Н.Л. Кудрявцев

Лекции по математическому анализу. Часть I

2-е издание, переработанное

Рекомендовано Ученым советом
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия

Москва
2021

УДК 517
ББК 22.161
К88

Рецензент: доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Власов

Кудрявцев Н.Л.
К88 Лекции по математическому анализу. Часть I: Учебное пособие. — М.: ООО "Сам полиграфист" 2021. — 256 с.
ISBN 978-5-00166-338-6

Пособие включает элементы теории множеств, комплексные числа, теорию пределов последовательностей и функций, свойства непрерывных функций одной переменной, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, элементы теории метрических пространств, дифференциальное исчисление функций многих переменных и теорию числовых рядов. Пособие написано на основе лекций, читаемых автором более двадцати лет на геологическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова студентам, обучающимся по направлению "геофизика". Предназначено для студентов естественных факультетов университетов, а также для обучения специалистов по направлениям, требующим углубленной подготовки по высшей математике.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-00166-338-6 (Ч. I)
ISBN 978-5-00166-340-9 (общ.)

©Н.Л. Кудрявцев, 2021

Моим родителям посвящается.

Предисловие ко второму изданию

Учебное пособие является новым изданием книги автора "Лекции по математическому анализу", вышедшей в 2013 г. В новом издании переработано изложение некоторых вопросов, добавлены примеры и замечания, исправлены обнаруженные опечатки. Другие изменения носят характер редакторской правки. Автор благодарен геологическому факультету МГУ им. М.В. Ломоносова за поддержку, без которой эта книга не была бы издана.

Автор не возражает против копирования данной книги и ее распространения в печатной и электронной форме в неизменном виде в некоммерческих целях и с сохранением копирайта, принадлежащего автору.

Москва, 2021 год Н. Кудрявцев

Предисловие к первому изданию

Данная книга написана на основе лекций, читаемых автором в течение многих лет на геологическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова студентам, обучающимся по специальности "геофизика", и учебного пособия[1], которое подверглось существенной переработке. Объем настоящего издания продиктован программой, а также числом лекционных часов, и является одним из возможных вариантов изложение рассматриваемых разделов математического анализа, обычно изучаемых в течение первого года обучения. В зависимости от требований к математической подготовке некоторые вопросы и темы могут быть опущены или приведены без доказательств.

Пособие рассчитано на широкий круг читателей, в том числе и на тех, кому требуются углубленные знания по математическому анализу. В нем представлены основные понятия и факты, которые

[1]Кудрявцев Н.Л. "Лекции по математическому анализу. Семестр I." М.: Изд-во Московского университета. 2004.

могут быть востребованы в других разделах высшей математики и приложениях. Поэтому кроме традиционно включаемого материала в книге излагаются элементы теории абстрактных метрических пространств. В нее включено достаточно много примеров, которые должны помочь освоить основные понятия математического анализа. Приведенный список литературы не является полным. В нем отражены книги, оказавшие наибольшее влияние на автора.

Особенностью пособия является отсутствие рисунков. Это сделано намеренно, чтобы читатель, желающий разобраться в предмете, почувствовал необходимость иметь под рукой ручку и бумагу, без которых невозможна осмысленная работа с математической литературой. Отметим также, что определения предела функции, несобственного интеграла и числового ряда, данные в книге, отличаются от тех, что приводятся в большинстве отечественных учебников по математическому анализу.

В заключение хотелось бы выразить признательность рецензентам, замечания которых способствовали улучшению изложения материала, и высказать благодарность геологическому факультету МГУ имени М.В. Ломоносова, профинансировавшему издание настоящей книги.

Москва, 2013 год Н. Кудрявцев

Содержание

ЛЕКЦИЯ 1

Множества

Начнем с некоторых сведений о множествах и операциях над ними. Напомним, что под множеством понимается совокупность объектов любой природы. Эти объекты называются *элементами*, или *точками*, множества. Множество считается заданным, если для любого объекта можно проверить входит он в множество или нет.

Множества обозначаются прописными буквами A,B,..., а строчными a,b,... — их элементы. Символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ применяются для обозначения множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно.

Для принадлежности элемента x множеству A используется символ $\in$: $x \in A$. Если x не принадлежит множеству A, то пишут $x \notin A$.

Множества обычно задаются:

1) перечислением своих элементов $A = \{a, b, c, \ldots\}$.

2) с помощью некоторого условия, выделяющего его элементы среди элементов более широких множеств. Например, условие "все треугольники, у которых квадрат длины большей стороны равен сумме квадратов длин меньших сторон" в силу теоремы, обратной к теореме Пифагора, задает множество всех прямоугольных треугольников. Если множество A вводится с помощью некоторого условия "...", будем писать $A = \{x : " \ldots "\}$, или $A = \{x | " \ldots "\}$, что означает, что множество A состоит из элементов x, для которых выполняется условие "...".

Определение 1. *Множество A является подмножеством множества B (вложено в множество B), что записывается как $A \subset B$, если всякий элемент множества A принадлежит множеству B.*

Из определения следует, что $A \subset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут $A = B$.

Для удобства вводится пустое множество, которое обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество не содержит элементов.

Для сокращения записи вместо часто используемых слов и словосочетаний будем использовать символы:

– $\exists$ — "существует", "найдется";

– $\exists!$ — "существует (найдется) единственный", "существует (найдется) один и только один";

– $\forall$ — "любой", "каждый", "всякий", "произвольный", "для любого", "для всякого", "для каждого";

– $\Leftrightarrow$ — "равносильно", "эквивалентно", "то же самое", "тогда и только тогда, когда", "необходимо и достаточно, чтобы";

– $\doteq$ — "равно по определению", т.е. выражение, стоящее слева от этого знака определяется через правую часть равенства;

– $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ — "означает по определению";

Часто будет использоваться сокращение "т.ч." , означающее "такой(-ая, -ое, -ого), что", "такие(-их), что" в зависимости от контекста.

Высказывание "для каждого x, принадлежащего множеству E, выполняется предложение P" символически записывается как $\forall x \in E:\ P$. Соответственно запись $\exists y \in E$: Q значит, что найдется элемент y из множества E, для которого справедливо предложение Q.

Построим отрицание высказывания $\forall x \in E$: P. Оно означает, что не для всех $x \in E$ справедливо предложение P, т.е. можно предъявить элемент $x \in E$, для которого выполняется отрицание предложения P. Следовательно, искомое отрицание запишется так: $\exists x \in E$: $\bar{P}$, где $\bar{P}$ — отрицание предложения P.

Соответственно отрицание высказывания $\exists y \in E$: Q заключается в том, что не существует элементов y из множества E, для которых истинно предложение Q, т.е. для любого элемента множества E выполняется отрицание предложения Q. Поэтому искомое отрицание имеет вид $\forall y \in E$: $\bar{Q}$.

Пример. С использованием введенных символов определение подмножества выглядит следующим образом: $A \subset B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in A$: $x \in B$.

Операции над множествами

Определение 2. *Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \bigcup B$ и состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.*

Определение 3. *Пересечением (произведением) двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \bigcap B$ и состоящее из общих для этих множеств элементов.*

Таким образом,

$$A \bigcup B \doteq \{x |\ x \in A \text{ или } x \in B\}$$

(в этом определении союз "или" понимается не во взаимоисключающем смысле: элемент из объединения может принадлежать и A, и B),

$$A \bigcap B \doteq \{x |\; x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Эти определения распространяются на произвольные семейства (системы) множеств: если A_α, $\alpha \in I$ — некоторое семейство множеств, то

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \doteq \{x |\; \exists \alpha \in I, \text{ т.ч. } x \in A_\alpha\},$$

т.е. объединение множеств, входящих в семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному множеству данного семейства;

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \doteq \{x |\; \forall \alpha \in I\; x \in A_\alpha\},$$

т.е. пересечение множеств системы $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ состоит из элементов, общих для всех множеств рассматриваемой системы.

Примеры.

1) Пусть множество $I = \{1, 2\}$. Тогда $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \bigcup A_2$.

2) Если $A_k = \{k\}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$, а $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

Определение 4. *Разностью двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из точек множества A, не принадлежащих множеству B.*

Таким образом,

$$A \setminus B \doteq \{x |\; x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Определение 5. *Если $A \subset X$, то разность $X \setminus A$ называется дополнением множества A (дополнением к множеству A) в множестве X.*

Теорема 1(правила де Моргана). *Имеют место следующие формулы*

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha),$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое равенство. Пусть $x \in X \setminus (\bigcup_\alpha A_\alpha) \Rightarrow x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha$ и $x \in X \Rightarrow \forall\alpha$: $x \notin A_\alpha$ и $x \in X \Rightarrow \forall\alpha$: $x \in X \setminus A_\alpha \Rightarrow x \in \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha)$. Мы показали, что левое множество вложено в правое. Так как все рассуждения обратимы (на каждом шаге применялось соответствующее определение или его отрицание), то справедливо обратное включение. Тем самым первая формула доказана.

Второе равенство доказывается аналогично. Пусть $x \in X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow x \notin \bigcap_\alpha A_\alpha$ и $x \in X \Leftrightarrow \exists\alpha$, т.ч. $x \notin A_\alpha$, и $x \in X \Leftrightarrow \exists\alpha$, т.ч. $x \in X \setminus A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$. Теорема доказана.

Определение 6. *Пусть даны два множества A и B. Прямым произведением множеств A и B называется множество* $A \times B \doteq \{(x, y) |\, x \in A,\ y \in B\}$.

Таким образом, точками M множества $A \times B$ являются всевозможные упорядоченные пары (x, y), где $x \in A$ и $y \in B$. При этом точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Примеры.

1) Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Тогда $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

2) Рассмотрим плоскость Π с фиксированной декартовой системой координат. Точки P плоскости Π находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными парами (x, y) действительных чисел — координатами точки P. Поэтому прямое произведение $\mathbb{R}^2 \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) |\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ можно отождествить с декартовой плоскостью; прямое произведение отрезков $[a, b] \times [c, d]$ можно отождествить с прямоугольником декартовой плоскости.

Действительные числа

Из школьного курса математики известно, что для действительных чисел имеется четыре арифметические действия. Из них базовыми являются операции сложения и умножения. Перечислим их свойства.

1. Операция сложения: $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists! c \in \mathbb{R}$, которое называется суммой чисел a и b и обозначается $a+b$. При этом операция сложения обладает следующими свойствами:

i). $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$ (коммутативность).

ii). $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность).

iii). Существует число, называемое нулем и обозначаемое символом 0, т.ч. $\forall a \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a$.

iv). $\forall a \in \mathbb{R}$ существует противоположное число, обозначаемое $(-a)$, т.ч. $a + (-a) = 0$.

Число $a + (-b)$ называется разностью чисел a и b и обозначается $a - b$.

2. Операция умножения: $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists! c \in \mathbb{R}$, которое называется их произведением и обозначается ab. При этом операция умножения обладает следующими свойствами:

i). $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $ab = ba$ (коммутативность).

ii). $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность).

iii). Существует число, называемое единицей и обозначаемое символом 1, т.ч. $\forall a \in \mathbb{R}$: $1 \cdot a = a$.

iv). $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ существует обратное число, обозначаемое $\frac{1}{a}$, т.ч. $a\frac{1}{a} = 1$.

Число $a\dfrac{1}{b}$, где $b \neq 0$ называется частным от деления a на b и обозначается $a : b$, или $\dfrac{a}{b}$.

3. Связь операций сложения и умножения.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность).

Всякое множество, элементы которого удовлетворяют условиям 1-3, называется *полем.* Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и множество $\mathbb{R}$ действительных чисел являются полями.

4. Упорядоченность. Для действительных чисел определено отношение порядка: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ имеет место одно из соотношений: либо $a < b$, либо $b < a$. При этом отношение порядка обладает следующими свойствами:

i). $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность).

ii). $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a < b$, то $a + c < b + c$ (связь отношения порядка с операцией сложения).

iii). $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ (связь отношения порядка с операцией умножения).

Замечание. Свойства $4_i - 4_{iii}$ разумеется остаются в силе, если строгие неравенства заменить на нестрогие.

Множество действительных чисел обладает еще одним важным свойством, которое играет принципиальную роль в дальнейшей теории.

5. Непрерывность множества действительных чисел.

Пусть X и Y — произвольные непустые числовые множества, т.ч. $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq c \leq y$.

Замечание. Данная формулировка свойства непрерывности множества действительных чисел на первый взгляд представляется не слишком прозрачной. Другая более понятная формулировка будет приведена в лекции 4.

Пример.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является полем, но оно не обладает свойством непрерывности. Например, для множеств $A \doteq \{r \in \mathbb{Q}|\ r > 0$ и $r^2 < 2\}$ и $B \doteq \{r \in \mathbb{Q}|\ r > 0$ и $r^2 > 2\}$ не существует рационального числа, разделяющего эти множества. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ обладают свойством непрерывности, но не являются полями.

Выписанные свойства действительных чисел являются характеристическими, т.е. все остальные свойства действительных чисел следуют из них. Поэтому действительные числа можно ввести аксиоматически.

Определение 1. *Множество, состоящее более чем из одного элемента и обладающее свойствами 1-5, называется множеством действительных чисел, а каждый его элемент — действительным числом.*

Набор аксиом 1-5 однозначно задает множество действительных чисел с точностью до конкретной природы его элементов.

ЛЕКЦИЯ 2

Модуль (*абсолютная величина*) числа $a \in \mathbb{R}$:

$$|a| \doteq \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$|a| = \max(-a, a), \ |-a| = |a|$$

и справедливы неравенства

$$-a \leq |a|, \ a \leq |a| \text{ и } -|a| \leq a \leq |a|.$$

Лемма 1. *Для* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *имеют место следующие неравенства:*

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|,$$

называемые неравенствами треугольника.

Первое из них известно из школьного курса математики, но для полноты изложения приведем его доказательство. На основании свойства 4 пункт ii) действительных чисел $a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$, аналогично $-a-b \leq |a|-b \leq |a|+|b|$. Поэтому $\max(-(a+b), a+b) \leq |a| + |b|$, следовательно, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Докажем второе неравенство. Пусть даны произвольные числа a и b. Тогда $a = (a-b)+b$. Применяя первое неравенство, получим $|a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$. Аналогично используя представление $b = (b - a) + a$, приходим к неравенству $|b| - |a| \leq |b - a|$. Так как $|a-b| = |b-a|$, то $\max(|a|-|b|, -(|a|-|b|)) \leq |a-b|$. Лемма доказана.

Бином Ньютона и неравенство Бернулли

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $n! \doteq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! \doteq 1$ (таким образом, $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ и т.д.). Числа $C_n^k \doteq \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \geq k$, $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, называются *биномиальными коэффициентами*. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Лемма 2. *Для* $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ *биномиальные коэфициенты удовлетворяют равенству*

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Формула доказана.

Теорема 1(бином Ньютона). *Для любых действительных чисел a и b и произвольного натурального n*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = b^n + C_n^1 ab^{n-1} + \cdots + C_n^k a^k b^{n-k} + \cdots + a^n.$$

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно для $n = l$. Докажем, что тогда оно выполняется и для $n = l + 1$.

$$(a+b)^{l+1} = (a+b)^l(a+b) =$$
$$(C_l^0 a^0 b^l + C_l^1 a^1 b^{l-1} + \cdots + C_l^{l-1} a^{l-1} b^1 + C_l^l a^l b^0)(a+b) =$$
$$C_l^0 ab^l + C_l^1 a^2 b^{l-1} + \cdots + C_l^{l-1} a^l b + C_l^l a^{l+1} b^0 +$$
$$C_l^0 a^0 b^{l+1} + C_l^1 ab^l + \cdots + C_l^{l-1} a^{l-1} b^2 + C_l^l a^l b =$$

(приводим подобные)

$$(C_l^0 + C_l^1)ab^l + \cdots + (C_l^{l-1} + C_l^l)a^l b + C_l^l a^{l+1} b^0 + C_l^0 a^0 b^{l+1} =$$

(пользуемся леммой 2)

$$C_l^0 b^{l+1} + C_{l+1}^1 ab^l + \cdots + C_{l+1}^l a^l b + C_l^l a^{l+1}.$$

Поскольку $C_l^0 = C_{l+1}^0 = C_l^l = C_{l+1}^{l+1} = 1$, то в силу принципа математической индукции формула доказана.

Теорема 2(неравенство Бернулли). *Для любого действительного числа $a \geq -1$ и произвольного натурального n*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 1$ неравенство выполняется. Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т.е.

$(1 + a)^k \geq 1 + ka$. Покажем, что неравенство справедливо и для $n = k + 1$. Действительно,

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) = 1 + ka + a + ka^2$$

$$= 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$$

(сначала мы воспользовались предположением индукции, а затем отбросили неотрицательное слагаемое ka^2, уменьшив тем самым сумму). Неравенство доказано.

Некоторые подмножества множества действительных чисел

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* с началом в точке a и концом в точке b и обозначается $[a, b]$. Таким образом,

$$[a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Отрезок называется $[a, b]$ *невырожденным*, если $a < b$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* с началом в точке a и концом в точке b и обозначается (a, b). Таким образом,

$$(a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Множества чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x < b$ или неравенству $a < x \leq b$ называются *полуинтервалами* и обозначаются $[a, b)$ и $(a, b]$ соответственно. Таким образом,

$$[a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\ (a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Все эти множества называются *промежутками* множества действительных чисел $\mathbb{R}$ с концами в точках a и b. Точки x, т.ч. $a < x < b$, называются *внутренними точками* промежутка.

