МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ФУНКЦИИ ОЧЕНЬ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.А. Зорич
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Вводный обзор базисных идей и фактов
спецкурса
(2022 - 2023 учебный год)

Аннотация

Мы скажем, как
— статистическая термодинамика связана с многомерной геометрией,
— многомерная геометрия с явлением концентрации меры,
— явление концентрации меры с законом больших чисел и постоянством функций очень многих равноправных переменных.

Изложение будет идти в несколько ином порядке.

Мы начнём с многомерной геометрии и с явления концентрации меры.

Исходные наблюдения

Многомерная область и концентрация её объёма (меры) вблизи границы.

Например, если с тысячемерного арбуза, радиусом 1 метр, срезать корку, толщиной 1 сантиметр, то останется меньше тысячной доли исходного арбуза.

Очевидные, но уже нетривиальные следствии:

a) Неравенства и равенства с вероятностной точки зрения.

b) Функции на многомерном шаре, постоянные на границе.
(Значительно интереснее, что вообще регулярная функция на многомерном шаре постоянна с точки зрения наблюдателя. Об этом потом.)

c) Пересечение многомерных шаров и декодирование с малой вероятностью ошибки.
(Геометрическая составляющая теоремы Шеннона.)

Оценка доли отсекаемого объёма

Оценка доли $\frac{V_\delta}{V}$ объёма, отсекаемого от единичного шара в $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостью, отстоящей на расстояние δ от центра шара.

$\frac{V_\delta}{V} < \frac{1}{2}\frac{|B^n(\sqrt{1-\delta^2})|}{|B^n(1)|} = \frac{1}{2}(\sqrt{1-\delta^2})^n < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}$ при $|\delta| \le 1$.

Концентрация объёма шара в окрестности экваториальной гиперплоскости.

$$1 - 2\frac{V_\delta}{V} > 1 - e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \simeq 1$$

при $0 < \delta < 1$ и $n \gg 1$.

Концентрация объёма шара в окрестности медианного значения функции.

Оценка доли отсекаемой площади

Оценка доли $\frac{S_\delta}{S}$ площади, отсекаемой от единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостью, отстоящей на расстояние δ от центра сферы.

$$\frac{S_\delta}{S} = \frac{\frac{1}{n}1S_\delta}{\frac{1}{n}1S} < \frac{2V_\delta}{V} < e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \ .$$

Концентрация площади сферы у экваториального сечения при $n \gg 1$.

$$1 - 2\frac{S_\delta}{S} > 1 - 2e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \simeq 1 \ .$$

Ортогональность случайных единичных векторов пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \gg 1$:

$$\mathrm{Pr}_n\{| < v_1, v_2 > | > \delta > 0\} < \ 2e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}.$$

Изопериметрическое неравенство на сфере

Изопериметрическое неравенство на евклидовой сфере в форме, данной ему Леви, состоит в следующем.

Пусть A — множество на сфере, и A_δ — его δ — раздутие. Множество $A_\delta \setminus A$ назовём δ — воротником A.

Утверждается, что среди всех множеств A фиксированной площади, наименьшую площадь воротника имеет сферическая шапочка.

Медиана (медианное множество) на сфере

Множество M на сфере $\mathbb{S}^n$ называется медианным или просто медианой, если оно делит площадь сферы пополам.

Изопериметрическое неравенство Леви гарантирует, что площадь воротника медианного множества не меньше площади соответствующего воротника экватора.

Но это означает, что почти вся площадь многомерной сферы сосредоточена в окрестности любого медианного множества, как и около экватора.

Медиана (медианное значение) функции на сфере

Рассмотрим вещественнозначную функцию $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ на сфере.

Нормируем площадь сферы к единице, введя вероятностную меру μ, и обозначим через M_f такое число, для которого

$\mu\{x \in \mathbb{S}^n |\ f(x) \leq M_f\} \geq 1/2 \quad$ и $\quad \mu\{x \in \mathbb{S}^n |\ f(x) \geq M_f\} \geq 1/2.$

Его называют медианой или средним в смысле Леви значением функции $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$.

Если функция не константа, то, проще можно сказать, что медианное значение M_f функции — это такое значение, уровень которого является медианой сферы.

8 / 13

Концентрация меры и концентрация значений функции на многомерной сфере

Зная, что почти вся площадь многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности любой медианы сферы, например, в окрестности медианного уровня M_f функции $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, можно сказать, что, выбирая случайную точку сферы $\mathbb{S}^n$, мы с большой вероятностью попадём в малую окрестность уровня M_f.

Если исходная функция $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ в том или ином смысле регулярна, например, если она липшицева, то получаемое при таком случайном выборе аргумента $x \in \mathbb{S}^n$ значение функции $f(x)$ будет близко к значению M_f.

9 / 13

Конкретные оценки

Учитывая сказанное и полученные ранее оценки концентрации площади сферы у экватора (а на основании изопериметрического неравенства Леви) и в малой окрестности любой медианы многомерной сферы, можно предъявить следующие конкретные оценки.

Пусть μ — равномерная вероятностная мера на единичной сфере S^n, и пусть M_f — медианное значение функции $f \in \mathrm{Lip}(S^n, \mathbb{R})$, а L — константа Липшица относительно геодезической метрики на сфере.

Справедлива следующая оценка:

$$\mathrm{Pr}_n\{|f(x) - M_f| > \varepsilon\} < 2\ e^{-(\varepsilon/L)^2 n/2}.$$

При этом стандартное отклонение величины $|f(x) - M_f|$ от нуля, если $n \gg 1$, будет порядка $L/\sqrt{n}$.

В случае, когда функция f определена на сфере радиуса r, дробь ε/L заменится на ε/rL, а стандартное отклонение значений функции от M_f будет порядка $Lr/\sqrt{n}$.

Заключительные замечания (1)

Итак, в математическом плане мы описали вариант нелинейного закона больших чисел.

Мы пояснили, почему функции очень многих равноправных переменных имеют тенденцию казаться постоянными с точки зрения наблюдателя, измеряющего их значения при случайном выборе аргумента.

Заключительные замечания (2)

Как уже было сказано, в термодинамике это проявляется, например, в том всем знакомом явлении, что температура или давление в комнате удивительно постоянны, хотя они являются функциями огромного числа переменных — молекул.

Значительно более глубокое использование явления стабилизации значений функций очень большого количества равноправных переменных лежит, например, в самой основе данного Больцманом статистического определения энтропии состояния термодинамической системы.

Дальнейшие геометрические рассмотрения, связанные с проекцией многомерного шара или многомерной сферы на прямую, приводят к нормальному распределению вероятностной меры на прямой. Для термодинамики это даёт классическое распределение Максвелла.

12 / 13

Заключительные замечания (3)

Рассмотрим два шара одного радиуса, центры которых удалены друг от друга на расстояние радиуса. Пересечение таких трёхмерных шаров имеет объём, соизмеримый с объёмом самих шаров. Это нам привычно. Если же размерность евклидова пространства, в котором рассматриваются шары, очень велика, то объём этого пересечения ничтожно мал по сравнению с объёмом каждого шара.

Это одна из ключевых геометрических составляющих классической теоремы Шеннона о передаче информации по каналу связи при наличии помех.
Другая составляющая — упомянутая выше ортогональность случайных векторов многомерного евклидова пространства.

13 / 13