f^{**}) \overset{QL_2[-\pi,\pi]}{\to} f^{**}$.

Аналогичное утверждение справедливо и для ортогональной в $QL_2[0, \pi]$ системы функций $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin kx, \ldots\}$.

Теорема 3. *Всякая функция $f \in QL_2[0, \pi]$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье по синусам (по системе $\{\sin kx\}_{k=1}^{+\infty}$), сходящийся к ней в пространстве $QL_2[0, \pi]$:*

$$f(x) \overset{QL_2[0,\pi]}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx, \ \ \textit{где } b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения проводятся, как при доказательстве предыдущей теоремы. Только вместо четного продолжения функции f берется нечетное.

Свойства функции отражаются в ее коффициентах Фурье. Поэтому характер сходимости тригонометрического ряда Фурье функции должен определяться свойствами этой функции. В заключение приведем условия на функции, которые обеспечивают равномерную сходимость тригонометрических рядов Фурье (и абсолютную сходимость рядов из коэффициентов Фурье), и при которых возможно почленное дифференцирование тригонометрических рядов Фурье.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^1[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, a_k *и* b_k *— коэффициенты Фурье функции* f, *а* a'_k *и* b'_k *— коэффициенты Фурье ее производной* f'. *Тогда*

$$a_k = -\frac{b'_k}{k},\ b_k = \frac{a'_k}{k},\ k = 1, 2, \ldots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы интегрирования по частям имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi k}\left(f(x)\sin kx|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx\right) = -\frac{b'_k}{k},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx =$$

$$-\frac{1}{\pi k}\left(f(x)\cos kx|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx\right) = \frac{a'_k}{k}$$

(при получении последнего равенства воспользовались тем, что $f(-\pi) = f(\pi)$).

Лемма доказана.

Замечание. Если для функция f выполнены условия леммы 1, то a'_k и b'_k являются коэффициентами Фурье функции из $QL_2[-\pi,\pi]$. Действительно, при сделанных относительно функции f предположениях ее производная f' удовлетворяет условиям 1) и 2) определения кусочно непрерывной функции (см. лекцию 23). Тогда либо $f' \in QL_2[-\pi,\pi]$ и, стало быть, a'_k и b'_k являются коэффициентами Фурье функции из $QL_2[-\pi,\pi]$, либо $f' \notin QL_2[-\pi,\pi]$. В последнем случае f' отличается от функции из пространства $QL_2[-\pi,\pi]$ не более чем в конечном числе точек, а именно не более чем в двух точках $\pm\pi$. Так как a'_k и b'_k определяются через интегралы и, следовательно, не зависят от изменений подынтегральных функций в конечном числе точек, то a'_k и b'_k совпадают с коэффициентами Фурье функции из $QL_2[-\pi,\pi]$.

Теорема 4. *Если* $f \in C^1[-\pi,\pi]$ *и* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то*

1) *функция* f *разлагается в равномерно сходящийся к ней на* $[-\pi,\pi]$ *тригонометрический ряд Фурье;*

2) *сходится ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k| + |b_k|)$ *из абсолютных значений коэффициентов Фурье функции* f.

Доказательство. По теореме 2 лекции 23 ряд Фурье функции $f(x)$ поточечно сходится к ней на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall x \in [-\pi,\pi]$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Пусть a'_k и b'_k — такие же, как и в лемме 1.

Применяя элементарное неравенство $uv \leq \dfrac{1}{2}(u^2+v^2)$, получаем, что

$$\left|\frac{a'_k}{k}\right| \leq \frac{1}{2}\left({a'_k}^2 + \frac{1}{k^2}\right), \quad \left|\frac{b'_k}{k}\right| \leq \frac{1}{2}\left({b'_k}^2 + \frac{1}{k^2}\right) \tag{15}$$

В силу оценок (15) имеем

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| = \left|\frac{b'_k}{k}\right| + \left|\frac{a'_k}{k}\right| \leq \frac{1}{2}\left({a'_k}^2 + {b'_k}^2\right) + \frac{1}{k^2} \tag{16}$$

Ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty}({a'_k}^2 + {b'_k}^2) \text{ и } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

сходятся: первый в силу неравенства Бесселя (здесь воспользовались тем, что a'_k и b'_k являются коэффициентами Фурье функции из $QL_2[-\pi,\pi]$), а второй по интегральному признаку Коши.