Для удобства множество действительных чисел дополняют элементами, обозначаемыми $-\infty$, $+\infty$ и ∞ (эти элементы не являются действительными числами). При этом по определению считается, что $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < +\infty$. Элементы $-\infty$, $+\infty$ и ∞ будем называть *бесконечно удаленными точками.*

С использованием бесконечно удаленных точек множества действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам вида $x < b$, $x \le b$, $x \ge a$ и $x > a$ можно записать в виде промежутков

$$(-\infty, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\},$$
$$(-\infty, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} |\ x \le b\},$$
$$(a, +\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} |\ x > a\},$$
$$[a, +\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} |\ x \ge a\}.$$

Геометрически множество действительных чисел изображается ориентированной прямой, а числа — точками этой прямой.

Окрестности точек и бесконечности в $\mathbb{R}$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. ε–*окрестностью* (или окрестностью радиуса ε) $U(a, \varepsilon)$ точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т.е.

$$U(a, \varepsilon) \doteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Наряду с буквой U для обозначения окрестностей используются и другие прописные буквы латинского алфавита. Иногда, указывая окрестности той или иной точки $U(a)$, $V(a)$ и т.д., радиусы будут опускаться.

ε–окрестности бесконечно удаленных точек определяются следующим образом ($\varepsilon > 0$):

$$U(-\infty, \varepsilon) \doteq (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}),\ U(+\infty, \varepsilon) \doteq (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty),$$
$$U(\infty, \varepsilon) \doteq (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \bigcup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty).$$

Если a конечная или бесконечно удаленная точка, то $U(a, \varepsilon_1) \subset U(a, \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Это сразу следует из определения этих окрестностей.

Проколотой ε–окрестностью точки a называется множество

$$\dot{U}(a, \varepsilon) \doteq U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Если $a \in \mathbb{R}$, то $\dot{U}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) \bigcup (a, a + \varepsilon)$. Для бесконечно удаленных точек их проколотые и непроколотые окрестности в $\mathbb{R}$ совпадают, ибо эти точки не принадлежат $\mathbb{R}$.

В дальнейшем под окрестностью точки (как конечной, так и бесконечной) будем понимать, если не оговорено противное, некоторую ε–окрестность.

ЛЕКЦИЯ 3

Комплексные числа

Предварительные соображения.

Расширим множество действительных чисел $\mathbb{R}$ до поля, в котором уравнение $z^2 = -1$ разрешимо. Предположим, что такое расширение найдено. Следовательно, имеется элемент, который обозначим символом i такой, что $i^2 = -1$. Поскольку построенное расширение является полем, содержащим $\mathbb{R}$, то неизбежно появятся числа вида ib и $a + ib$ (комплексные числа), где $a,\ b \in \mathbb{R}$. Причем

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + (ib_1 + a_2 + ib_2) = a_1 + (a_2 + ib_1 + ib_2) =$$

$$= a_1 + (a_2 + i(b_1 + b_2)) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

(сначала воспользовались ассоциативностью и коммутативностью сложения, затем применили дистрибутивность умножения, а в последнем равенстве — вновь ассоциативность); аналогично

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1a_2 + ib_1ib_2 =$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Заметим, что числа вида $a + ib$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$ и упорядоченные пары действительных чисел (a, b) находятся во взаимно однозначном соответствии. Поэтому написанные выше формулы подсказывают, как можно ввести операции сложения и умножения для упорядоченных пар, и тем самым реализовать комплексные числа как упорядоченные пары действительных чисел.

Итак, рассмотрим множество $\mathbb{R}^2 = \{z = (a, b)|\ a, b \in \mathbb{R}\}$ всевозможных упорядоченных пар действительных чисел и определим в нем операции сложения и умножения. Пусть $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ — произвольные элементы $\mathbb{R}^2$. Положим

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Покажем, что множество $\mathbb{R}^2$ с введенными операциями сложения и умножения является полем.

Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность операций доказывается непосредственной проверкой. Например, $z_1 + z_2 =$

$(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = z_2 + z_1$. Нулевым элементом является $(0,0)$, противоположным к $z = (a, b)$ будет $-z \doteq (-a, -b)$, т.к. $z + (-z) = (0, 0)$. Единицей является $(1, 0)$, т.к.

$$1 \cdot z = (1,0)(a,b) = (a - 0b, 0a + 1b) = (a,b).$$

Если $z \neq (0,0)$, то обратным элементом будет $1/z \doteq (a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$, т.к.

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Таким образом, множество $\mathbb{R}^2$ вместе с введенными операциями сложения и умножения является полем. Это поле называется *множеством комплексных чисел* и обозначается символом $\mathbb{C}$, а его элементы (упорядоченные пары действительных чисел) — комплексными числами.

Геометрически комплексные числа $z = (a, b)$ изображаются точками плоскости $\mathbb{R}^2$, называемой *комплексной плоскостью*, с координатами (a, b).

Действительной частью $\mathrm{Re}z$ комплексного числа $z = (a,b)$ называется a: $\mathrm{Re}z \doteq a$; *мнимой частью* $\mathrm{Im}z$ называется b: $\mathrm{Im}z \doteq b$.

Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Комплексные числа вида $(a, 0)$ отождествляются с действительными числами a, так как для них выполнены все свойства действительных чисел. Поэтому такие комплексные числа будем обозначать тоже через a: $a = (a, 0)$. Таким образом, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Числа вида $(0, b)$ называются *мнимыми*, а число $(0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается i: $i \doteq (0, 1)$.

Вычислим i^2. Имеем $i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. Далее, поскольку $ib = (0,1)(b,0) = (0\cdot b - 1\cdot 0, 0\cdot 0 + 1\cdot b) = (0, b)$, то $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib.$$

Полученная формула называется *алгебраической* формой записи комплексных чисел. Из нее следует, что $z = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z$.

Для $z = a + ib$ величина $|z| \doteq (a^2 + b^2)^{1/2}$ называется *модулем* комплексного числа z, а число $\bar{z} \doteq a - ib$ называется *комплексно сопряженным* с z. Очевидно, что $z\bar{z} = |z|^2$.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Зафиксируем на комплексной плоскости прямоугольную систему координат. Ось Ox будем называть *действительной* осью, а ось Oy — *мнимой* осью. Множество комплексных чисел $z = a+ib$ находится во взаимно однозначном соответствии с векторами плоскости, имеющими координаты a и b. Поэтому комплексные числа $z = a + ib$ можно рассматривать как радиус–векторы точек плоскости с теми же координатами. Длина такого вектора равна модулю комплексного числа. Операциям сложения и вычитания комплексных чисел соответствуют операции сложения и вычитания векторов. Отсюда следует справедливость неравенства $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ (геометрически это означает, что длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон). Как и в случае действительных чисел получаем, что $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ (геометрический смысл этого неравенства — разность длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны).

Радиус–вектор точки, отличной от начала координат, полностью определяется своей длиной и углом, образованным с положительным направлением действительной оси. Такая интерпретация комплексных чисел как радиусов–векторов приводит к еще одной форме записи комплексных чисел.

Определение 1. *Совокупность величин всех углов, образованных вектором $z \neq 0$ с положительным направлением действительной оси, называется аргументом комплексного числа z и обозначается* $\mathrm{Arg}z$ *(величины углов, отсчитываемые против часовой стрелки, считаются положительными; величины углов, отсчитываемые по часовой стрелке, считаются отрицательными). Каждый элемент этого множества называется значением аргумента числа z.*

Значение аргумента из полуинтервала $[0, 2\pi)$ (или $[-\pi, \pi)$) называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg z$. Таким образом,

$$\mathrm{Arg}z = \{\arg z + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \doteq \{\arg z + 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Множество $\mathrm{Arg}z$ полностью определяется любым своим элементом: если $\varphi \in \mathrm{Arg}z$, то $\mathrm{Arg}z = \{\varphi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Равенство $z_2 = z_1 \Leftrightarrow |z_2| = |z_1|$ и $\mathrm{Arg}z_2 = \mathrm{Arg}z_1$. Чтобы проверить последнее равенство, надо взять произвольные элементы $\varphi \in \mathrm{Arg}z_1$ и $\psi \in \mathrm{Arg}z_2$ и показать, что существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $\psi = \varphi + 2\pi n$.

Если $z = a + ib$, $r \doteq |z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, $\varphi \in \mathrm{Arg}z$, то из связи прямоугольной и полярной систем координат и 2π–периодичности синуса и косинуса следует, что $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, т.е.

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Обратно, если комплексное число записано в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$, то $|z| = r$, φ — одно из значений аргумента.

Замечание. Если $z = 0$, то имеет место очевидное равенство $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем φ можно выбирать произвольно.

Найдем произведение и частное двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда

$$zw = |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)) =$$

$$|z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Далее,

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{|w|(\cos\psi + i\sin\psi)} =$$

$$\frac{|z|}{|w|}\frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)} =$$

$$\frac{|z|}{|w|}\frac{\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} =$$

$$\frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)).$$

Из полученных формул следует, что

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$

т.е. модуль от произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а модуль от частного комплексных чисел — частному от модулей. Значения аргументов при умножении комплексных чисел складываются, а при делении — вычитаются.

В частности, если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ на основании формулы для произведения имеем

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

С другой стороны, в силу свойств умножения

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n.$$

Следовательно,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Полученная формула называется *формулой Муавра.*

Корень n–й степени из комплексного числа

Определение 2. *Число $w \in \mathbb{C}$ называется корнем n–й степени из числа $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, если $w^n = z$.*

Задача нахождения корней n–й степени из комплексного числа легко решается, если перейти к тригонометрической форме записи чисел. Пусть $z \neq 0$ и $z = |z|(\cos \arg z + i\sin \arg z)$, $w = |w|(\cos \arg w + i\sin \arg w)$. Выясним, какие значения может принимать $|w|$ и $\arg w$, чтобы имело место равенство $w^n = z$. В силу формулы Муавра имеем

$$|w|^n(\cos(n\arg w) + i\sin(n\arg w)) = |z|(\cos \arg z + i\sin \arg z).$$

Следовательно, $|w|^n = |z|$ и существует $k \in \mathbb{Z}$, т.ч. $n\arg w = \arg z + 2\pi k$, т.е. $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ и $\arg w = \dfrac{\arg z + 2\pi k}{n}$. Так как $0 \leq \arg w < 2\pi$, то k должно быть таким, чтобы имело место неравенство $0 \leq \dfrac{\arg z + 2\pi k}{n} < 2\pi$. Поскольку $\arg z \in [0, 2\pi)$, то это неравенство выполняется при $k = 0, 1 \ldots, n-1$. Итак, $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, а главное значение аргумента w может принимать одно из следующих n значений $\arg w = (\arg z + 2\pi k)/n$, $k = 0, 1 \ldots, n-1$. Таким образом, корень n–й степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет ровно n различных значений

$$\sqrt[n]{z} = \{\, \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right), k = 0, \ldots, n-1\}.$$

ЛЕКЦИЯ 4

Ограниченные и неограниченные множества

Определение 1. *Непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists b \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall a \in E$: $a \geq b$.*

Аналогично определяется ограниченность множества сверху:

Определение 2. *Непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists d \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall a \in E$ выполняется неравенство $a \leq d$.*

На числовой прямой точки ограниченного сверху множества располагаются левее некоторого числа d; точки ограниченного снизу множества располагаются правее некоторого числа b.

Определение 3. *Непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и снизу, и сверху.*

Итак, согласно определению множество E ограничено, если $\exists b, d \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall a \in E$: $b \leq a \leq d$, т.е. $E \subset [b, d]$. Короче говоря, множество ограничено, если оно содержится в некотором отрезке. Очевидно, что это равносильно тому, что $\exists c \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall a \in E$: $|a| \leq c$. Действительно, если $\forall a \in E$ выполняется неравенство $|a| \leq c$, то множество E содержится в отрезке $[-c, c]$, следовательно, оно ограничено. Обратно, если множество $E \subset [b, d]$, то положив $c = \max(|b|, |d|)$, получим, что $E \subset [-c, c]$, а это и означает, что $\forall a \in E$: $|a| \leq c$.

Написав отрицание того, что множество E ограничено (ограничено сверху, снизу) получим определение неограниченного (неограниченного сверху, снизу) множества:

Определение 4. *Непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ называется*

1) неограниченным, если $\forall c > 0\ \exists a \in E$: $|a| > c$;

2) неограниченным снизу, если $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists a \in E$: $a < b$;

3) неограниченным сверху, если $\forall d \in \mathbb{R}\ \exists a \in E$: $a > d$.

Верхняя и нижняя грани числовых множеств

Среди чисел, ограничивающих множество сверху (снизу), выделяют наименьшее (соответственно наибольшее) число.

Определение 5. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Наименьшее среди всех чисел, ограничивающих множество E сверху, называется верхней гранью множества E и обозначается $\sup E$.*

Для верхней грани множества E используются также обозначения $\sup_{x\in E}\{x\}$ или просто $\sup_{x\in E} x$.

Определение 6. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу. Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество E, называется нижней гранью множества E и обозначается* $\inf E$.

Для нижней грани множества E используются также обозначения $\inf_{x\in E}\{x\}$ или просто $\inf_{x\in E} x$.

Сформулируем эти определения в более удобном для использования виде. Пусть $M = \sup E$. По определению это означает, что

1)Число M ограничивает множество E сверху, т.е. $\forall x \in E$: $x \le M$.

2) Всякое число, меньшее M, уже не ограничивает E сверху, т.е. $\forall M' < M\ \exists x = x(M') \in E$, т.ч. $x > M'$.

Так как любое число, которое меньше M, можно записать как $M - \varepsilon$, где ε некоторое положительное число, то приходим к эквивалентной формулировке определения супремума:

число M называется верхней гранью множества E, если

1) $\forall x \in E$: $x \le M$,

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x = x(\varepsilon) \in E$, т.ч. $x > M - \varepsilon$.

Аналогично $m = \inf E$, если

1) $\forall x \in E$: $x \ge m$,

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x = x(\varepsilon) \in E$, *т.ч* $x < m + \varepsilon$.

Замечание. В пункте 2 определений супремума и инфимума условие "$\forall\varepsilon > 0$" можно заменить на "$\forall\varepsilon \in (0,\delta)$", т.е. получются равносильные определение супремума и инфимума, если брать не любые $\varepsilon > 0$, а ограничиться выбором ε из некоторого интервала $(0,\delta)$ с произвольным $\delta > 0$. Последнее означает, что содержательным в определениях является то, что ε можно брать сколь угодно малым.

Действительно, если выполняется старое определение, где ε произвольное положительное число, то тем более оно справедливо, если $\varepsilon \in (0,\delta)$. Обратно: пусть выполняется новое определение супремума с $\varepsilon \in (0,\delta)$. Покажем, что тогда выполняется и старое определение. В силу предположения для положительного числа $\delta/2\ \exists x^* \in E$, т.ч. $x^* > M - \delta/2$. Тогда $\forall\varepsilon \ge \delta$ справедливо неравенство $x^* > M - \delta/2 > M - \varepsilon$. Следовательно, в качестве соответствующего $x(\varepsilon)$ при $\varepsilon \ge \delta$ можно брать x^*. Таким образом, из нового определения следует старое.

Замечание. $\sup E$ и $\inf E$ единственны, если они существуют. Это сразу следует из определения.

Если у множества есть наименьший (наибольший) элемент, то он совпадет с его нижней (соответственно верхней) гранью. Однако не всякое множество действительных чисел имеет наибольший (наименьший) элемент. Так полуинтервал $[a, b)$ имеет наименьший элемент, равный a, но в этом множестве нет наибольшего элемента. Поэтому возникает вопрос о существовании верхней (нижней) грани данного множества.

Теорема 1. *Всякое непустое ограниченное сверху множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань; всякое непустое ограниченное снизу множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть множество E ограничено сверху. Обозначим через D множество всех чисел, ограничивающих E сверху. По условию $D \neq \emptyset$. Если $a \in E$, $b \in D$ – произвольны, то $a \leq b$. По свойству непрерывности действительных чисел $\exists c \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall a \in E$ и $\forall b \in D$: $a \leq c \leq b$. Следовательно, число c ограничивает множество E сверху и является наименьшим из таких чисел, т.е. $c = \sup E$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Пример. У всех 4–х множеств (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ нижней гранью является a, верхней гранью является b. Примеры этих множеств показывают, что верхняя и нижняя грани множества могут как принадлежать данному множеству, так и не принадлежать.

Замечание. Вернемся к обсуждению свойства непрерывности множества действительных чисел. Для множества действительных чисел, рассматриваемых как множество всевозможных десятичных дробей, нетрудно дать конструктивное доказательство существования верхней грани у ограниченного сверху множества, т.е. привести алгоритм построения верхней грани.

Доказанная выше теорема выводит свойство существования верхней грани из свойства непрерывности действительных чисел. Как оказывается (это несложно показать), из свойства существования верхней грани следует свойство непрерывности множества действительных чисел, т.е. эти свойства равносильны. Поэтому в качестве базового свойства действительных чисел вместо приведенного в лекции 1 можно было взять существование верхних граней у ограниченных сверху множеств, что является более наглядным и порзрачным свойством. Причина, по которой в лекции 1 было сделано по другому состоит в том, что в той формулировке не требуется предварительное введению нового понятия — верхней грани множества.

Если E не ограничено сверху, то по определению полагают $\sup E = +\infty$. Соответственно, если E не ограничено снизу, то полагают $\inf E = -\infty$.

Благодаря этому соглашению любое непустое множество действительных чисел имеет и верхнюю, и нижнюю грани.

Замечание. В силу вышесказанного непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу) тогда и только тогда, когда $\sup E < +\infty$ ($\inf E > -\infty$).

Лемма 1. *Пусть X и Y — непустые ограниченные множества действительных чисел.*

1) Если $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$: $x \le y$, то $\sup X \le \inf Y$.

2) Пусть $X + Y \doteq \{z \in \mathbb{R} : \ z = x + y, \ x \in X, \ y \in Y\}$ — арифметическая сумма множеств X и Y. Тогда

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y, \ \inf(X + Y) = \inf X + \inf Y,$$

или

$$\sup_{x \in X, y \in Y} \{x + y\} = \sup_{x \in X} x + \sup_{y \in Y} y, \quad \inf_{x \in X, y \in Y} \{x + y\} = \inf_{x \in X} x + \inf_{y \in Y} y.$$

3) Пусть $-X \doteq \{z \in \mathbb{R} : z = -x \, , x \in X\}$. Тогда

$$\sup(-X) = -\inf X, \ \inf(-X) = -\sup X.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in Y$ — произвольно. Тогда по определению супремума $\sup X \le y$. Отсюда по определению инфимума $\sup X \le \inf Y$.

Проведем доказательство второго пункта для супремумов. Пусть $z \in X + Y$, т.е. $z = x + y$. Так как $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$: $x \le \sup X$, $y \le \sup Y$, то $z \le \sup X + \sup Y$. Значит, число $\sup X + \sup Y$ ограничивает множество $X + Y$ сверху. Далее, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in X$, $\exists y_\varepsilon \in Y$: $x_\varepsilon > \sup X - \varepsilon$, $y_\varepsilon > \sup Y - \varepsilon$. Тогда $z_\varepsilon \doteq x_\varepsilon + y_\varepsilon \in X + Y$ и $z_\varepsilon > \sup X + \sup Y - 2\varepsilon$. Следовательно, $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Для инфимумов доказательство аналогично.

Третье равенство сразу же следует из определений sup и inf.

Теорема 2. *Множество натуральных чисел не ограничено сверху, т.е. $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $n > a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. что множество натуральных чисел ограничено сверху. Тогда у множества натуральных чисел существует конечная верхняя грань. Пусть $s \doteq \sup \mathbb{N}$. Так как $s - 1 < s$, то по определению супремума $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $n_0 > s - 1$. Но число $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ и $n_0 + 1 > s$. Значит, у множества $\mathbb{N}$ нет верхней грани, что противоречит утверждению теоремы 1. Следовательно, предположение об ограниченности множество натуральных чисел неверно. Теорема доказана.

Следствие(принцип Архимеда). *$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ $\exists n \in \mathbb{N}$, для которого выполняется неравенство $na > b$.*

Доказательство. Из доказанной теоремы следует, что для числа $\dfrac{b}{a}$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $n > \dfrac{b}{a}$, что равносильно утверждению следствия.

Принцип вложенных отрезков

Приведем две теоремы, связанные со свойством непрерывности множества действительных чисел, которые будут использованы в дальнейшем.

Определение 7. *Система числовых отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2 \ldots$, называется системой вложенных отрезков (СВО), если $\forall n \in \mathbb{N}$: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.*

Замечание. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — СВО. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$ и $b_{n+1} \leq b_n$. Покажем еще, что $\forall k, n \in \mathbb{N}$: $a_k \leq b_n$. Действительно, если $k \leq n$, то $a_k \leq \ldots \leq a_n \leq b_n$. Если $k > n$, то $a_k \leq b_k \leq \ldots \leq b_n$.

Теорема 3. *Всякая СВО имеет непустое пересечение, т.е. существует по крайней мере одна общая для всех отрезков точка.*

Доказательство. Введем множества $A \doteq \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ — левых концов отрезков, входящих в данную СВО, и $B \doteq \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ — правых концов. В силу замечания $\forall a_k \in A$ и $\forall b_n \in B$ выполняются неравенства $a_k \leq b_n$. Тогда по свойству непрерывности действительных чисел $\exists c \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall k, n \in \mathbb{N}$: $a_k \leq c \leq b_n$. В частности $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c \leq b_n$, т.е. $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Теорема доказана.

Определение 8. *СВО $\{[a_n, b_n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, называется стягивающейся, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $b_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$, т.е. в систему входят отрезки сколь угодно малой длины.*

Теорема 4. *Для всякой стягивающейся СВО $\{[a_n, b_n]\}$ существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам данной системы. При этом $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.*

Доказательство. Пусть $c, d \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $|c - d| \leq b_n - a_n$. Из этого неравенства и условий теоремы следует, что $\forall \varepsilon > 0$ выполняется оценка $|c - d| < \varepsilon$. Поэтому $c = d$ (если бы $c \neq d$, то для $\varepsilon \doteq \frac{|c-d|}{2}$ получили бы, что $|c - d| < \frac{1}{2}|c - d|$). Следовательно, $\exists!c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$. Далее, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c \leq b_n$, то число c ограничивает сверху множество $\{a_n\}$ и снизу множество $\{b_n\}$. В силу определения супремума и инфимума $\forall n \in \mathbb{N}$

справедливы неравенства

$$a_n \le \sup\{a_k\} \le c \le \inf\{b_k\} \le b_n.$$

Следовательно, числа $\sup\{a_k\}, \inf\{b_k\} \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. По доказанному выше они равны. Теорема полностью доказана.

Замечание. Для интервалов и полуинтервалов аналог принципа вложенных отрезков не имеет места. Например, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1/n) = \emptyset$.

ЛЕКЦИЯ 5

Конечные, счетные и несчетные множества

Прежде всего сформулируем, что понимается под выражениями "сосчитать элементы множества", "число элеметов множества", "бесконечное множество" и, как сравнивать по "количеству" элементов бесконечные множества. Для этого понадобится понятие взаимно однозначного соответстия.

Напомним, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, если

1) каждому элементу множества A сопоставлен только один элемент множества B

2) разным элементам множества A сопоставлены разные элементы множества B

3) каждому элементу из B был сопоставлен некоторый элемент из A.

Поскольку каждому элементу множества B можно поставить в соответствие тот элемент множества A, который был ему прежде сопоставлен и это соответствие также будет взаимно однозначным, то множества A и B в определении взаимно однозначного соответствия равноправны.

Мы имеем дело со взаимно однозначными соответствиями, когда присваиваем номера домам на данной улице, квартирам в доме, страницам в книге и т.д.

Определение 1. *Два множества A и B называются равномощными, или эквивалентными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. При этом пишут $A \sim B$.*

Так как множества A и B равноправны, то записи $A \sim B$ и $B \sim A$ равносильны.

Выделим базовые множества, с которыми будут сравниваться другие множества. К таким множествам отнесем отрезки натурального ряда вида $\{1, 2, \ldots, k\}$ $(k \in \mathbb{N})$, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и отрезок $[0, 1]$.

Определение 2. *Множество A называется конечным, если существует отрезок $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ натурального ряда такой, что $I_m \sim A$. Число m называется числом элементов (порядком) множества A.*

Пустое множество по определению считается конечным, число элементов пустого множества равно нулю.

Пусть множество A конечно, т.е. можно указать такой отрезок натурального ряда $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, что $I_n \sim A$. Это означает, что каждому номеру (натуральному числу) $k \in I_n$ сопоставлен единственный элемент множества A — обозначим его через a_k. При этом разные элементы из A получили разные номера и каждый элемент множества A приобрел свой номер. В этом случае говорят, что элементы множества A перенумерованы, или сосчитаны. Таким образом, множество A конечно тогда и только тогда, когда элементы множества A можно перечислить в порядке возрастания их номеров: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (порядок, конечно, зависит от выбора нумерации).

Определение 3. *Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным.*

Определение 4. *Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется счетным.*

Определение 5. *Конечные и счетные множества называются не более чем счетными множествами.*

Как и в случае конечных множеств, счетность множества B означает, что его элементы можно перенумеровать, используя уже не некоторый отрезок натурального ряда, а все натуральные числа. То, что элементы бесконечного множества перенумерованы (а это равносильно его счетности) отражают в записи $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$, или $B = \{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Определение 6. *Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным.*

Определение 7. *Множество A имеет мощность континуума, если $[0, 1] \sim A$.*

Принципиальное отличие конечных множеств от бесконечных состоит в том, что любое *собственное* подмножество (т.е. подмножество, не совпадающее с самим множеством) конечного множества не равномощно всему множеству. Для бесконечных множеств это не так: часть множества может быть эквивалентной всему множеству.

Примеры.

1) Множество четных натуральных чисел счетно, т.е. равномощно множеству натуральных чисел. Взаимно однозначное соответствие можно задать, например, следующим образом, сопоставив каждому натуральному числу n четное число $2n$: $n \to 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Интервал $(-1, 1)$ равномощен множеству всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Действительно, функция $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ определяет взаимно однозначное соот-

ветствие между этими множествами.

3) Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ — произвольны. Тогда $[a, b] \sim [0, 1]$. Действительно, с помощью сдвига, сопоставляющего точке $x \in [a, b]$ точку $y \in [0, b-a]$ по формуле $y = x - a$, и растяжения, переводящего точку $y \in [0, b-a]$ в точку $z \in [0, 1]$ по формуле $z = y/(b-a)$, получим взаимно однозначное соответствие $z = (x-a)/(b-a)$ между невырожденными отрезками $[a, b]$ и $[0, 1]$.

Свойства бесконечных множеств

Лемма 1. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть E — бесконечное множество $\Rightarrow E \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ по крайней мере один элемент множества E, который обозначим x_1. Так как E бесконечно, то $E \setminus \{x_1\}$ также бесконечно, т.е. содержит по крайней мере один элемент, который обозначим x_2. На n–м шаге выбираем элемент $x_n \in E \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ (зто возможно в силу бесконечности множества $E \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$). Продолжая этот процесс, получим множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, которое является искомым счетным подмножеством: оно бесконечно и его элементы перенумерованы.

Лемма 2. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Если исходное множество E счетно, то перенумеруем каким–либо образом его элементы: $E = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Пусть $A \subset E$ и A бесконечно. Произвольный элемент $a \in A$ является одновременно и элементом множества E, т.е. имеет некоторый номер как элемент счетного множества $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Поэтому, перебирая элементы множества E в порядке возрастания их номеров, на конечном шаге найдем первый среди элементов $x_1, x_2, \ldots$ элемент множества E, попадающий в A, т.е. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, т.ч. $x_1 \notin A, \ldots, x_{n_1-1} \notin A$, но $x_{n_1} \in A$ Обозначим его a_1: $a_1 \doteq x_{n_1}$. Теперь рассмотрим $A \setminus \{a_1\} \subset E$. Снова найдем первый среди элементов $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots$ элемент множества E, попадающий в множество $A \setminus \{a_1\}$. Пусть это будет x_{n_2}. Обозначим его a_2: $a_2 \doteq x_{n_2}$ и т.д. В результате этого процесса, каждый элемент множества A обретет свой номер, т.е. элементы множества A будут перенумерованы (если это не так, то $\exists a^* \in A$, $a^* \notin \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Но $a^* \in E \Rightarrow a^* = x_{n^*}$ и на конечном шаге, просматривая элементы E, мы бы встретили x_{n^*}). Значит, A счетно.

Замечание. Доказанные леммы показывают, что среди бесконечных множеств "минимальными" по мощности являются счетные множества.

Лемма 3. *Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму для счетного объединения. Пусть A_n, $n \in \mathbb{N}$, счетные множества. Выпишем элементы множеств $A_n, n = 1, 2, \ldots$:

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$
$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$
$\ldots$
$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}$
$\ldots$

Тогда все элементы объединения $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ можно перечислить, записав их в следующем порядке $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots\}$, пропуская уже встречавшиеся элементы (номера элементам объединения $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ присваиваются в соответствии с их местом в указанном списке). В результате все элементы множества $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ будут перенумерованы. Действительно, если взять произвольный элемент $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, то он лежит на одной из "диагоналей" $a_{1k}, \ldots, a_{k1}$. При перечислении элементов в соответствии с предложенным алгоритмом на конечном шаге этот элемент будет включен в список с соответствующим номером. Следовательно, множество $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ счетно.

Тот же алгоритм действует, если брать конечное объединение счетных множеств. Лемма доказана.

Замечание. Ту же схему можно применить, чтобы доказать 1) счетность счетного объединения не более чем счетных множеств (в случае конечности всех множеств из объединения надо дополнительно потребовать, чтобы множества попарно не совпадали) и 2) конечность конечного объединения конечных множеств.

Следствие 1. *Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Счетность $\mathbb{Z}$ вытекает из представления $\mathbb{Z} = \{0\} \bigcup (-\mathbb{N}) \bigcup \mathbb{N}$ множества целых чисел в силу леммы 3 (через $-\mathbb{N}$ обозначено множество отрицательных целых чисел). Следуя указанному в этой лемме способу нумерации, можно выписать все целые числа в следующем порядке $\{0, -1, -2, 1, -3, 2, \ldots, -n, n-1, \ldots\}$.

Следствие 2. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множества $A_n = \{\dfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$, $n = 1, 2, \ldots$. При каждом фиксированном n эти множества счетны, т.к. счетно множество целых чисел. Но тогда счетно и множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, ибо $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ есть счетное объединение счетных множеств.

Теорема. *Всякий невырожденный отрезок множества $\mathbb{R}$ несчетен.*

Доказательство. Предположим противное: пусть точки некоторого невырожденного отрезка $[a,b]$ можно занумеровать, т.е. $[a,b]=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$. Разделим отрезок на три равные по длине части и выберем тот отрезок, которому не принадлежит точка x_1. Обозначим этот отрезок $[a_1,b_1]$. Разделим $[a_1,b_1]$ снова на три части и выберем тот отрезок, которому не принадлежит x_2. Обозначим его $[a_2,b_2]$: $x_2\notin[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$. На n–м шаге мы делим отрезок $[a_{n-1},b_{n-1}]$ на три части и выбираем отрезок $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$, т.ч. $x_n\notin[a_n,b_n]$. Продолжая этот процесс, получим СВО $\{[a_n,b_n]\}$. При этом по построению $\forall n\in\mathbb{N}$: $x_n\notin[a_n,b_n]\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$: $x_n\notin\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$.

Согласно принципу вложенных отрезков $\exists c\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$. Но тогда $c\in[a,b]$. Так как все точки отрезка перенумерованы, то точка c должна иметь какой-то номер, т.е. $c=x_{n_0}\Rightarrow x_{n_0}\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$, но по построению $x_{n_0}\notin\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие (Кантор). *Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{R}$ счетно. Тогда счетно любое его бесконечное подмножество (лемма 2). В частности любой невырожденный отрезок счетен, что противоречит доказанной теореме. Следовательно, $\mathbb{R}$ несчетно.

ЛЕКЦИЯ 6

Предел последовательности

Определение 1. *Если каждому натуральному числу n сопоставлено действительное число — обозначим его a_n, то говорят, что задана числовая последовательность. Числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, называются членами последовательности.*

Для записи членов последовательностей обычно используются строчные буквы: a_n, b_k, α_m, β_l и т.д.

Последовательность с членами $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ обозначается $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, или просто (a_n).

Примеры.

1) $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots) = (1/n)_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность, n-й член которой $b_n = 1/n$.

2) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ последовательность с общим членом $x_n = (1 + (-1)^{n+1})/2$.

3) Числа Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ образуют последовательность, члены которой связаны соотношением $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$, $n \geq 2$.

4) Набор чисел $(1, 2, 2, 1)$ последовательностью не является.

5) Элементы счетного множества A можно выписать в виде последовательности $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, у которой все члены различны.

Предварим определение предела последовательности рассуждениями, объясняющими, как оно возникло.

Пусть задана последовательность $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Попытаемся придать точный математический смысл выражению "величины a_n стремятся к некоторому значению a при возрастании n". Оно подразумевает, что величины a_n принимают значения, сколь угодно близкие к a при увеличении n, т.е. расстояния от a_n до a становятся сколь угодно малыми при возрастании n. Последнее уже можно точно сформулировать: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $|a_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Теперь разберемся, что может происходить при дальнейшем возрастании номеров n. Возможны две ситуации:

1) существует бесконечно много номеров $n > n_\varepsilon$, т.ч. $|a_n - a| \geq \varepsilon$, т.е. имеются члены последовательности со сколь угодно большими номерами, отстоящие от точки a на расстояние, не меньшее $\varepsilon > 0$. Это не соответствует нашим представлениям о том, что члены a_n последовательности должны приближаться к a с возрастанием n. В этом случае естественно считать, что число a не является пределом последовательности $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$.

2) множество номеров $n > n_\varepsilon$, т.ч. $|a_n - a| \geq \varepsilon$ конечно или пусто. Пусть n'_ε — наибольший из этих номеров, если такие номера имеются, и $n'_\varepsilon = n_\varepsilon$ в противном случае. Тогда $\forall n > n'_\varepsilon$: $|a_n - a| < \varepsilon$, т.е. с увеличением номеров n члены последовательности (a_n) могут только приблизиться к a.

Итак, если для последовательности (a_n) для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ выполняется пункт 1), то естественно считать, что (a_n) не стремится к a при возрастании n. Если же $\forall \varepsilon > 0$ наблюдается ситуация, описываемая в пункте 2), то это вполне согласуется с представлениями о стремлении a_n к a. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 2. *Последовательность* (a_n) *сходится (стремится) к числу* a *при* $n \to +\infty$, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon$: $|a_n - a| < \varepsilon$. *При этом пишут* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, *или* $a_n \to a$ *при* $n \to +\infty$.

Переформулируем определение предела в терминах окрестностей:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{т.ч.}\ \forall n > n_\varepsilon :\ a_n \in U(a, \varepsilon).$$

Значит, последовательность (a_n) сходится к a тогда и только тогда, когда в любой заданный интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера $n_\varepsilon + 1$. А тогда вне любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ может находиться лишь конечное число членов последовательности. Верно и обратное, что если вне произвольной ε–окрестности числа a имеется лишь конечное число членов последовательности (это число зависит от рассматриваемой окрестности), то a является пределом последовательности.