Применяя признак Вейерштрасса (теорема 3 лекции 2), получаем, что тригонометрический ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx +$

$b_k \sin kx$ функции $f(x)$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к своей сумме, т.е. к функции $f(x)$.

Из (16) по признаку сравнения (теорема 5 лекции 1.44) следует сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k| + |b_k|),$$

т.е. ряд из коэффициентов Фурье функции $f(x)$ сходится абсолютно. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $f \in C[-\pi, \pi]$ *и* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Если, кроме того, функция* f *кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке* $[-\pi, \pi]$, *то утверждения теоремы остаются в силе.*

Доказательство. Из сделанных предположений следует, что ряд Фурье поточечно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$ и существует разбиение $T[-\pi, \pi] = \{x_i\}_{i=0}^m$, т.ч. сужения функции f на $[x_{i-1}, x_i]$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями (под производными в концевых точках понимаются односторонние производные). Представляя интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}$ как сумму $\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i}$, интегрируя по частям и приводя подобные, получим, что $a_k = -\dfrac{b'_k}{k}$, $b_k = \dfrac{a'_k}{k}$.

Как и в замечании, можно утверждать, что a'_k и b'_k являются коэффициентами Фурье функции из $QL_2[-\pi, \pi]$ (для этого, если это требуется, исправляем функцию $f'(x)$ как в точках $x = \pm\pi$, так и в точках x_i, $i = 1, \dots, m-1$). Тогда, как это было показано при доказательстве теоремы, из полученных соотношений для a_k, b_k, a'_k и b'_k следует равномерная сходимость ряда Фурье к $f(x)$ и абсолютная сходимость ряда из коэффициентов Фурье функции $f(x)$.

Теперь легко увидеть, при каких требованиях возможно почленное дифференцирование тригонометрических рядов Фурье. Согласно теореме 1 лекции 3 одним из условий, гарантирующим возможность почленного дифференцирования ряда, является равномерная сходимость ряда из производных. Для этого в силу признака Вейерштрасса достаточно, чтобы ряд из модулей коэффициентов Фурье производной сходился. Последнее будет выполнено, если $f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 7 (или ее следствия). Перейдем к точным формулировкам.

Лемма 2. *Пусть функция $f \in C^2[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $f'(-\pi) = f'(\pi)$.*

Тогда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(|ka_k| + |kb_k|\right),$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Поскольку $f'(x) \in C^1[-\pi,\pi]$ и $f'(-\pi) = f'(\pi)$, то как было показано в теореме 4 будет сходиться ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(|a'_k| + |b'_k|)$, где a'_k и b'_k — коэффициенты Фурье функции f'.

Так как $f(-\pi) = f(\pi)$, то согласно лемме 1 $a'_k = kb_k$, а $b'_k = -ka_k$. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|ka_k| + |kb_k|\right)$ сходится. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть функция $f \in C^2[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f можно почленно дифференцировать в том смысле, что*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\right),\ x \in [-\pi,\pi],$$

причем ряд сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Проверяем условия теоремы о почленном дифференцировании ФР (теорема 1 лекции 3) применительно к тригонометрическому ряду Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ функции f:

1) $(a_k \cos kx + b_k \sin kx)' = -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx \in C[-\pi,\pi]$.

2) Из теоремы 2 лекции 21 и условий следует, что тригонометрический ряд Фурье функции f на отрезке $[-\pi,\pi]$ сходится к f.

3) Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx$ сходится равномерно на отрезке $[\pi, \pi]$ на основании признака Вейерштрасса, ибо $|-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx| \leq |ka_k| + |kb_k|$, а ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} (|ka_k| + |kb_k|)$ сходится в силу леммы 2.

Поскольку все условия теоремы 1 лекции 3 выполнены, то теорема доказана.

Комплекснозначные функции

Далее придется рассматривать комплекснозначные функции действительной переменной. Вспомним, что множество комплексных чисел $\mathbf{C}$ является множеством всевозможных упорядоченных пар (x, y) действительных чисел, т.е. $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$. Поэтому всякая комплекснозначная функция g: $E \to \mathbf{C}$, $E \subset \mathbf{R}$, является вектор–функцией:

$$g(t) = (u(t), v(t)) = u(t) + iv(t),$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — действительная и соответственно мнимая части функции $g(t)$. Поэтому для комплекснозначных функций остается в силе вся теория, построенная для вектор–функций одной переменной. В частности, непрерывность (дифференцируемость) комплекснозначной функции равносильна непрерывности (дифференцируемости) ее действительной и мнимой частей.

Далее потребуется ввести интегралы от комплекснозначных функций действительной переменной.

Пусть g: $[a, b] \to \mathbf{C}$, т.е. $g(x) = u(x) + iv(x)$, где u, v: $[a, b] \to \mathbf{R}$.

Определение. *Комплекснозначная функция $g \in R[a, b]$, если ее действительная и мнимая части u, $v \in R[a, b]$. При этом*

$$\int_a^b g(x)\,dx \doteq \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Конечно, интеграл можно было ввести и с помощью интегральных сумм Римана.

Несобственные интегралы от комплекснозначных функций вводятся аналогичным образом как пара несобственных интегралов от действительной и мнимой частей функции.

Первообразная комплекснозначной функции определяется также, как и для действительнозначных функций. Функция $\Phi(t) = \lambda(t) + i\mu(t)$ называется первообразной функции $f(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ на промежутке Δ, если 1) $\Phi(t) \in D(\Delta)$ и 2) $\Phi'(t) = f(t)$ на Δ. Так как $\Phi'(t) = \lambda'(t) + i\mu'(t)$, то равенство $\Phi'(t) = f(t) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\Phi'(\mathrm{t}) = \alpha(\mathrm{t})$ и $\mathrm{Im}\Phi'(\mathrm{t}) = \beta(\mathrm{t})$, т.е. действительная и мнимая части функции $\Phi(t)$ являются первообразными действительной и мнимой частей функции $f(t)$. Поэтому если $f(t) \in C[a, b]$, то у нее существует первообразная $\Psi(t) = \eta(t) + i\theta(t)$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \alpha(t)\,dt + i\int_a^b \beta(t)\,dt =$$

$$\eta(b) - \eta(b) + i(\theta(b) - \theta(a)) = \Psi(b) - \Psi(a),$$

т.е. для комплекснозначных функций имеет место формула Ньютона–Лейбница.

Для интегралов от комплекснозначных функций остаются в силе формулы интегрирования по частям и замены переменной. Пусть $g_k(t) = \alpha_k(t) + i\beta_k(t) \in C^1[a, b]$, $k = 1, 2$. Тогда

$$\int_a^b g_1(t)g_2'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b (\alpha_1(t)\alpha_2'(t) - \beta_1(t)\beta_2'(t))\,dt + i\int_a^b (\alpha_1(t)\beta_2'(t) + \beta_1(t)\alpha_2'(t))\,dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям к слагаемым в действительной и мнимой частях, получим справедливость формулы интегрирования по частям для комплекснозначных функций

$$\int_a^b g_1(t)g_2'(t)\,dt =$$

$$(\alpha_1(t)\alpha_2(t) - \beta_1(t)\beta_2(t))\big|_a^b - \int_a^b (\alpha_1'(t)\alpha_2(t) - \beta_1'(t)\beta_2(t))\,dt +$$

$$i(\alpha_1(t)\beta_2(t)+\beta_1(t)\alpha_2(t))|_a^b - i\int_a^b (\alpha_1'(t)\beta_2(t)+\beta_1'(t)\alpha_2(t))\,dt =$$

$$g_1(t)g_2(t)|_a^b - \int_a^b g_1'(t)g_2(t)\,dt.$$

Формула замены переменной следует из ее справедливости для интегралов от действительной и мнимой частей комплекснозначной функции.