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n$. Для $\varepsilon < 2$ в окрестностях $U(\pm 1, \varepsilon)$ содержится бесконечно много членов последовательности, но и вне их также находится бесконечно много членов последовательности. Следовательно, -1 и 1 не могут быть пределами рассматриваемой последовательности. Далее, у любого числа $a \neq \pm 1$ легко построить окрестность, не содержащую ни одного члена данной последовательности: достаточно взять $\varepsilon \doteq \min(|a-1|, |a+1|)$. Значит, никакое действительное число не является пределом исследуемой последовательности.

Дадим определение стремления последовательности к $-\infty$, $+\infty$ и ∞. Для этого в окрестностном определении предела надо заменить окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ на окрестность бесконечности со знаком или без него.

Определение 3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon :\ a_n \in U(-\infty,\varepsilon)$, *т.е.* $\forall n > n_\varepsilon : a_n \in (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ $(a_n < -1/\varepsilon)$.

Определение 4. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon :\ a_n \in U(+\infty,\varepsilon)$, *т.е.* $\forall n > n_\varepsilon : a_n \in (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ $(a_n > 1/\varepsilon)$.

Определение 5. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon :\ a_n \in U(\infty,\varepsilon)$, *т.е.* $\forall n > n_\varepsilon : a_n \in (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})\bigcup(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ $(|a_n| > 1/\varepsilon)$.

Очевидно, что равенство $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ равносильно тому, что $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Определение 6. *Последовательность, имеющая предел (конечный), называется сходящейся, т.е.* (a_n) *сходится* $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R}$, *т.ч.* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Определение 7. *Последовательность, пределом которой является бесконечность со знаком или без знака, называется бесконечно большой последовательностью (ббп).*

Наконец, сформулируем, что значит, что последовательность (a_n) расходится, т.е. что последовательность не имеет предела:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\varepsilon = \varepsilon(a) > 0, \text{ т.ч. } \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k > n :\ |a_k - a| \geq \varepsilon,$$

т.е. у любой точки числовой прямой имеется окрестность, в которую не попадают члены последовательности со сколь угодно большими номерами, что равносильно тому, что в эту окрестность не попадает бесконечно много членов последовательности.

Бесконечно большие последовательности согласно определению не являются сходящимися последовательностями.

Замечание 1. В определение предела условие "$\forall\varepsilon > 0$" можно заменить на "$\forall\varepsilon \in (0,\delta)$", где $\delta > 0$ произвольно. Если выполнено старое определение с условием "$\forall\varepsilon > 0$", то справедливо и новое с условием "$\forall\varepsilon \in (0,\delta)$". Если же определение предела выполняется с условием "$\forall\varepsilon \in (0,\delta)$", т.е. для указанных ε существуют соответствующие n'_ε, то старое определение также будет выполнено. Действительно, по условию для $\varepsilon = \delta/2\ \exists n'_{\delta/2}$, т.ч. $\forall n > n'_{\delta/2}$: $|a_n - a| < \delta/2$. Тогда для $\varepsilon \geq \delta$ положим $n_\varepsilon \doteq n'_{\delta/2}$. В этом случае $\forall n > n_\varepsilon$ справедлива оценка $|a_n - a| < \delta/2 < \varepsilon$. Значит, из нового определения следует старое.

Замечание 2. Последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1 = a_{k_0}, b_2 = a_{k_0+1}, \ldots, b_m = a_{k_0+m-1} \ldots$ сходятся или расходятся одновременно. В случае сходимости их пределы совпадают. Действительно, пусть (a_n) сходится, т.е. $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|a_n - a| < \varepsilon$. Тогда для $\forall m > m_\varepsilon$, где $m_\varepsilon \doteq \max(n_\varepsilon - k_0 + 1, 1)$ будет выполняться неравенство $|b_m - a| < \varepsilon$. Обратно: пусть последовательность (b_n) сходится к числу b $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m > m_\varepsilon$: $|b_m - b| < \varepsilon$. Поэтому если положить $n_\varepsilon \doteq m_\varepsilon + k_0 - 1$, то $\forall n > n_\varepsilon$: $|a_n - b| < \varepsilon$.

Таким образом, конечное число членов последовательности не влияет ни на ее сходимость, ни на значение предела.

Простейшие свойства предела

Определение 8. *Последовательность* (a_n) *называется*

1) ограниченной, если $\exists \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$, *т.ч.* $\forall n \in \mathbb{N}$: $\alpha \leq a_n \leq \beta$, *что равносильно тому, что* $\exists C > 0$, *т.ч.* $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq C$.

2) ограниченной снизу, если $\exists C_1 \in \mathbb{R}$, *т.ч.* $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq C_1$.

3) ограниченной сверху, если $\exists C_2 \in \mathbb{R}$, *т.ч.* $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq C_2$.

Очевидно, что ограниченность последовательности (a_n) равносильна тому, что последовательность ограничена и сверху, и снизу.

Теорема 1.

1) Если последовательность имеет предел, то он единствен.

2) Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

3) Если все члены последовательности равны между собой, то последовательность сходится.

4) Если последовательность (a_n) *сходится к числу* a, *то последовательность* $(|a_n|)$ *сходится к* $|a|$.

Доказательство. 1) Предположим, что последовательность (a_n) имеет два различных предела a и b. Возьмем непересекающиеся ε–окрестности $U(a)$ и $V(b)$ точек a и b (например, $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$). Тогда $\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n'_\varepsilon$: $a_n \in U(a)$ и $\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n''_\varepsilon$: $a_n \in V(b)$. Положим $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$. Тогда $\forall n > n_\varepsilon$ одновременно выполняются оба включения. Следовательно, $a_n \in U(a) \bigcap V(b) \ \forall n > n_\varepsilon$ — противоречие с тем, что по предположению $U(a) \bigcap V(a) = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает утверждение 1).

2) Пусть последовательность (a_n) сходится, т.е. $\exists a \in \mathbb{R}$, т.ч. $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$. Стало быть, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|a_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, и для $\varepsilon = 1 \ \exists n_1 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_1$: $|a_n - a| < 1$, т.е. $a - 1 < a_n < a + 1 \ \forall n > n_1$. Положим

$$d \doteq \max(|a_1 - a|, \ldots, |a_{n_1} - a|, 1).$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| \le d$, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$: $a - d \le a_n \le a + d$. Значит, последовательность (a_n) ограничена.

3) Пусть $a_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Так как $|a_n - a| = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\forall \varepsilon > 0$ положим $n_\varepsilon \doteq 1$. Тогда $\forall n > 1$: $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$. Стало быть, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

4) Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Это значит, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|a_n - a| < \varepsilon$. Применяя неравенство треугольника (см. лекцию 2), получим, что $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon$ для $\forall n > n_\varepsilon$. Следовательно, для последовательности $(|a_n|)$ выполняется определение сходимости к $|a|$ с тем же n_ε, что и для последовательности (a_n).

Замечание 3. Из сходимости последовательности из модулей не следует сходимость самой последовательности. Например, последовательность $a_n = (-1)^n$ расходится, а последовательность из модулей $|a_n| = 1$ сходится.

Лемма (о знаке). *Пусть* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \ne 0$. *Тогда* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_0$: $a_n > \frac{a}{2}$, *если* $a > 0$, *и* $a_n < \frac{a}{2}$, *если* $a < 0$.

Доказательство. В силу сходимости последовательности (a_n) для $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ $\exists n_0$, т.ч. $\forall n > n_0$: $a - \frac{|a|}{2} < a_n < a + \frac{|a|}{2}$. Если $a > 0$, то $a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2}$ и из левой части полученной оценки следует, что $a_n > \frac{a}{2}$ $\forall n > n_0$. Если $a < 0$, то $a + \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2}$ и из правой части той же оценки следует, что $a_n < \dfrac{a}{2}$ $\forall n > n_0$.

Замечание 4. В лемме о знаке утверждается, что, начиная с некоторого номера, члены сходящейся последовательности отделены от нуля (отстоят от нуля на расстояние, не меньшее некоторой положительной величины) и имеют знак предела, если последний отличен от нуля. В таком виде лемма справедлива и для бесконечно больших последовательностей, имеющих своим пределом бесконечность со знаком. Если последовательность сходится к бесконечности без знака, то и в этом случае члены последовательности будут отделены от нуля, начиная с некоторого номера, но они не обязаны иметь один и тот же знак.

ЛЕКЦИЯ 7

Бесконечно малые последовательности и их свойства

Определение 1. *Числовая последовательность* (α_n) *называется бесконечно малой последовательностью (бмп), если* $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$, *т.е.* $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon$: $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Очевидно, что (α_n) — бмп $\Leftrightarrow$ $(|\alpha_n|)$ — бмп.

Арифметические свойства бмп

Теорема 1. *Если* (α_n), (β_n) — *бмп,* (γ_n) — *ограниченная последовательность, то*

1) $(\alpha_n \pm \beta_n)$ — *бмп.*

2) $(\alpha_n\gamma_n)$ — *бмп.*

3) $(\alpha_n\beta_n)$ — *бмп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1). Так как (α_n) — бмп, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n'_\varepsilon$: $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как (β_n) — бмп, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n''_\varepsilon$: $|\beta_n| < \varepsilon$. Если положить $n_\varepsilon \doteq \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$, то для $n > n_\varepsilon$ выполняются оба написанные неравенства. Поэтому $\forall n > n_\varepsilon$: $|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ утверждение доказано.

2) По условию последовательность (γ_n) ограничена. Следовательно, $\exists C > 0$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{N}$: $|\gamma_n| < C$. Так как $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}$. Следовательно, $\forall n > n_\varepsilon$: $|\alpha_n\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{C}C = \varepsilon$, что и означает, что $(\alpha_n\gamma_n)$ — бмп.

3) Последовательность (β_n) как сходящаяся последовательность ограничена. Следовательно, по 2) $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n\beta_n = 0$.

Следствие. *Любая конечная сумма бмп — бмп, любое конечное произведение бмп — бмп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказывается следствие аналогично соответствующим утверждениям теоремы (можно также воспользоваться индукцией).

Лемма 1. *Если* (α_n) — *бмп и* $\forall n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n \ne 0$, *то* $(\frac{1}{\alpha_n})$ — *ббп.*

Если (β_n) — *ббп и* $\forall n \in \mathbb{N}$: $\beta_n \ne 0$, *то* $(\frac{1}{\beta_n})$ — *бмп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (α_n) — бмп. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|\alpha_n| < \varepsilon$. Следовательно, $\forall n > n_\varepsilon$: $|\frac{1}{\alpha_n}| > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $(\frac{1}{\alpha_n})$ — ббп.

Доказательство второй части проводится аналогично.

Примеры.

1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$. Нам надо для произвольного $\varepsilon > 0$ предъявить номер n_ε, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу неограниченности множества натуральных чисел $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Следовательно, $\forall n > n_\varepsilon$: $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ (в качестве n_ε годится любое натуральное число $> \frac{1}{\varepsilon}$, например, $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.)

2) Пусть $a > 1$. Тогда $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Покажем сначала, что множество $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено сверху. Предположим противное. Тогда $\sup_{n\in\mathbb{N}} a^n = s < +\infty$. Так как $a > 1$, то $\frac{s}{a} < s$. Следовательно, по определению супремума $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $a^{n_0} > \frac{s}{a}$, т.е. $a^{n_0+1} > s$ — противоречие с тем, что s является верхней гранью множества $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Итак, множество $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено сверху. Это значит, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a^{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\forall n > n_\varepsilon$ имеем $a^n > a^{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Применяя доказанное утверждение о связи ббп и бмп получаем, что $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a^n} = 0$.

То, что $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ можно показать, решив неравенство $a^n > 1/\varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что можно предъявить в качестве n_ε. Имеем $a^n > 1/\varepsilon \Leftrightarrow n > \log_a(1/\varepsilon)$. Из полученного неравенства легко видеть, что в качестве n_ε можно брать любое натуральное число, превосходящее $\log_a(1/\varepsilon)$. Действительно, если взять такое натуральное $n_\varepsilon > \log_a(1/\varepsilon)$, то для $\forall n > n_\varepsilon$: $a^n > a^{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$. Но такой способ доказательства опирается на знание функции логарифм. А в первоначальном доказательстве используется только ранее изложенный материал.

3) Для $\forall q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$: $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. Пусть $q \neq 0$. Тогда согласно примеру 2 последовательность $\left(\frac{1}{|q|^n}\right) = \left(\left(\frac{1}{|q|}\right)^n\right)$ является ббп $\Rightarrow (|q|^n)$ является бмп $\Leftrightarrow (q^n)$ — бмп. Если $q = 0$, то последовательность постоянна и утверждение следует из теоремы 1 из лекции 6.

Арифметические свойства предела последовательностей

Вспомним определение бмп: $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|\alpha_n| < \varepsilon$. Посмотрим теперь на определение предела:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a\ (a \in \mathbb{R})\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{т.ч.}\forall n > n_\varepsilon:\ |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

последовательность с общим членом $\alpha_n \doteq a_n - a$ является бмп.

Следовательно, справедливо утверждение:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a\ \Leftrightarrow\ \text{в представлении } a_n = a + \alpha_n$$

последовательность (α_n) является бмп.

Теорема 2. *Пусть* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$. *Тогда*

1) $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$, *т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n,$$

$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b$, *т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n,$$

2) $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = ab$, *т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} b_n,$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$, *т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

4) *если* $b \neq 0$, *то* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}.$$

Доказательство. 1) В силу сходимости последовательностей (a_n) и (b_n) имеем $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, где (α_n) и (β_n) — бмп. Поэтому $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = a + b + \gamma_n$, где $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ – бмп. Следовательно, $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Для разностей доказательство аналогично.

2) $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \underbrace{\alpha_n a + \beta_n b + \alpha_n \beta_n}_{\textit{бмп}} \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

3) Если ввести вспомогательную последовательность $b_n = \lambda\ \forall n \in \mathbb{N}$, то 3) сводится к 2), ибо постоянная последовательность сходится.

4) Из свойств предела следует, что $\lim_{n\to+\infty} |b_n| = |b|$, а т.к. по условию $b \neq 0$, то в силу леммы о знаке $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_0$: $|b_n| > \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow |\frac{1}{b_n}| < \frac{2}{|b|}$. Таким образом, при $n > n_0$ определено частное $\frac{a_n}{b_n}$, причем последовательность $(\frac{1}{b_n})$ ограничена $(n > n_0)$. Рассмотрим

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{bb_n} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{bb_n}.$$

В числителе дроби стоит бмп, а последовательность $(\frac{1}{bb_n})$ по доказанному ограничена. Следовательно, $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}$ – бмп и утверждение 4) доказано.

Если одна из двух последовательностей (a_n) или (b_n) сходится (пусть это будет (a_n)), а другая расходится, то последовательность $(a_n + b_n)$ расходится. Действительно, если бы последовательность с общим членом $c_n = a_n + b_n$ имела предел, то последовательность (b_n) сходилась бы как разность сходящихся последовательностей (c_n) и (a_n). Что касается последовательности $(a_n b_n)$, то она расходится при дополнительном предположении о том, что $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.

Предел и неравенства

Лемма 2(о зажатой последовательности). *Если* $\forall n \in \mathbb{N}$*:* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *и* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = d$ *(*d *может быть как конечным, так и бесконечным), то* $\lim_{n\to+\infty} b_n = d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n'_\varepsilon$, т.ч. $\forall n > n'_\varepsilon$: $a_n \in U(d, \varepsilon)$ и $\exists n''_\varepsilon$, т.ч. $\forall n > n''_\varepsilon$: $c_n \in U(d, \varepsilon)$. Пусть $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$. Тогда $\forall n > n_\varepsilon$: $a_n, c_n \in U(d, \varepsilon)$. Ввиду неравенства $a_n \leq b_n \leq c_n$ для $\forall n > n_\varepsilon$ имеем включение $b_n \in U(d, \varepsilon)$. Лемма доказана.

Теорема 3(переход к пределу в неравенствах). *Пусть* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. *Если* $\forall n \in \mathbb{N}$*:* $a_n \leq b_n$, *то* $a \leq b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. что $a > b$. Тогда согласно теореме 2 $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b > 0$. Следовательно, по лемме о знаке $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_0$: $a_n - b_n > 0$. Пришли к противоречию с условием теоремы, что ее и доказывает.

Замечание. Строгие неравенства при предельном переходе, вообще говоря, не сохраняются: $\frac{1}{n} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, но $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Монотонные последовательности

Определение 2. *Последовательность* (a_n) *называется возрастающей (убывающей), если* $\forall n \in \mathbb{N}$*:* $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$.

Обозначения: $a_n \uparrow$ (соответственно $a_n \downarrow$).

Если a_n имеет предел a (конечный или бесконечный), то пишут $a_n \uparrow a$ $(a_n \downarrow a)$ при $n \to +\infty$.

Определение 3. *Числовая последовательность* (a_n) *называется строго возрастающей (строго убывающей), если* $\forall n \in \mathbb{N}$*:* $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

Строго возрастающие последовательности обозначаются $a_n \uparrow\uparrow$, а строго убывающие — $a_n \downarrow\downarrow$. Запись $a_n \uparrow\uparrow a$ ($a_n \downarrow\downarrow a$) означает, что строго возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, равный a, который может быть как конечным, так и бесконечным.

Убывающие и возрастающие последовательности называются *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие – строго монотонными последовательностями.

Примеры. 1) $a_n = 1-\frac{1}{n} \uparrow\uparrow$. 2) $a_n = q^n \downarrow\downarrow$ при $0 < q < 1$. 3) $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ является как возрастающей, так и убывающей последовательностью. 4) Последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n$ не является монотонной.

Теорема 4(Вейерштрасс). *Всякая возрастающая последовательность* (a_n) *имеет предел: конечный, если она ограничена сверху, и, равный* $+\infty$*, если она не ограничена сверху. При этом* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_n a_n$.

Всякая убывающая последовательность (b_n) *имеет предел: конечный, если она ограничена снизу, и, равный* $-\infty$*, если она не ограничена снизу. При этом* $\lim_{n\to+\infty} b_n = \inf\limits_n b_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_n \uparrow$ и $\alpha = \sup a_n$ (значение α может быть как конечным, так и равным $+\infty$). Возьмем произвольную окрестность $U(\alpha)$ и пусть δ ее левый конец $\Rightarrow \delta < \alpha$. По определению супремума:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \le \alpha$ ($\alpha_n < \alpha$, если $\alpha = +\infty$)

2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_{n_0} > \delta$

В силу возрастания (a_n) $\forall n > n_0$: $\delta < a_{n_0} \le a_n \le \alpha$ ($a_n < \alpha$, если $\alpha = +\infty$). Так как $(\delta, \alpha] \subset U(\alpha)$ при $\alpha < +\infty$ и $(\delta, \alpha) = U(\alpha)$ для $\alpha = +\infty$, то $\forall n > n_0$: $a_n \in U(\alpha)$. Следовательно, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_n a_n$.

Для убывающих последовательностей доказательство аналогично.

Теорема 5(критерий сходимости монотонной последовательности). *Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности последовательность (a_n) возрастает. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_1 \le a_n$. Поэтому ограниченность возрастающей последовательности равносильна ее ограниченности сверху. Согласно теореме Вейерштрасса $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_n a_n$. Следовательно, предел конечен тогда и только тогда, когда $\sup_n a_n < +\infty$, т.е. когда последовательность (a_n) ограничена сверху.

Для убывающих последовательностей доказательство аналогично.

Число e

Рассмотрим две последовательности $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Очевидно, что $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $a_n \uparrow, b_n \downarrow$. Для этого оценим

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n =$$

$$\frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{n}{n^2}\right) =$$

$$\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n} = 1$$

(было применено неравенство Бернулли).

Далее,

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} =$$

$$\frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1.$$

(вновь было использовано неравенство Бернулли).

В силу возрастания (a_n) $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq a_1 = 2$, в силу убывания (b_n) $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n \leq b_1 = 4$. Так как $a_n < b_n$, то $\forall n \in \mathbb{N}$: $2 \leq a_n < b_n \leq 4$, т.е. эти последовательности ограничены. Следовательно, по теореме Вейерштрасса они сходятся. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot (1+\frac{1}{n})) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Этот общий для последовательностей (a_n) и (b_n) предел обозначают e. В частности, $\forall n \in \mathbb{N}$ число e удовлетворяет неравенствам $a_n \leq e \leq b_n$. Можно доказать иррациональность числа e.

ЛЕКЦИЯ 8

Подпоследовательности последовательностей

Пусть задана числовая последовательность (a_n). Возьмем строго возрастающую последовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и составим новую последовательность, состоящую из членов исходной последовательности с номерами n_k: (a_{n_k}), $k \in \mathbb{N}$. Полученная последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности (a_n). Таким образом, пропоследовательность (a_{n_k}) последовательности это новая последовательность с членами $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \ldots, b_k = a_{n_k}, \ldots$, при этом нижний индекс k в n_k указывает номер элемента подпоследовательности, а n_k является номером этого элемента как члена исходной последовательности.

Пример. Пусть $n_k = 2k$. Тогда $b_1 = a_2$, $b_2 = a_4$, $b_3 = a_6, \ldots, b_k = a_{2k}, \ldots$.

Теорема 1(Больцано–Вейерштрасс). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть (a_n) ограничена $\Rightarrow \exists\ \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \in [\alpha_0, \beta_0]$. В качестве первого члена искомой подпоследовательности можно взять любой член a_n данной последовательности. Пусть это будет a_{n_1}. Разделим отрезок $[\alpha_0, \beta_0]$ пополам. Тогда по крайней мере один из полученных отрезков — обозначим его через $[\alpha_1, \beta_1]$ — содержит бесконечно много членов рассматриваемой последовательности. Следовательно, $\exists n_2 > n_1$, т.ч. $a_{n_2} \in [\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha_0, \beta_0]$ и $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}$. Разделим теперь отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ на два равных отрезка и обозначим через $[\alpha_2, \beta_2]$ тот из них, которому также принадлежит бесконечно много членов последовательности (a_n) (такой отрезок всегда существует). Поэтому снова можно выбрать $n_3 > n_2$, т.ч. $a_{n_3} \in [\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ и $\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \frac{1}{2^2}(\beta_0 - \alpha_0)$ и т.д.

В результате этого процесса получим такие последовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и систему отрезков $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=0}^{+\infty}$, что $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_k, \beta_k] \subset [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ и $\beta_k - \alpha_k = \frac{1}{2^k}(\beta_0 - \alpha_0) \to 0\ (k \to +\infty)$.

Построенная система отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ является стягивающейся системой вложенных отрезков. Следовательно, $\exists! c \in [\alpha_k, \beta_k]\ \forall k \in \mathbb{N}$. При этом по теореме о стягивающейся СВО (см. лекцию 4) $\sup\limits_k \alpha_k = \inf\limits_k \beta_k = c$.

Поскольку последовательность $\alpha_k \uparrow$, а последовательность $\beta_k \downarrow$, то по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{k\to+\infty} \alpha_k = \sup\limits_k \alpha_k = c$, $\exists \lim_{k\to+\infty} \beta_k = \inf\limits_k \beta_k = c$. Так как по построению $\forall k \in \mathbb{N}$: $\alpha_k \le a_{n_{k+1}} \le \beta_k$, то согласно лемме о зажатой последовательности $\exists \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = c$. Теорема доказана.

Подпоследовательности неограниченных последовательностей

В теореме Больцано–Вейерштрасса речь идет об ограниченых последовательностях. Что можно сказать про неограниченные последовательности?

Лемма 1. *Из любой неограниченной сверху (снизу) числовой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую своим пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a_n) не ограничена сверху $\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$: $a_{n_1} > 1$. Последовательность $(a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots, a_{n_1+k}, \ldots)$ также не ограничена сверху $\Rightarrow \exists n_2 > n_1$: $a_{n_2} > 2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность номеров $n_k \uparrow\uparrow$, т.ч. $a_{n_k} > k$. Из этих неравенств следует, что $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = +\infty$ (действительно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $\forall k > k_\varepsilon$: $a_{n_k} > k > k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$).

Аналогично рассматривается случай последовательности, не ограниченной снизу.

Замечание. Если последовательность (a_n) — неограниченная, то она по крайней мере не ограничена либо сверху, либо снизу. Следовательно, любая неограниченная последовательность содержит ббп, причем ее всегда можно выбрать так, чтобы ее пределом являлась бесконечность со знаком.

Определение 1. *Предел, конечный или определенного знака бесконечный, подпоследовательности числовой последовательности называется частичным пределом этой последовательности.*

Примеры. 1) $a_n = (-1)^n$. Подпоследовательности $a_{2n-1} = -1$ и $a_{2n} = 1$ сходятся соответственно к -1 и 1. Следовательно, -1 и 1 являются частичными пределами данной последовательности.

2) $a_n = 2^{(-n)^n}$. Подпоследовательность $a_{2n} = 2^{(2n)^{2n}}$ стремится к $+\infty$, а подпоследовательность $a_{2n-1} = 2^{-(2n-1)^{2n-1}}$ стремится к нулю, т.е. 0 и $+\infty$ являются частичными пределами этой последовательности.

Замечание. Пусть (a_{n_k}) подпоследовательность последовательности (a_n). Если какое-то свойство выполняется для всех членов последовательности (a_n) с номерами $n > n_0$, то этим же свойством обладают все члены a_{n_k} подпоследовательности с номерами $k > k_0$. Как найти это k_0? Так как $n_k \uparrow\uparrow +\infty$, то $\exists k_0$, т.ч. $n_{k_0} > n_0 \Rightarrow \forall k > k_0$: $n_k > n_0 \Rightarrow \forall k > k_0$ члены a_{n_k} подпоследовательности обладают тем же свойством, что и a_n с номерами $n > n_0$.

Лемма 2. *Любая подпоследовательность последовательности, имеющей предел, также имеет предел, равный пределу самой последовательности.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ и (a_{n_k}) — произвольная подпоследовательность последовательности (a_n). Так как $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $a_n \in U(a,\varepsilon)$, то в силу замечания $\exists k_0$, т.ч. $\forall k > k_0$: $a_{n_k} \in U(a,\varepsilon)$, что означает справедливость леммы.

Пример. Еще раз покажем, что последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n$ не имеет предела. Действительно, если бы эта последовательность имела предел, то и всякая ее сходящаяся подпоследовательность имела бы тот же предел. Но подпоследовательность $a_{2k} = 1$ сходится к 1, а подпоследовательность $a_{2k-1} = -1$ имеет своим пределом -1. Следовательно, последовательность $(-1)^n$ расходится.

Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение 2. *Числовая последовательность (a_n) называется фундаментальной последовательностью, или последовательностью Коши, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч $\forall m,n > n_\varepsilon$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Это условие можно переписать в эквивалентном виде:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{т.ч.}\ \forall n > n_\varepsilon \text{ и } \forall p \in \mathbb{N}:\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Лемма 3. *Если последовательность имеет конечный предел, то она фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Это значит, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\forall n,m > n_\varepsilon$ имеем

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если последовательность (a_n) фундаментальна, то она ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a_n) фундаментальна. Следовательно, для $\varepsilon = 1$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n, m > n_1$: $|a_n - a_m| < 1$. В частности, для $m = n_1 + 1$ и $\forall n > n_1$: $|a_n - a_{n_1+1}| < 1$. Раскрывая модуль, получаем, что $\forall n > n_1$: $a_{n_1+1} - 1 < a_n < a_{n_1+1} + 1$. Полагая

$$C_1 \doteq \min\{a_{n_1+1} - 1, a_1, \ldots, a_{n_1}\},$$

$$C_2 \doteq \max\{a_{n_1+1} + 1, a_1, \ldots, a_{n_1}\},$$

приходим к тому, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $C_1 \leq a_n \leq C_2$, т.е. последовательность (a_n) ограничена.

Лемма 5. *Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и сама последовательность сходится к тому же пределу.*

Д о к з а т е л ь с т в о. Пусть (a_n) фундаментальна, а (a_{n_k}) ее сходящаяся подпоследовательность и $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности (a_n) $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n, m > n_\varepsilon$: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Как было показано ранее в замечании можно выбрать k_0 так, чтобы $\forall k > k_0$: $n_k > n_\varepsilon$. Тогда $\forall k > k_0$ и $\forall m > n_\varepsilon$: $|a_m - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

При каждом фиксированном $m > n_\varepsilon$ перейдем к пределу при $k \to +\infty$ в полученном неравенстве (это можно сделать на основании теоремы 2 из лекции 6) и получим, что $\forall m > n_\varepsilon$: $|a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает, что $\lim_{m\to+\infty} a_m = a$. Лемма доказана.

Теорема 2(критерий Коши). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы последовательность была фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость доказана в лемме 3. Докажем достаточность. Если последовательность фундаментальна, то по лемме 4 она ограничена. На основании теоремы Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Тогда согласно лемме 5 исходная последовательность тоже сходится. Теорема доказана.

Примеры.

1) Покажем расходимость последовательности $a_n = (-1)^n$, используя на этот раз критерий Коши. Для этого проверим, что для нее выполняется отрицание этого критерия, т.е. что $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k > n$ и $\exists m > n$: $|a_k - a_m| \geq \varepsilon$. В самом деле, для любых двух соседних членов a_k и a_{k+1} последовательности $|a_k - a_{k+1}| = 2$. Тогда положим $\varepsilon = 2$ и для заданного

произвольного натурального числа n в качестве k возьмем $n+1$, а m положим, равным $n+2$: $|a_{n+1}-a_{n+2}|=2$.

2) Докажем расходимость последовательности $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. Покажем, что эта последовательность не является фундаментальной, т.е., что $\exists \varepsilon>0$, т.ч. $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists n>k,\ \exists p\in\mathbb{N}$: $|a_{n+p}-a_n|\geq\varepsilon$. Оценим разность

$$|a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p}+\ldots+\frac{1}{n+p} = p\frac{1}{n+p}.$$

Пусть $p \doteq n$. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}$: $|a_{2n}-a_n|\geq\frac{1}{2}$. Следовательно, для рассматриваемой последовательности не выполняется критерий Коши. Поэтому она расходится. В то же время эта последовательность строго возрастает и, следовательно, по теореме Вейерштрасса имеет предел. По доказанному этот предел не может быть числом. Значит, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Заключение.

Теория предела последовательностей на языке теории множеств

В основе современных курсов математического анализа лежит теоретико-множественный подход. Именно с элементов теории множеств начинается его изучение. Вместе с тем существует некоторая традиция в изложении начал математического анализа, практически не использующая язык теории множеств. Посмотрим, как под этим углом зрения будет выглядеть теория пределов последовательностей.

При построении теории предела последовательностей были даны определения различных типов последовательностей: ограниченных, сходящихся, монотонных и т.д. С точки зрения теории множеств эти определения задают некоторые множества (классы) последовательностей. Перечислим часть из них:

– множество ограниченных последовательностей l_∞

– множество сходящихся последовательностей c

– множество бесконечно малых последовательностей c_0

– множество монотонных последовательностей m

– множество фундаментальных последовательностей f

Какой же теоретико-множественный смысл приобретают утверждения теории пределов? Начнем с простейших свойств предела. Сходимость постоянной последовательности говорит о том, что множество $c\neq\emptyset$. Вместе с примером расходящейся последовательности отсюда следует, что множество c является собственным подмножеством множества всех последовательностей s, т.е. $c\subset s$ и $c\neq s$.

Теоремы об арифметических свойствах предела — это утверждение о замкнутости множества c относительно арифметических операций. Утверждение о сходимости последовательности из модулей означает, что операция взятия модулей членов последовательности переводит множество c в себя.

Другие свойства множества c описываются через взаимосвязь с другими классами последовательностей, например, запись

– $c \subset l_\infty$ означает, что всякая сходящаяся последовательность ограничена

– $m \subset c \Leftrightarrow m \subset l_\infty$ является критерием сходимости монотонной последовательности

– $c = f$ — это критерий Коши сходимости последовательности

Таким образом, весь круг рассмотренных вопросов сводится к трем группам

1) нетривиальность введенного множества

2) внутренние свойства множества: замкнутость (инвариантность) относительно тех или иных операций

3) соотношения с другими множествами, которые позволяют получить дополнительные сведения о свойствах элементов изучаемого множества.

Кроме того, рассмотрение множества сходящихся последовательностей c позволяет говорить о пределе как об операторе, заданном на соответствующем классе. А тогда оправданы использования таких словосочетаний, как "свойства предела", "значение предела".

Эти простые наблюдения остаются актуальными при изучении любых других классов, вводимых в курсе математического анализа, и они позволяют раскрыть внутреннюю логику излагаемого теоретического материала.

ЛЕКЦИЯ 9

Функции (отображения)

Пусть даны непустые множества X и Y. Говорят, что на множестве X задана функция (отображение) f со значениями в множестве Y или, что задано отображение f множества X в множество Y, если каждому элементу $x \in X$ сопоставлен единственный элемент $y \in Y$, который обозначают $f(x)$. Таким образом, отображение множества X в множество Y это упорядоченная тройка (X, Y, f) (изменение любой компоненты этой тройки приводит к новому отображению). При этом пишут $X \xrightarrow{f} Y$, или $f\colon X \to Y$, или $y = f(x)$, $x \in X$ или $x \to f(x)$, $x \in X$. Для обозначения отображений используются и другие буквы, как правило, латинского или греческого алфавитов.

Замечание. Символом $f(x)$ часто обозначается не только значение функции в точке x, но и сама функция. Если $f(x)$ используется в качестве обозначения функции, то для значения этой функции в точке x_0 используется выражение $f(x)|_{x=x_0}$.

Множество X называют *областью определения* функции, а множество

$$Y_f \doteq \{y|\ \exists x \in X, \text{т.ч. } y = f(x)\}$$

называют *множеством значений* функции, или образом множества X при отображении f. Это множество также обозначают $f(X)$. Очевидно, что $Y_f \subset Y$.

Мы уже имели дело с функциями, рассматривая последовательности действительных чисел. В самом деле, любая последовательность $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ есть отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$: $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $a_n \doteq g(n)$.

Пусть множество $A \subset X$. Тогда функция f, рассматриваемая только на множестве A, называется *сужением* f на множество A и обозначается f_A.

Определение 1. *Если $Y_f = Y$, то отображение f называется сюръективным (сюръекцией).*

Таким образом, отображение по определению является сюръекцией, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X$: $y = f(x)$.

Определение 2. *Если $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение f называется инъективным (инъекцией).*

Определение 3. *Если отображение f является и сюръекцией, и инъекцией, то оно называется биективным (биекцией).*

Замечание. Если f — инъекция, то $f : X \longrightarrow Y_f$ является биекцией.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 4x + 6$, $x \in [-4, 0]$. Эта функция f: $[-4, 0] \to \mathbb{R}$. Выделив полный квадрат, убеждаемся, что $Y_f = [2, 6]$. Это отображение не является инъективным, т.к. $f(-4) = f(0) = 6$.

Если функция $f : X \to Y$ является биекцией, то она порождает отображение множества Y в множество X, которое сопоставляет элементу $y \in Y$ элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. Так как f сюръективно, то такой элемент x существует, а в силу инъективности f он единственный. Это отображение называется *обратным* по отношению к исходному отображению f и обозначается символом f^{-1}. Таким образом, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Из построения следует, что $f^{-1} : Y \to X$ является биекцией, а $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ совпадает с $f : X \to Y$, т.е. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ранее (см. лекцию 4) были введены взаимно однозначные соответствия. Очевидно, что понятие взаимно однозначного соответствия и биекции совпадают.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Тогда функция $h : X \to Z$, ставящая в соответствие элементу $x \in X$ элемент $h(x) \doteq g(f(x))$, называется *композицией* функций f и g, или *сложной* функцией, и обозначается $g \circ f$. Таким образом, $\forall x \in X \ (g \circ f)(x) \doteq g(f(x))$.