Примеры.

1. Найдем производную функции e^{iax} $(a,\ x\in\mathbf{R})$, где по определению $e^{iax} \doteq \cos(ax)+i\sin(ax)$. По свойствам производной вектор–функции имеем

$$(e^{iax})' = (\cos(ax)+i\sin(ax))' = (\cos(ax))' + i(\sin(ax))' =$$

$$-a\sin(ax)+ia\cos(ax) = ia(\cos(ax)+ia\sin(ax)) = iae^{iax}.$$

2. Сосчитаем $\int_a^b e^{itx}\,dx$, где t, $x\in\mathbf{R}$. Согласно предыдущему примеру функция $e^{itx}/(it)$ является первообразной функции e^{itx}. Поэтому

$$\int_a^b e^{itx}\,dx = \left.\frac{e^{itx}}{it}\right|_a^b = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}.$$

Комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье

Пусть f — действительнозначная абсолютно интегрируемая на $(-\pi, \pi)$ функция и a_k и b_k — ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе. Для перехода к комплексной форме записи тригонометрического ряда Фурье используется формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ x \in \mathbf{R},$$

из которой следует, что

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Используя эти формулы, преобразуем

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - ib_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} =$$

$$e^{ikx}\frac{a_k - ib_k}{2} + e^{-ikx}\frac{a_k + ib_k}{2} = c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx} \tag{17}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),\ k = 0, 1, \ldots$$

(поскольку f действительнозначная функция, то $a_k,\ b_k \in \mathbf{R} \Rightarrow c_{-k} = \bar{c}_k$). Отсюда

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt - i\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - i\sin kt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Аналогично,

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt$$

Следовательно, справедлива общая формула

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt,\ k \in \mathbf{Z}$$

Из (17) получаем, что

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Поэтому естественно определить ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ как последовательность $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)_{n=0}^{+\infty}$. А сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ в точке x понимать, как существование конечного предела $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$. Таким образом, тригонометрический ряд Фурье функции f может быть записан как

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},\ \text{где } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikt}\,dt.$$

Теорема о полноте тригонометрической системы функций примет вид: для всякой функции $f \in QL_2[-\pi,\pi]$:

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\| \to 0 \text{ при } n \to +\infty,\ \text{т.е. } f(x) \overset{QL_2[-\pi,\pi]}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

ЛЕКЦИЯ 26
Преобразование Фурье и его свойства.

Пусть действительнозначная функция f имеет конечное число особых точек на $\mathbf{R}$ и интегрируема по Риману на любом отрезке, не содержащем ее особых точек, причем НИ $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится. Множество всех таких функций обозначим $QL_1(\mathbf{R})$. Функции из $QL_1(\mathbf{R})$ называются абсолютно интегрируемыми на $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Преобразованием Фурье функции $f \in QL_1(\mathbf{R})$ называется функция*

$$\hat{f}(y) = (Ff)(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Обратным преобразованием Фурье функции f называется функция

$$\check{f}(y) = (F^{-1}f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\,dx.$$

Поскольку

$$\check{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix(-y)}\,dx = 2\pi\hat{f}(-y),$$

то свойства обратного преобразования Фурье аналогичны свойствам преобразования Фурье.

Замечание. $\hat{f}(y)$ является аналогом коэффициентов Фурье c_k по системе функций $\{e^{ikx}\}$.