Для числовых функций f и g, т.е. для f, g: $E \to \mathbb{R}$, можно ввести арифметические операции, которые определяются поточечно:

$$(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) \doteq \lambda f(x)\,, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) \doteq f(x)g(x), \ (f/g)(x) \doteq f(x)/g(x), \ g(x) \neq 0.$$

Точки прикосновения множества, предельные и изолированные точки множества

Наша цель — дать определение предела функции в точке, т.е. сформулировать, что значит, что значения $f(x)$ некоторой функции стремятся к какому–то значению, когда аргумент x функции стремится к определенной точке a. При этом возникает естественный вопрос: если функция f задана на множестве E, то в каких точках a можно говорить о пределе функции? По смыслу, вкладываемому в словосочетание "аргумент x стремится к a", точка a должна быть такой, чтобы к ней можно было сколь угодно близко приблизиться по точкам множества E. Такие точки называются точками *прикосновения* множества E. Дадим их строгое определение.

Пусть дано множество $D \subset \mathbb{R}$.

Определение 1. *Точка a (конечная или бесконечно удаленная) называется точкой прикосновения множества D, если для любой окрестности $U(a)$ точки a пересечение $U(a) \bigcap D \neq \emptyset$, т.е. в произвольной окрестности точки a найдется по крайней мере одна точка множества E.*

Отметим, что любая точка множества является его точкой прикосновения.

Если же $a \notin D$, то наличие в произвольной окрестности $U(a)$ хотя бы одной точки множества D равносильно тому, что пересечение любой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a с множеством D не пусто.

Определение 2. *Точка a (конечная или бесконечно удаленная) называется предельной точкой множества D, если для любой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a пересечение $\dot{U}(a) \bigcap D \neq \emptyset$.*

Множество предельных точек множества D обозначается D'.

Определение 3. *Точка $a \in D$ называется изолированной точкой множества D, если существует окрестность $O(a)$ точки a, т.ч. пересечение $O(a) \bigcap D = \{a\}$.*

Из приведенных определений следует, что точка прикосновения множества является либо предельной, либо изолированной точкой этого множества. Следовательно, множество точек прикосновения множества совпадает с объединением его предельных и изолированных точек.

Лемма 1. *Следующие три утверждения эквивалентны*

1) *$a \in E'$;*

2) *существует последовательность $(x_n) \subset E$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq a$ и $x_n \to a$ при $n \to +\infty$;*

3) *любая окрестность точки a содержит бесконечно много элементов множества E, т.е. $\forall U(a)$ множество $U(a) \bigcap E$ — бесконечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1)$\Rightarrow$2): пусть $|a| < +\infty$. По условию для $\delta_1 = 1$ множество $\dot{U}(a, \delta_1) \bigcap E \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in \dot{U}(a, \delta_1) \bigcap E$, $x_1 \neq a$. По той же причине для $\delta_2 \doteq \min(1/2, |x_1 - a|)$ $\exists x_2 \in \dot{U}(a, \delta_2) \bigcap E$. По построению $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq a$. На n-м шаге для $\delta_n \doteq \min(1/n, |x_{n-1} - a|)$ $\exists x_n \in \dot{U}(a, \delta_n) \bigcap E$.

При этом по построению $x_n \neq x_{n-1}$ и $x_n \neq a$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $(x_n) \subset E \setminus \{a\}$ с попарно различными членами и сходящуюся к a (сходимость x_n к a следует из неравенства $|x_n - a| < 1/n$ и леммы о зажатой последовательности).

Теперь рассмотрим случай $a = +\infty$ (случаи $a = -\infty$ и $a = \infty$ разбираются аналогично). Так как в любой окрестности точки $a = +\infty$ имеется по крайней мере одна точка множества E, то существует последовательность $(x_n) \subset E$, т.ч. $x_1 > 1$, $x_n > \max(x_{n-1}, n)$. По построению члены этой последовательности попарно различны и $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n > n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

2) $\Rightarrow$ 3): по условию $\exists (x_n) \subset E \setminus \{a\}$, т.ч. $x_n \to a$ $(n \to +\infty) \Rightarrow$ $\forall U(a)$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_0$: $x_n \in \dot{U}(a)$, т.е. $\forall \dot{U}(a)$: $\dot{U}(a) \bigcap E \neq \emptyset$. Следовательно, как показано выше при доказательстве импликации 1)$\Rightarrow$2), можно построить последовательность $(y_n) \subset E \setminus \{a\}$ с попарно различными членами, стремящуюся к a при $n \to +\infty$. Тогда $\forall U(a)$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > m_0$: $y_n \in U(a) \bigcap E$. Значит, бесконечное множество $\{y_{m_0+1}, y_{m_0+2}, \ldots\} \subset U(a) \bigcap E \Rightarrow \forall U(a)$ множество $U(a) \bigcap E$ бесконечно.

3)$\Rightarrow$ 1): поскольку любая окрестность точки a содержит бесконечно много элементов множества E, то в любой окрестности этой точки имеется элемент множества E, отличный от a. Лемма доказана.

Лемма 2. *Точка a (конечная или бесконечно удаленная) является точкой прикосновения множества E тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n) \subset E$, т.ч. $x_n \to a$ при $n \to +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a является точкой прикосновения множества E. Тогда она либо предельная, либо изолированная точка множества E. В первом случае существования последовательности доказано в лемме 1. Во втором случае в качестве последовательности (x_n) можно взять постоянную последовательность, положив $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Обратно, если существует указанная последовательность, то из определения предела следует, что в любой окрестности точки a имеется член последовательности $(x_n) \Rightarrow$ по крайней мере один элемент множества E содержится в произвольной окрестности точки a. Лемма доказана.

Примеры.

1. $E = \{1\}$ — одноэлементное множество. Тогда $E' = \emptyset$, точка 1 является и изолированной, и точкой прикосновения множества E.

2. $E = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $E' = \{0\}$, т.е. предельная точка множества не обязана принадлежать ему. Любая точка множества E является его изолированной точкой.

3. $E = [0, 1)$. Тогда $E' = [0, 1]$ и, следовательно, $E \subset E'$.

4. $E = [0, 1]$. Тогда $E' = [0, 1] = E$.

5. $E = [0, 2] \bigcup \{3\}$. Точка 3 является изолированной точкой множества E и, следовательно, не является предельной точкой этого множества. Значит, $E' = [0, 2] \subset E$.

6. $E = (-\infty, +\infty)$. Тогда $E' = (-\infty, +\infty) \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{\infty\}$.

ЛЕКЦИЯ 10

Предел и непрерывность функции в точке

Определение предела функции в точке a можно вывести аналогично тому, как это было сделано для предела последовательности. Не будем останавливаться на этих рассуждениях и сразу приведем определение предела через окрестности точек. Такое определение универсально: оно имеет один и тот же вид независимо от того, берется ли предел в конечной точке или в бесконечности со знаком или без знака, конечна или бесконечна величина предела. Пусть f: $E \to \mathbb{R}$, a — точка прикосновения множества $E \subset \mathbb{R}$ (a может быть как конечной точкой, так и бесконечно удаленной).

Определение 1. *Величина b (число или бесконечность со знаком или без) называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при x стремящемся к a), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a, \delta) \cap E$: $f(x) \in V(b, \varepsilon)$.*

Символически это записывается, как $\lim_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ $(x \to a)$. Если важно отметить, на каком множестве рассматривается функция, то пишут $\lim_{x \to a,\ x \in E} f(x) = b$ и этот предел называют также пределом функции f в точке a по множеству E. Если не оговаривается противное, то предел в данной точке берется по множеству, на котором задана функция.

Очевидно, что если функция f имеет предел в точке a по множеству E, то для любого подмножества D множества E сужение f_D функции f на множество D также имеет предел в точке a, равный пределу исходной функции f, при условии, что точка a остается точкой прикосновения и для множества D. Действительно, пусть $\lim_{x \to a,\ x \in E} f(x) = b$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists$ окрестность $U(a, \delta)$ точки a, т.ч. $\forall x \in U(a, \delta) \cap E$: $f(x) \in V(b, \varepsilon)$. Поскольку $U(a, \delta) \cap D \subset U(a, \delta) \cap E$, то и $\forall x \in U(a, \delta) \cap D$: $f(x) \in V(b, \varepsilon) \Rightarrow \exists \lim_{x \to a,\ x \in D} f(x) = b$.

Пусть a, $b \in \mathbb{R}$ (естественно предполагается, что a является точкой прикосновения множества E). Перепишем в этом случае определение предела на $\varepsilon - \delta$ языке.

Определение 2(Коши). *Число b является пределом функции $f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x \in E$, $|x - a| < \delta$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Более общее определение 1 также будем называть определением по Коши.

Пример. Покажем, что для функции $f(x) = x$ ее предел $\lim_{x\to a} f(x) = a$, т.е. что $\lim_{x\to a} x = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Нам надо указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы из неравенства $|x - a| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$. Очевидно, что в качестве δ можно взять любое положительное число, не превосходящее ε, например, $\delta = \varepsilon$. Доказанное равенство показывает, что когда берется предел некоторой функции при x, стремящимся к a, ее аргумент x как функция стремится к a. Это требование в соответствующем виде присутствует в определении предела по Гейне, которое будет дано ниже.

Рассмотрим подробнее случай, когда точка a, в которой берется предел, принадлежит области определения E функции f.

Лемма 1. *Пусть* $a \in E$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = b$. *Тогда* $b = f(a)$.

Доказательство. Сначала предположим, что $b \in \mathbb{R}$. Согласно определению предела $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x \in E$, $|x - a| < \delta$: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Отсюда следует, что при $x = a$ неравенство $|f(a) - b| < \varepsilon$ выполняется при любом $\varepsilon > 0$. Это возможно лишь при $b = f(a)$.

Случай, когда b является бесконечностью со знаком или без, невозможен, ибо $f(a)$ не попадет в $V(b, \varepsilon)$, если ε таково, что $\dfrac{1}{\varepsilon} > |f(a)|$.

Таким образом, если у функции f существует предел при $x \to a$, где $a \in E$, то он совпадает со значением $f(a)$ функции в точке a.

Определение 3. *Функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *называется непрерывной в точке* $a \in E$, *если существует* $\lim_{x\to a} f(x)$.

Множество всех непрерывных в точке a функций обозначается $C(a)$, а запись $g \in C(a)$ означает непрерывность функции g в точке a. Учитывая лемму 1, имеем

$$f \in C(a) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Последнее равенство согласно определению предела означает, что

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists U(a, \delta),\ \text{т.ч. } \forall x \in U(a, \delta) \cap E : f(x) \in V(f(a), \varepsilon).$$

Если $f \in C(a)$, то, как следует из примера, имеет место равенство $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$.

Посмотрим, что можно сказать о поведении функций в изолированных точках области определения.

Лемма 2. *Любая функция непрерывна во всех изолированных точках своей области определения.*

Доказательство. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ и d — изолированная точка множества E, т.е. существует окрестность $O(d)$, т.ч. $O(d) \cap E = \{d\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x \in O(d) \cap E$ имеем $f(x) = f(d) \in V(f(d), \varepsilon)$, т.е. выполнено определение непрерывности функции f в точке d с $U(d, \delta) = O(d)$. Лемма доказана.

Выпишем отдельно, что значит, что функция стремится к бесконечности со знаком или без знака (для этого в окрестностном определении предела функции вместо b подставляем $-\infty$, $+\infty$ или ∞).

Определение 4. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $(+\infty,\ \infty)$, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a, \delta)$, *т.ч.* $\forall x \in U(a, \delta) \cap E$: $f(x) \in V(-\infty, \varepsilon) \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) < -\dfrac{1}{\varepsilon}$ *(соответственно* $f(x) \in V(+\infty, \varepsilon) \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *или* $f(x) \in V(\infty, \varepsilon) \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$*).*

Очевидно, что $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

Определение 5. *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *(со знаком или без), то функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой функцией (ббф) при* $x \to a$.

Определение 6. *Функция* f *имеет предел при* $x \to a$, *если* $\exists b \in \mathbb{R}$, *т.ч.* $b = \lim_{x\to a} f(x)$.

Согласно данному определению бесконечно большие при $x \to a$ функции не имеют предела в точке a.

Замечание 1. Условие "$\forall \varepsilon > 0$" в определении предела можно заменить на условие "$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$", где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольно. Действительно, если выполнено старое определение с условием "$\forall \varepsilon > 0$", то справедливо и новое с условием "$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$". Пусть выполняется новое определение с условием "$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$", т.е. для указанных ε существуют соответствующие $\delta'(\varepsilon)$. Тогда исходное определение будет выполнено и для $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, если для таких ε, например, положить $\delta(\varepsilon) = \delta'(\varepsilon_0/2)$. Это следует из того, что при $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ имеет место вложение $V(b, \varepsilon_0/2) \subset V(b, \varepsilon)$.

Замечание 2. Функция f и ее сужение (ограничение) на пересечение E с произвольной окрестностью $U(a, r)$ точки a, т.е. функция f, рассматриваемая только на $U(a, r) \bigcap E$, имеют или не имеют предел при $x \to a$ одновременно. Причем в случае существования пределов они совпадают. Действительно, если выполнено определение предела для функции, то оно выполнено и для сужения с $\delta'(\varepsilon) \doteq \delta(\varepsilon)$. Обратно, если имеет предел сужение, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ соответствующее $\delta'(\varepsilon) > 0$, то выполнено определение предела и для исходной функции с $\delta(\varepsilon) \doteq \min(\delta'(\varepsilon), r)$.

Последнее замечание означает, что свойство функции иметь или не иметь предел при $x \to a$ является *локальным* свойством, т.е. зависит только от поведения функции в произвольной сколь угодно малой окрестности точки a.

Имеется другой подход к определению предела функции через пределы последовательностей.

Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ и a — точка прикосновения множества E.

Определение 7(Гейне). *Величина b (число или бесконечность со знаком или без) есть предел функции f при $x \to a$ ($\lim_{x\to a} f(x) = b$), если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset E$, $x_n \to a\,(n \to +\infty)$: $f(x_n) \to b$.*

Последовательности (x_n), т.ч. $x_n \in E\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ будем называть последовательностями Гейне.

Теорема 1. *Определения пределов функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у функции f $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$ в смысле Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists U(a,\delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a,\delta) \bigcap E$: $f(x) \in V(b,\varepsilon)$. Пусть (x_n) — произвольная последовательность Гейне. Так как $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, то для указанной δ–окрестности $U(a,\delta)$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_0$: $x_n \in U(a,\delta)$. Следовательно, $\forall n > n_0$: $f(x_n) \in V(b,\varepsilon)$. В силу произвольности ε заключаем, что $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Это означает, что в точке a у функции f существует предел в смысле Гейне и его значение равно значению предела в смысле Коши.

Пусть теперь функция f имеет в точке a предел по Гейне, равный b. Предположим, что b не является пределом функции f по Коши, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, т.ч. $\forall U(a,\delta)$ $\exists x_\delta \in U(a,\delta) \bigcap E$: $f(x_\delta) \notin V(b,\varepsilon_0)$. Возьмем $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \exists x_n \in U(a,1/n) \bigcap E$: $f(x_n) \notin V(b,\varepsilon_0)$. Полученная последовательность (x_n) сходится к a при $n \to +\infty$ (действительно, $\forall \eta > 0$ $\exists n_\eta \in \mathbb{N}$, т.ч. $1/n_\eta < \eta \Rightarrow \forall n > n_\eta$: $x_n \in U(a,1/n) \subset U(a,1/n_\eta) \subset U(a,\eta)$), но $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(x_n) \notin V(b,\varepsilon_0)$, т.е. последовательность $(f(x_n))$ не сходится к b. Это противоречит тому, что у функции f существует предел по Гейне. Следовательно, наше предположение неверно и теорема доказана.

Простейшие свойства предела функции

Определение по Гейне предела функции позволяет вывести свойства предела функции из свойств предела последовательностей.

Определение 8. *Функция $f : G \to \mathbb{R}$ называется ограниченной на множестве G, если $\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in G$: $|f(x)| \leq M$.*

Очевидно, что ограниченность функции $f(x)$ на множестве G равносильна существованию двух констант M_1 и M_2, т.ч. $\forall x \in G$: $M_1 \leq f(x) \leq M_2$.

Определение 9. *Функция $f : G \to \mathbb{R}$, называется ограниченной при $x \to a$, где a является точкой прикосновения множества G, если $\exists L > 0$ и $\exists W(a)$ окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in W(a) \bigcap G$: $|f(x)| \leq L$.*

Очевидно, что ограниченность функции $f(x)$ при $x \to a$ равносильно существованию двух констант L_1 и L_2 и окрестности $W(a)$ точки a, т.ч. $\forall x \in W(a) \bigcap G$: $L_1 \leq f(x) \leq L_2$.

Короче, функция ограничена при $x \to a$, если она ограничена на пересечении ее области определения G с некоторой окрестностью $W(a)$ точки a.

Теорема 2. *Пусть f: $E \to \mathbb{R}$ и a — точка прикосновения множества E. Тогда справедливы следующие утверждения*

1) Если функция имеет предел, то он единствен.

2) Если $\lim_{x \to a} f(x) = b$, то $\exists \lim_{x \to a} |f(x)| = |b|$.

3) Если $f(x) = c$ на E. Тогда $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

4) Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a, то $f(x)$ ограничена при $x \to a$.

Доказательство. 1) От противного: пусть у функции f имеется более одного значения предела при $x \to a$. Возьмем какую-либо последовательность Гейне (x_n). Тогда последовательность $(f(x_n))$ также имеет более одного предела — противоречие с единственностью предела последовательности, которое доказывает утверждение.

2) Пусть (x_n) — произвольная последовательность Гейне. По условию $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = b$. По свойству предела последовательностей $|f(x_n)| \to |b|$ при $n \to +\infty$. Следовательно, в силу определения предела функции по Гейне $\lim_{x \to a} |f(x)| = |b|$.

3) Возьмем произвольную последовательность Гейне (x_n). Так как $f(x_n) = c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то по свойствам предела последовательностей $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = c$. Тогда на основании определения предела по Гейне $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

4) Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Rightarrow$ для $\varepsilon = 1$ $\exists U(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a, \delta) \bigcap E$: $|f(x) - b| < 1$. Раскрывая модуль получаем, что $\forall x \in U(a, \delta) \bigcap E$: $b - 1 < f(x) < b + 1$, что и означает, что функция f ограничена при $x \to a$.

ЛЕКЦИЯ 11

Лемма 1(о знаке). *Пусть a является точкой прикосновения области определения функции f и $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ причем $b \neq 0$. Тогда $\exists U(a,\delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a,\delta)\bigcap E$: $f(x) > b/2$, если $b > 0$, и $f(x) < b/2$, если $b < 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varepsilon = |b|/2$. По условию $\exists U(a,\delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a,\delta)\bigcap E$: $|f(x) - b| < |b|/2$. Раскрывая модуль получаем, что $\forall x \in U(a,\delta)\bigcap E$:

$$b - |b|/2 < f(x) < b + |b|/2.$$

Если $b > 0$, то из левой части полученной оценки следует, что $f(x) > b/2$. Если $b < 0$, то из правой части этой же оценки следует, что $f(x) < b/2$.

Замечание. Лемма о знаке остается справедливой, если $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty(+\infty)$. При этом число, отделяющее значения функции от нуля, можно выбирать произвольно. Это сразу же следует из определения предела.

Теорема 1(арифметические свойства предела функций). *Пусть f, g: $E \to \mathbb{R}$, a — точка прикосновения множества E и $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = d$ (b, $d \in \mathbb{R}$). Тогда*

1) $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + d$, т.е.

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists \lim_{x\to a}(\lambda f(x)) = \lambda b$, т.е.

$$\lim_{x\to a}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to a} f(x),$$

3) $\exists \lim_{x\to a} f(x)g(x) = bd$, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x),$$

4) если $d \neq 0$, то для некоторой окрестности $W(a)$ точки a функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет смысл на $W(a)\bigcap E$ и $\exists \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{d}$, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем 4) (остальные утверждения доказываются аналогично). Существование указанной окрестности доказано в лемме о знаке. Возьмем произвольную последовательность Гейне $(x_n) \subset W(a) \bigcap E$. По свойству предела последовательностей $\exists \lim_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{d}$. В силу произвольности (x_n) утверждение доказано.

Теорема 2(переход к пределу в неравенствах). *Пусть a является точкой прикосновения множества E и $\forall x \in E$: $f(x) \le g(x)$. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$, если написанные пределы существуют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказываемое неравенство следует из определения предела по Гейне и соответствующей теоремы для последовательностей. Действительно, возьмем какую-нибудь последовательность Гейне (x_n). Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $f(x_n) \le g(x_n)$ и, следовательно, по теореме 3 из лекции 7 $\lim_{x\to a} f(x_n) \le \lim_{x\to a} g(x_n)$. Поскольку $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x_n)$, а $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g(x_n)$, то теорема доказана.

Замечание. Строгие неравенства при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняются. Действительно, пусть $f(x) = x$, а $g(x) = 0$, $x \in (0, 1)$. Тогда $f(x) > g(x)$ на $(0, 1)$, но пределы этих функций в нуле совпадают.

Лемма 2(о зажатой функции). *Пусть $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in E$, a — точка прикосновения множества E и $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = p$. Тогда $\exists \lim_{x\to a} g(x) = p$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную последовательность Гейне (x_n). Из условий леммы следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$ и $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} h(x_n) = p$. Тогда по лемме о зажатой последовательности $\exists \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = p$. В силу произвольности последовательности (x_n) лемма доказана.

Бесконечно малые функции

В дальнейшем, говоря о пределах функций в данной точке, всегда предполагается, что эта точка является точкой прикосновения множеств, на которых рассматриваются функции. Поэтому это требование может не включаться явно в формулировки, приводимых ниже утверждений.

Определение 1. *Функция α: $E \to \mathbb{R}$, называется бесконечно малой функцией (бмф) при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т.е. если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a, \delta) \bigcap E$: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.*

Очевидно, что $\alpha(x)$ является бмф при $x \to a \Leftrightarrow$ функция $|\alpha(x)|$ бмф при $x \to a$.

Пример. Функция $\alpha(x) = x$ является бмф при $x \to 0$. Это следует из примера, рассмотренного в лекции 10.

Данное ранее определение предела по Коши означает, что разность $f(x) - b$ является бмф при $x \to a$, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,\ b \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \text{ в представлении } f(x) = b + \gamma(x)$$

функция $\gamma(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Арифметические свойства бмф следуют из доказанной теоремы об арифметических свойствах предела для произвольных функций.

Лемма 3. *Произведение бмф при $x \to a$ на ограниченную при $x \to a$ функцию является бмф при $x \to a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из определения предела функции по Гейне и свойств бмп.

Лемма 4. *Пусть α , β: $E \to \mathbb{R}$, $\alpha(x)$,$\beta(x) \neq 0$ на E. Если $\alpha(x)$ — бмф, а $\beta(x)$ — ббф при $x \to a$, то $1/\alpha(x)$ является ббф, а $1/\beta(x)$ — бмф при $x \to a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и выше, доказательство леммы следует из определения предела по Гейне и соответствующего утверждения для последовательностей.

Примеры.

1) Функция $\alpha(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ является бмф при $x \to 0$ как произведение n бмф.

2) Функция $\beta(x) = 1/x$ является бмф при $x \to \infty$. Зададим $\varepsilon > 0$. Требуется найти $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы из неравенства $|x| > 1/\delta$ следовало, что $|\beta(x)| = |1/x| < \varepsilon$. Это будет выполнено, если в качестве δ взять любое положительное число, не превосходящее ε. Например, можно положить $\delta = \varepsilon$. При таком выборе δ получим, что $\forall x$, т.ч. $|x| > 1/\delta$: $|\beta(x)| = |1/x| < \delta \leq \varepsilon$.

Функция $\gamma(x) = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, является бмф при $x \to \infty$ как произведение n бмф.

3) Функция $\lambda(x) = 1/x^n$ является ббф при $x \to 0$. Это следует из леммы 4 и первого примера. Функция $\mu(x) = x^n$ является ббф при $x \to \infty$, т.к. $1/\mu(x)$ является бмф при $x \to \infty$.

Пусть D,$E \subset \mathbb{R}$, a и b — точки прикосновения множеств D и E соответственно.

Теорема 3(предел композиции). *Пусть $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Если $\lim_{y\to b} g(y) = d$, то $\exists \lim_{x\to a} g(f(x)) = d$ (а,*

b и d могут быть как числами, так и бесконечностями со знаком или без).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную последовательность $(x_n) \subset E$, т.ч. $x_n \to a$. Тогда последовательность $y_n \doteq f(x_n) \to b$ при $n \to +\infty$. Согласно условиям теоремы $g(y_n) \to d$, т.е. $g(f(x_n)) \to d$. В силу произвольности последовательности (x_n) на основании определения предела по Гейне заключаем, что $\exists \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$. Теорема доказана.

В случае, когда $b \in E$ и $g \in C(b)$ утверждение теоремы можно записать следующим образом: $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = g(b) = g(\lim_{x\to a} f(x))$, т.е. имеет место равенство $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$, которое означает перестановочность символов предела и непрерывной функции.

Замечания.

1) Из доказанной теоремы следует формула замены переменной при вычислении пределов. Действительно, пусть требуется вычислить $\lim_{x\to a} f(x)$. Выполним замену переменной $x = u(t)$, где $u(t) \to a$ при $t \to \alpha$, и найдем $\lim_{t\to\alpha} f(u(t))$. Если $p = \lim_{t\to\alpha} f(u(t))$ и обратная функция $u^{-1}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то найденный предел равен искомому: $p = \lim_{x\to a} f(u(u^{-1}(x))) = \lim_{x\to a} f(x)$.

2) Теорему о пределе композиции можно интерпретировать следующим образом: если функция $g(y)$ имеет в точке b предел, равный d, то при любом способе стремления аргумента функции к b функция g будет стремиться к d.

Критерий Коши существования предела функции

Пусть точка a является точкой прикосновения множества E.

Теорема 4(критерий Коши). *Для того чтобы $f\colon E \to \mathbb{R}$ имела конечный предел в точке a необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a,\delta)$, т.ч. $\forall x',x'' \in U(a,\delta) \bigcap E$: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, равный b, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a,\delta)$, т.ч. $\forall x \in U(a,\delta) \bigcap E$: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда $\forall x', x'' \in U(a,\delta) \bigcap E$: $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b - f(x'') + b| \le |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ необходимость доказана.

Достаточность. Сначала докажем, что для любой последовательности Гейне (x_n) последовательность $(f(x_n))$ имеет предел.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по условию $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x',x'' \in U(a,\delta) \bigcap E$: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Возьмем произвольную последовательность Гейне (x_n). Так как $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$, то на основании определения предела последовательности для указанного δ $\exists n_0 = n_0(\delta(\varepsilon)) = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_0$: $x_n \in U(a,\delta) \bigcap E$. Но тогда $\forall n,m > n_0$: $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, т.е. последовательность $(f(x_n))$ является последовательностью Коши, следовательно, она сходится к некоторому числу.

Теперь покажем, что для разных последовательностей Гейне последовательности значений функций имеют один и тот же предел. Итак, пусть (x_n) и (y_n) — две произвольные последовательности Гейне. Докажем, что $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$. Для этого рассмотрим "смешанную" последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, т.е. последовательность (z_k), т.ч. $z_{2k-1} = x_k$, $z_{2k} = y_k$. Очевидно, что (z_k) является последовательностью Гейне. Поэтому, как было показано, $\exists \lim_{k\to+\infty} f(z_k)$. Последовательности $(f(x_n))$ и $(f(y_n))$ являются подпоследовательностями последовательности$(f(z_k))$. Поскольку предел любой подпоследовательности сходящейся последовательности равен пределу последовательности, то $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{k\to+\infty} f(z_k) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$. Теорема доказана.

Замечание. Как показывает доказательство критерия Коши, в определении предела по Гейне достаточно требовать, чтобы для каждой последовательности Гейне (x_n) существовал предел последовательности значений функции $(f(x_n))$ без предположения о совпадении этих пределов.

ЛЕКЦИЯ 12

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть x, $a \in E$ (точка a фиксирована, $E \subset \mathbb{R}$) $f\colon E \to \mathbb{R}$. Приращением аргумента в точке a называется $\Delta x \doteq x - a$; приращением функции f в точке a (точнее приращением, соответствующим приращению аргумента $\Delta x = x - a$) называется

$$\Delta f \equiv \Delta f(a) \equiv \Delta f(a, \Delta x) \equiv \Delta f(a, x-a) \doteq f(x)-f(a) = f(a+\Delta x)-f(a).$$

Непрерывность функции f в точке a означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, что равносильно тому, что функция $f(x) - f(a)$ является бмф при $x \to a$. Следовательно, функция $f \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \Delta f = 0$ или, что то же самое, $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = 0$.

Перечислим свойства функций, непрерывных в данной точке $a \in E$.

Теорема 1. *Пусть $f,g\colon E \to \mathbb{R}$, точка $a \in E$ и $f,g \in C(a)$. Тогда*

1) *существует окрестность $U(a)$, т.ч. $f(x)$ ограничена в $U(a)\bigcap E$;*

2) *если $f(a) \neq 0$, то $\exists$ окрестность $W(a)$, т.ч. $\forall x \in W(a) \cap E$: $f(x) > f(a)/2$, если $f(a) > 0$, и $f(x) < f(a)/2$, если $f(a) < 0$;*

3) *$|f| \in C(a)$;*

4) *$f + g \in C(a)$;*

5) *$fg \in C(a)$;*

6) *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda f \in C(a)$;*

7) *если $g(a) \neq 0$, то $\exists$ окрестность $O(a)$ точки a, т.ч. в $O(a)\cap E$ определена функция $f(x)/g(x)$ и она непрерывна в точке a.*

Утверждения теоремы 1 являются переформулировками соответствующих свойств предела, поскольку непрерывность функций в точке $a \in E$ равносильна существованию пределов $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$

Теорема 2(непрерывность композиции). *Пусть $f\colon D \to E$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, $D, E \subset \mathbb{R}$, $f \in C(a)$ и $f(a) = b$. Если $g \in C(b)$, то композиция $h = g \circ f \in C(a)$.*

Справедливость теоремы 2 следует из теоремы о пределе композиции, ибо согласно условиям $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$. Тогда в силу теоремы 3 из лекции 11 существует предел $\lim_{x\to a} h(x)$, что и означает непрерывность композиции в точке a.

Если точка $a \in E$ является предельной точкой множества E ($\Leftrightarrow$ a — точка прикосновения множества $E \setminus \{a\}$), на котором задана функция f, и $f \in C(a)$, то значение функции f в точке a однозначно восстанавливается по значениям f в точках, отличных от a. Точнее, имеет место следующее простое утверждение, которое будет использовано позднее.

Лемма 1. *Пусть точка a является предельной точкой множества E. Для того чтобы $f \in C(a)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x) = f(a)$, где $\lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x) \equiv \lim_{x\to a,\, x\in E\setminus\{a\}} f(x)$ — это предел в точке a функции f, рассматриваемой только на множестве $E \setminus \{a\}$, т.е. предел сужения f на $E \setminus \{a\}$.*

Доказательство. Пусть $f \in C(a)$, т.е. существует предел $\lim_{x\to a,\, x\in E} f(x)$ по множеству E и он равен $f(a)$. Но тогда предел по более узкому множеству $E \setminus \{a\}$ тем более существует и также равен $f(a)$.

Пусть $\lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x) = f(a)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x \in U(a,\delta) \bigcap (E \setminus \{a\}) = \dot{U}(a,\delta) \bigcap E$: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Но последнее неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ всегда выполнено при $x = a$ и любом $\varepsilon > 0$. Значит, $\exists \lim_{x\to a,\, x\in E} f(x)$ (естественно равный $f(a)$), т.е. $f \in C(a)$. Лемма доказана.

С вычислительной точки зрения из утверждения леммы следует, что значение непрерывной в точке a функции может быть определено с любой наперед заданной точностью при малой погрешности измерения аргумента.

Односторонние пределы

Для того чтобы ввести односторонние пределы, понадобятся односторонние окрестности точек $a \in \mathbb{R}$. Пусть $\delta > 0$:

– $U_l(a,\delta) \doteq (a-\delta, a]$ называется левой δ–окрестностью точки a,

– $U_r(a,\delta) \doteq [a, a+\delta)$ называется правой δ–окрестностью точки a,

– $\dot{U}_l(a,\delta) \doteq (a-\delta, a)$ называется левой проколотой δ– окрестностью точки a,

– $\dot{U}_r(a,\delta) \doteq (a, a+\delta)$ называется правой проколотой δ– окрестностью точки a.

Чтобы получить определения односторонних пределов в данной точке a, в определении предела функции надо заменить δ–окрестность точки a на односторонние окрестности при условии, что a является точкой прикосновения сответствующего множества.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Для фиксированной точки $a \in \mathbb{R}$ введем множества $E_l(a) \doteq \{x \in E |\ x \le a\}$, $E_r(a) \doteq \{x \in E |\ x \ge a\}$, $\dot{E}_l(a) \doteq \{x \in E |\ x < a\}$, $\dot{E}_r(a) \doteq \{x \in E |\ x > a\}$. В дальнейшем будут использоваться односторонние пределы, определяемые через проколотые односторонние окрестности. Поэтому можно ограничиться только их рассмотрением.

Пусть точка a является точкой прикосновения множества $E_l(a)$.

Определение 1. *Величина b (число или бесконечность со знаком или без) называется левым пределом функции f при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_l(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in U_l(a, \delta) \bigcap E\colon f(x) \in V(b, \varepsilon)$.*

Пусть точка a является точкой прикосновения множества $E_r(a)$.

Определение 2. *Величина d (число или бесконечность со знаком или без) называется правым пределом функции f при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_r(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in U_r(a, \delta) \bigcap E\colon f(x) \in V(d, \varepsilon)$.*

Для левого предела используются обозначения $\lim_{x \to a,\, x \le a} f(x)$ или $f_l(a)$, а для правого — $\lim_{x \to a,\, x \ge a} f(x)$ или $f_r(a)$.

Из определений левого и правого пределов функции f в точке a видно, что они совпадают с пределами в этой же точке сужений $f_{E_l(a)}$ и $f_{E_r(a)}$ функции f на множества $E_l(a)$ и $E_r(a)$ соответственно. Отсюда следует, что для односторонних пределов остаются в силе все свойства предела функции, ибо односторонние пределы являются обычными пределами для сужений.

Пусть точка a является точкой прикосновения множества $\dot{E}_l(a)$. В этом случае также можно ввести односторонний предел в точке a.

Определение 3. *Величина s (число или бесконечность со знаком или без) называется левым пределом функции f при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}_l(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in \dot{U}_l(a, \delta) \bigcap E\colon f(x) \in V(s, \varepsilon)$.*

Пусть точка a является точкой прикосновения множества $\dot{E}_r(a)$.