По определению несобственного интеграла от комплекснозначной функции

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx.$$

Так как $f \in QL_1(\mathbf{R})$ и

$$|f(x)\cos(xy)| \le |f(x)|,\ |f(x)\sin(xy)| \le |f(x)|,$$

то по признаку сравнения несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$ сходятся (и даже абсолютно и равномерно). Следовательно, преобразование Фурье имеет смысл для функций из $QL_1(\mathbf{R})$.

Положим

$$f_c(y) \doteq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx \text{ и } f_s(y) \doteq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$$

Тогда

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2}\left(f_c(y) - if_s(y)\right)$$

(функции $f_c(y)$ и $f_s(y)$ являются аналогами последовательностей коэффициентов Фурье (a_k) и (b_k) соответственно).

Если функция $f \in QL_1(\mathbf{R})$ — четная, то $f_s(y) = 0$ и

$$f_c(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx.$$

Если функция $f \in QL_1(\mathbf{R})$ — нечетная, то $f_c(y) = 0$ и

$$f_s(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx,$$

Доказываются эти формулы так же, как и для коэффициентов Фурье.

Определение 2. *Для $g \in QL_1(0, +\infty)$ функции*

$$\widehat{g_c}(y) \doteq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} g(x)\cos(xy)\,dx \text{ и } \widehat{g_s}(y) \doteq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} g(x)\sin(xy)\,dx$$

называются соответственно косинус и синус–преобразованием Фурье функции g.

Свойства преобразования Фурье

Лемма. *Пусть* $f \in QL_1(\mathbf{R})$, $\psi(x,y) \in C(\Pi)$, *где* $\Pi = \{(x,y)|\ x \in \mathbf{R},\ y \in [c,d]\}$ *и существует постоянная* $M > 0$, *т.ч.* $\forall (x,y) \in \Pi$*:* $|\psi(x,y)| \le M$. *Тогда функция* $I(y) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x,y)\,dx \in C[c,d]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x,y)\,dx$ лемму достаточно доказать для $\int_0^{+\infty} f(x)\psi(x,y)\,dx$ (интеграл $\int_{-\infty}^0 f(x)\psi(x,y)\,dx$ рассматривается аналогично).

Из оценки $|f(x)\psi(x,y)| \le M|f(x)|$ и условий леммы следует, что НИ $\int_0^{+\infty} f(x)\psi(x,y)\,dx$ сходится абсолютно на отрезке $[c,d]$ (и даже равномерно).

Зададим $\varepsilon > 0$. Поскольку НИ $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то $\exists \eta_\varepsilon > 0$, т.ч.

$$\int_{\eta_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Рассмотрим замкнутый брус $\Pi_\varepsilon = \{(x,y)|\ 0 \le x \le \eta_\varepsilon,\ y \in [c,d]\}$. По условию $\psi \in C(\Pi_\varepsilon)$. Следовательно, согласно теореме Кантора функция ψ равномерно непрерывна на Π_ε. Значит, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall (x,y) \in \Pi_\varepsilon$ и $\forall \Delta y$ при условии, что $y + \Delta y \in [c,d]$:
$|\psi(x, y+\Delta y) - \psi(x,y)| < \varepsilon$. Тогда

$$|I(y+\Delta y) - I(y)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x)(\psi(x,y+\Delta y) - \psi(x,y))\,dx\right| \le$$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)||\psi(x,y+\Delta y) - \psi(x,y)|\,dx = \int_0^{\eta_\varepsilon} + \int_{\eta_\varepsilon}^{+\infty} \le$$

$$\int_0^{\eta_\varepsilon} |f(x)||\psi(x,y+\Delta y) - \psi(x,y)|\,dx + 2M\int_{\eta_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)|\,dx <$$

$$\varepsilon \int_0^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,dx + 2M\varepsilon \le \varepsilon \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx + 2M\varepsilon =$$

$$\varepsilon\left(\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx + 2M\right).$$

В силу произвольности ε лемма доказана.

Замечание. В отличие от теоремы 1 лекции 8 в лемме подынтегральная функция $f(x)\psi(x,y)$ не обязана быть непрерывной как функция двух переменных.

Теорема 1.

i) (линейность преобразования Фурье) Если $f,\ g \in QL_1(\mathbf{R})$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$ *произвольны, то*

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}, \quad \widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}.$$

ii) Если $f \in QL_1(\mathbf{R})$, *то ее преобразование Фурье* $\hat{f}(y)$ *является непрерывной и ограниченной на* $\mathbf{R}$ *функцией. Кроме того,* $\lim_{y\to\infty} \hat{f}(y) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Сразу следует из свойств несобственных интегралов.

ii) Из леммы следует, что функции $f_c(y)$ и $f_s(y)$ непрерывны на всяком отрезке числовой прямой и, следовательно, непрерывны на $\mathbf{R}$. Но тогда в силу критерия непрерывности вектор–функций и $\hat{f}(y) = \dfrac{1}{2}(f_c(y) - if_s(y)) \in C(\mathbf{R})$.

Из оценок $|f_c(y)|,\ |f_s(y)| \le \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$, справедливых для любых $y \in \mathbf{R}$ следует, что

$$|\hat{f}(y)| = \frac{1}{2}\sqrt{f_c^2(y) + f_s^2(y)} \le \frac{1}{2}\left(|f_c(y)| + |f_s(y)|\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

т.е. функция $\hat{f}(y)$ ограничена на $\mathbf{R}$.

Наконец, по теореме Римана (см. лекцию 21) $f_c(y)$ и $f_s(y)$ стремятся к нулю при $y \to \infty$. Поэтому на основании критерия существования предела вектор–функции и $\lim_{y\to\infty} \hat{f}(y) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^n(\mathbf{R})$, $n \ge 1$. *Если* $f, f', \ldots, f^{(n)} \in QL_1(\mathbf{R})$, *то*

$$\widehat{f^{(n)}}(y) = (iy)^n \hat{f}(y)$$

и существует постоянная $C = C(f, n) > 0$, т.ч. при $y \neq 0$

$$|\hat{f}(y)| \leq \frac{C}{|y|^n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала формулу для $n = 1$. По условию $f' \in QL_1(\mathbf{R}) \bigcap C(\mathbf{R})$. Поэтому $\forall x > 0$ согласно формуле Ньютона–Лейбница $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$ и тогда $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \to f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ при $x \to +\infty$, т.е. существует конечный $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Покажем, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Предположим противное, т.е. что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. Пусть для определенности $A > 0$. Тогда по лемме о знаке $\exists x_0 > 0$, т.ч. $\forall x > x_0$: $f(x) > A/2$. А это приводит к тому, что "хвост" несобственного интеграла $\int_{x_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx > A/2 \int_{x_0+1}^{+\infty} dx = +\infty$, что противоречит сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Аналогично доказывается, что $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Применяя теперь формулу интегрирования по частям и учитывая стремление к нулю функции $f(x)$ на бесконечности, получаем, что

$$\widehat{f'}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,df(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi}(f(x)e^{-ixy}|_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x)e^{-ixy}\,dx = iy\hat{f}(y).$$

Далее действуем по индукции

$$\widehat{f^{(n)}}(y) = (\widehat{f^{(n-1)}})'(y) = iy\widehat{f^{(n-1)}}(y) = iy(iy)^{n-1}\hat{f}(y) = (iy)^n\hat{f}(y).$$

Поскольку функция $\widehat{f^{(n)}}(y)$ ограничена как преобразование Фурье функции из $QL_1(\mathbf{R})$, то существует постоянная $C = C(f, n)$, т.ч. $|\widehat{f^{(n)}}(y)| \leq C$. Тогда из полученной формулы при $y \neq 0$ следует оценка $|\hat{f}(y)| \leq \dfrac{C}{|iy|^n} = \dfrac{C}{|y|^n}$. Теорема доказана.

Замечание. Поскольку $\widehat{f^{(n)}}(y) \to 0$ при $y \to \infty$, то $y^n \hat{f}(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C(\mathbf{R})$. *Если функции* $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x) \in QL_1(\mathbf{R})$, *то* $\hat{f}(y) \in C^n(\mathbf{R})$ *и* $(\hat{f})^{(n)}(y) = (-i)^n(\widehat{x^n f(x)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что к интегралу $\hat{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$ можно применить теорему о дифференцировании по параметру y

$$(\hat{f})'(y) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixy}\,dx = -i(\widehat{xf(x)}),$$

что даст утверждение теоремы при $n = 1$.

Так как $(\hat{f})'(y) = \dfrac{1}{2}(f_c'(y) - if_s'(y))$, то надо обосновать законность дифференцирования по параметру y НИ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$. Принадлежность $f(x)$ к $QL_1(\mathbf{R})$ влечет сходимость этих НИ. А из условий теоремы следует, что подынтегральные функции и их частные производные по y непрерывны на $\mathbf{R}^2$.

Далее остается проверить равномерную сходимость интегралов от $(f(x)\cos(xy))_y'$ и $(f(x)\sin(xy))_y'$. Из оценок $|xf(x)\cos(xy)|$, $|xf(x)\sin(xy)| \le |xf(x)|$ и того, что $xf(x) \in QL_1(\mathbf{R})$ по признаку Вейерштрасса заключаем, что НИ $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\cos(xy)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\sin(xy)\,dx$ сходятся равномерно на $\mathbf{R}$. Следовательно, все условия теоремы 3 лекции 8 о дифференцировании НИ по параметру выполнены и поэтому

$$\left(\hat{f}\right)'(y) = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\sin(xy)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\cos(xy)\,dx\right) =$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixy}\,dx = -i(\widehat{xf(x)})(y).$$

Законность последующих дифференцирований проверяется аналогично в силу наложенных на функцию f условий. Теорема доказана.

Примеры.

1) Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, если $|x| < a$ и $f(x) = 0$, если $|x| > a$. Эта функция нечетная $\Rightarrow$

$$\hat{f}(y) = -i\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx = -\frac{i}{\pi}\int_0^a \sin(xy)\,dx \overset{y\neq 0}{=}$$

$$\frac{i}{\pi y}\cos(xy)|_{x=0}^{a} = i\frac{\cos(ay)-1}{\pi y},\ \hat{f}(0) = 0.$$

2) Вычислим преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$. Поскольку f — четная функция, то

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a|x|}\cos(xy)\,dx \overset{y\neq 0}{=}$$

$$\frac{1}{\pi y}\left(e^{-ax}\sin(xy)|_{x=0}^{x=+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(xy)\,dx\right) =$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi y^2}}\left(e^{-ax}\cos(xy)|_{x=0}^{y=+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(xy)\,dx\right) =$$

$$\frac{a}{\pi y^2} - \frac{a^2}{\pi y^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(xy)\,dx.$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(xy)\,dx\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) = \frac{a}{\pi y^2}.$$

Следовательно,

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+y^2},\ \text{если } y \neq 0.$$

Отдельно вычислять $\hat{f}(0)$ нет необходимости. Поскольку и $\hat{f}(y)$, и функция $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+y^2}$ непрерывны на $\mathbf{R}$ и равны при $y \neq 0$, то они совпадут и в точке $y = 0$ (см. лемму 3 лекции 1.11). Значит, $\hat{f}(y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+y^2}$ для всех $y \in \mathbf{R}$.

Литература

[1] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа. 2004.

[2] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2. Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО. 2002.

[3] *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Тт. 1 и 2. 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.

Учебное издание

Кудрявцев Николай Львович

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ЧАСТЬ II

Подписано в печать 21.05.2021
Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Тираж 120 экз. Заказ № 99123

Отпечатано в типографии Onebook.ru
ООО "Сам полиграфист"
109 316 г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, к. 5
Тел. +7 495 545-37-10
E-mail: info@onebook.ru
Сайт: www.onebook.ru