Определение 4. *Величина t (число или бесконечность со знаком или без) называется правым пределом функции f при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}_r(a, \delta)$, т.ч. $\forall x \in \dot{U}_r(a, \delta) \bigcap E\colon f(x) \in V(t, \varepsilon)$.*

Такие пределы принято обозначать $f(a - 0)$ или $\lim_{x \to a-0} f(x) \equiv \lim_{x \to a,\, x < a} f(x)$ и $f(a + 0)$ или $\lim_{x \to a+0} f(x) \equiv \lim_{x \to a,\, x > a} f(x)$ соответственно.

Определения 3 и 4 односторонних пределов совпадают с определениями пределов в точке a сужений функции f на множества $\dot{E}_l(a)$ и $\dot{E}_r(a)$ соответственно. Поэтому и для этих односторонних пределов остаются в силе все свойства предела функции.

Как связаны пределы $f_l(a)$ и $f(a-0)$, $f_r(a)$ и $f(a+0)$? Пусть точка a является точкой прикосновения множества $\dot{E}_l(a)$ (в этом случае точка a будет точкой прикосновения и для $E_l(a)$). Предел $f(a-0)$ является пределом сужения функции f на множество $\dot{E}_l(a)$, являющееся подмножеством множества $E_l(a)$. Поэтому из существования конечного или бесконечного предела $f_l(a)$ следует существование предела $f(a-0)$ и их равенство: $f(a-0)=f_l(a)$. Обратное неверно (см. примеры ниже). Аналогично, если a является точкой прикосновения множества $\dot{E}_r(a)$ и существует конечный или бесконечный предел $f_r(a)$, то существует $f(a+0)$ и $f(a+0)=f_r(a)$.

Отметим, что если точка $a \notin E$ (т.е. предел берется в точке, не входящей в область определения функции), то $f(a-0)=f_l(a)$ (a является точкой прикосновения множества $E_l(a)$) и $f(a+0)=f_r(a)$ (a является точкой прикосновения множества $E_r(a)$).

Примеры.

1) Пусть $E=[0,1)\bigcup\{2\}$. Точка $a=1$ является точкой прикосновения множеств $E_l(1)$ и $\dot{E}_l(1)$, т.к. $E_l(1)=E\bigcap\{x\in\mathbb{R}|\ x\le 1\}=[0,1)=\dot{E}_l(1)=E\bigcap\{x\in\mathbb{R}|\ x<1\}$, но она не будет точкой прикосновения для $E_r(1)$ и $\dot{E}_r(1)$ поскольку $E_r(1)=E\bigcap\{x\in\mathbb{R}|\ x\ge 1\}=\{2\}=\dot{E}_r(1)=E\bigcap\{x\in\mathbb{R}|\ x>1\}$. Следовательно, нельзя говорить о пределе справа $g_r(1)$ в точке 1 для функции $g:\ E\to\mathbb{R}$.

Для множества $D=[0,1]\bigcup\{2\}$ точка $a=1$ будет точкой прикосновения как для множества $D_l(1)=D\bigcap\{x\in\mathbb{R}|\ x\le 1\}=[0,1]$, так и для множества $D_r(1)=D\bigcap\{x\in\mathbb{R}|\ x\ge 1\}=\{1,2\}$.

2) Пусть $f(x)=0$, если $x<0$ и $f(x)=1$, если $x\ge 0$. Тогда функция является постоянной, как при $x<0$, так и при $x\ge 0$: в первом случае она равна 0, а во втором 1. Односторонний предел $f_l(0)$ не существует. Действительно, возьмем две последовательности Гейне $u_n=-1/n$ и $v_n=0$, $n=1,2,\ldots$, стремящиеся к 0. Для первой последовательности $f(u_n)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n)=0$. Для второй последовательности $f(v_n)=1$ для всех $n\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(v_n)=1$. Предел справа $f_r(0)$, напротив, существует как предел функции, являющейся постоянной на множестве $x\ge 0$, и равен 1.

Односторонние пределы $f(0-0)$ и $f(0+0)$ существуют, т.к. на множествах $x<0$ и $x>0$ функция постоянна и равны 0 и 1 соответственно.

3) Как и в предыдущем примере, доказывается, что левый и правый пределы функции $\mathrm{sgn}x$ (читается "сигнум x") в нуле $\mathrm{sgn}_l(0)$ и $\mathrm{sgn}_r(0)$ не существуют (по определению $\mathrm{sgn}x=-1$, если $x<0$, $\mathrm{sgn}x=1$, если $x>0$ и $\mathrm{sgn}x=0$, если $x=0$). Однако, если взять сужения этой функции на множества $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, то они уже будут иметь пределы слева и справа в точке 0 как функции, постоянные на этих множествах:

$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}x = -1$, $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}x = 1$.

Теорема 3(критерий существования предела через односторонние пределы). *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$ и точка a является точкой прикосновения для множеств $E_l(a)$ и $E_r(a)$. Для того чтобы $\lim_{x\to a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists f_l(a)$, $f_r(a)$ и $f_l(a) = f_r(a) = b$ (b может быть как числом, так и бесконечностью со знаком или без).*

Доказательство. Необходимость: пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Поскольку $f_l(a)$ и $f_r(a)$ являются пределами при $x\to a$ сужений функции f на множества $E_l(a)$ и $E_r(a)$, то они существуют и равны пределу самой функции f, т.е. b.

Достаточность: пусть $f_l(a) = f_r(a) = b$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ т.ч. $\forall x\in U_l(a,\delta_1)\cap E : f(x)\in V(b,\varepsilon)$, $\forall x\in U_r(a,\delta_2)\cap E$: $f(x)\in V(b,\varepsilon)$. Следовательно, $\forall x\in U(a,\delta)\cap E$, где $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$: $f(x)\in V(b,\varepsilon)$, т.е. $b = \lim_{x\to a} f(x)$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть точка $a\in E$. Для того чтобы функция $f\in C(a)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $f_l(a)$ и $f_r(a)$.*

Доказательство. Действительно, $f\in C(a)\Leftrightarrow \exists\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Тогда по доказанному в теореме односторонние пределы $f_l(a)$ $f_r(a)$ существуют и равны $f(a)$.

Обратно: пусть существуют $f_l(a)$ $f_r(a)$. Так как точка a входит в область определения функции f, то пределы $f_l(a)$ и $f_r(a)$ равны $f(a)$ значению функции в точке a (см. лекцию 10). Следовательно, на основании доказанной теоремы существует $\lim_{x\to a} f(x)$, т.е. $f\in C(a)$.

Приведем теперь критерий существования предела функции f в точке a через односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Теорема 4. *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$ и точка a является точкой прикосновения множеств $\dot{E}_l(a)$ и $\dot{E}_r(a)$. Для того чтобы $\lim_{x\to a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists$ пределы $f(a-0)$, $f(a+0)$ и $f(a-0) = f(a+0) = b$, причем $b = f(a)$, если $a\in E$.*

Доказательство. Необходимость: пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Поскольку $f(a-0)$ и $f(a+0)$ являются пределами при $x\to a$ сужений функции f на множества $\dot{E}_l(a)$ и $\dot{E}_r(a)$, то они существуют и равны пределу самой функции f, т.е. b.

Достаточность: пусть $f(a-0) = f(a+0) = b$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ т.ч. $\forall x\in\dot{U}_l(a,\delta_1)\cap E$: $f(x)\in V(b,\varepsilon)$, $\forall x\in\dot{U}_r(a,\delta_2)\cap E$: $f(x)\in V(b,\varepsilon)$. Следовательно, $\forall x\in U(a,\delta)\cap E$, где

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$: $f(x) \in V(b, \varepsilon)$, т.е. $b = \lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$. Если $a \notin E$, то $\lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$ и теорема доказана. Если $a \in E$, то в силу условий теоремы $f(a) = \lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$. Как было показано при доказательстве леммы 1 тогда существует и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ Теорема доказана.

Отметим, что если в условиях теоремы точка $a \in E$, то теорема превращается в критерий непрерывности функции f в точке a. Действительно, $f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x) = f(a)$ и поэтому

$$f \in C(a) \Leftrightarrow \exists f(a-0), f(a+0) \text{ и } f(a-0) = f(a+0) = f(a).$$

ЛЕКЦИЯ 13

Предел монотонной функции

Определение 1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) возрастает (убывает) на множестве E, если $\forall x_1, x_2 \in E$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \ge f(x_2)$).*

Если неравенства строгие, то функция строго возрастает (соответственно строго убывает) на множестве E.

Возрастающая (строго возрастающая) функция обозначается $f\uparrow$ ($f\uparrow\uparrow$), убывающая (строго убывающая) функция — $f\downarrow$ ($f\downarrow\downarrow$).

Возрастающие и убывающие на множестве E функции называются *монотонными* на E. Строго возрастающие и строго убывающие функции на E называются *строго монотонными* на E.

Через $\inf\limits_{x\in E} f(x)$, или $\inf\limits_{E} f$, обозначается нижняя грань множества значений $f(E)$ функции f.

Через $\sup\limits_{x\in E} f(x)$, или $\sup\limits_{E} f$, обозначается верхняя грань множества значений $f(E)$ функции f.

Поскольку $\forall x \in E$: $\inf\limits_{E} f \le f(x) \le \sup\limits_{E} f$, то ограниченность функции на множестве E равносильна тому, что $\inf\limits_{E} f,\ \sup\limits_{E} f \in \mathbb{R}$.

Если функция f задана на интервале (α, β), $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, то пределы в концевых точках α и β интервала (α, β) принято обозначать $f(\alpha + 0)$ и $f(\beta - 0)$ (когда $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$ эти пределы обозначаются $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$ соответственно).

Теорема 1. *Пусть f монотонна на интервале (α, β), $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$. Тогда*

1) *$\forall c \in (\alpha, \beta)$ существуют конечные пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$,*

2) *в концах интервала существуют конечные или бесконечные пределы $f(\alpha+0)$ и $f(\beta-0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что α и β являются точками прикосновения (α, β), а c является точкой прикосновения как (α, c), так и (c, β).

Пусть, например, $f\uparrow$ на (α, β) и $\alpha < c < \beta$. Так как $\forall x \in (\alpha, c)$: $f(x) \le f(c)$, то существует конечная верхняя грань $s = \sup\limits_{(\alpha,c)} f \le f(c)$. Покажем, что $s = f(c-0)$.

В самом деле, по определению верхней грани $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (\alpha, c)$: $s - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le s$. В силу $f\uparrow$ $\forall x \in (x_\varepsilon, c)$: $s - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le f(x) \le s$, т.е. выполняется определение того, что $\lim_{x\to c-0} f(x) = s$ (в качестве левой проколотой окрестности точки c взят интервал (x_ε, c)), и при этом $f(c-0) = s \le f(c)$.

Так как $f\uparrow$, то $\forall x \in (c,\beta)$: $f(c) \le f(x)$, следовательно, существует конечный $\inf\limits_{(c,\beta)} f = i \ge f(c)$. Аналогично вышеприведенным рассуждениям получаем, что $\exists \lim_{x\to c+0} f(x) = i$ и $f(c+0) = i \ge f(c)$.

Если $\sup\limits_{(\alpha,\beta)} f$ конечен, то, как и выше, доказывается, что $\exists f(\beta-0) = \sup\limits_{(\alpha,\beta)} f$. Если sup равен $+\infty$, то $\forall M > 0\ \exists x_M \in (\alpha,\beta)$, т.ч. $f(x_M) > M$. Поскольку $f\uparrow$, то $\forall x \in (x_M,\beta)$: $M < f(x_M) \le f(x)$, что и означает, что $\exists f(\beta-0) = +\infty$.

Аналогично разбирается случай левого конца. Теорема доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы было показано, что для произвольной возрастающей функции f и любого $c \in (\alpha,\beta)$: $f(c-0) \le f(c) \le f(c+0)$, а для произвольной убывающей функции f: $f(c-0) \ge f(c) \ge f(c+0)$.

Теорема 2. *Для существования конечных пределов монотонной функции в концевых точках интервала* (α,β) *необходимо и достаточно, чтобы функция была ограничена на* (α,β).

Доказательство. Пусть для определенности $f\uparrow$ на (α,β). Согласно теореме 3 существуют конечные или бесконечные пределы $f(\alpha+0)$ и $f(\beta-0)$, причем $f(\alpha+0) = \inf\limits_{(\alpha,\beta)} f$, $f(\beta-0) = \sup\limits_{(\alpha,\beta)} f$. Отсюда следует, что конечность $f(\alpha+0)$ и $f(\beta-0)$ равносильна конечности $\inf\limits_{(\alpha,\beta)} f$ и $\sup\limits_{(\alpha,\beta)} f$, что в свою очередь равносильно ограниченности функции f на интервале (α,β).

Следствие. *Если функция f монотонна на отрезке* $[\alpha,\beta]$, *то пределы в концевых точках* $f(\alpha+0)$ *и* $f(\beta-0)$ *существуют и конечны.*

Доказательство. Действительно, поскольку f монотонна на $[\alpha,\beta]$, то $\forall x \in [\alpha,\beta]$: $\min(f(\alpha), f(\beta)) \le f(x) \le \max(f(\alpha), f(\beta))$, т.е. f ограничена на $[\alpha,\beta]$. Но тогда f ограничена и на (α,β), и следовательно, $f(\alpha+0)$, $f(\beta-0) \in \mathbb{R}$.

Точки разрыва

Пусть E непустое подмножество $\mathbb{R}$, $a \in E$, $f{:}E \to \mathbb{R}$.

Определение 2. *Функция f называется разрывной в точке $a \in E$, а точка a — точкой ее разрыва, если f не является непрерывной в этой точке.*

Замечание. Так как функция непрерывна в любой изолированной точке своей области определения (см. лемму 1 лекции 10), то точками разрыва могут быть только предельные точки, принадлежащие области определения.

Примеры.

1. Точка $a = 0$ не является точкой разрыва функции $f(x) = 1/x$, так как эта точка не входит в область определения функции.

2. Любая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках области определения, т.к. всякая точка $\mathbb{N}$ является изолированной точкой этого множества.

3. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

разрывна в любой точке множества $\mathbb{Z}$ и непрерывна во всех остальных точках.

4) Пусть $E_1 = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, а $E_2 = E_1 \bigcup \{0\}$. Функция f, определенная на множестве E_1 формулой $f(1/n) = 1/n$, непрерывна в каждой точке E_1, так как любая точка этого множества является изолированной точкой. Функция g, заданная на E_2 формулой $g(1/n) = 1/n$, $g(0) = 1$ непрерывна во всех точках E_2, кроме точки $x = 0$, поскольку предел $\lim_{x\to 0} g(x)$ не существует.

Классификация точек разрыва

Дадим классификацию точек разрыва для функций, заданных на интервале (α, β), хотя ее можно ввести и для функций, рассматриваемых на произвольных $E \subset \mathbb{R}$.

Пусть $f\colon\ (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty)$ и $a \in (\alpha, \beta)$.

Определение 3. *Точка $a \in E$ называется точкой устранимого разрыва функции f, если $\exists \lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$, причем $f(a-0) = f(a+0) \ne f(a)$.*

Конечно, из определения следует, что точка a является точкой разрыва функции f, так в этом случае в силу теоремы 2 лекции 12 не существует $\lim_{x\to a} f(x)$.

Определение 4. *Точка $a \in E$ называется точкой разрыва I рода функции f, если $\exists f(a-0)$, $f(a+0)$, но $f(a-0) \ne f(a+0)$.*

Величина $f(a+0)-f(a-0)$ называется *скачком* функции в точке разрыва I рода.

Определение 5. *Точка $a \in E$ называется точкой разрыва II рода функции f, если не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$.*

Напомним, что говоря о существовании предела, предполагается его конечность.

Опять в силу теоремы 4 лекции 12 точки разрыва I и II рода являются точками разрыва функции f.

Очевидно, что любая точка разрыва функции f является точкой разрыва одного из трех указанных типов.

Примеры.

1. Точка $a = 0$ — точка устранимого разрыва функции $f(x) = |\mathrm{sgn} x|$ Действиельно, $f(0-0) = f(0+0) = 1$ (напомним, что указанные односторонние пределы согласно определению берутся у сужения функции на множества $x < 0$ и $x > 0$ соответственно, а слева и справа от нуля функция является постоянной). Пределы $f_l(0)$ и $f_r(0)$ не существуют.

2. Точка $a = 0$ — разрыв I рода функции $g(x) = \mathrm{sgn} x$: $g(0-0) = -1$, $g(0+0) = 1$.

3. Точка $a = 0$ — разрыв II рода функции $h(x) = 1/x$ при $x \neq 0$ и $h(0) \doteq 0$.

Если a — точка устранимого разрыва, то, переопределив функцию f в a, положив ее равной $f(a-0)$, получим функцию, непрерывную в точке a.

Для функций, заданных на отрезке $[\alpha, \beta]$ (полуинтервалах $[\alpha, \beta)$ или $(\alpha, \beta]$) можно дать классификацию точек разрыва в концевых точках α и β (в точке α или β соответственно). Например, если f: $[\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, то концевая точка α называется устранимой точкой разрыва, если $\exists f(\alpha+0)$ и $f(\alpha+0) \neq f(\alpha)$. Если не существует конечный предел $f(\alpha+0)$, то точка α называется точкой разрыва II рода.

Теорема 3(точки разрыва монотонной функции). *Пусть функция f монотонна на интервале (α, β) $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty)$. Тогда*

1) *функция f может иметь точки разрыва только I рода;*

2) *множество всех точек разрыва функции f не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть для определенности $f \uparrow$. Если $a_1 \in (\alpha, \beta)$ — точка разрыва, то согласно теореме 4 лекции 12 $\exists f(a_1-0)$, $f(a_1+0)$ и при этом $f(a_1-0) \leq f(a_1) \leq f(a_1+0)$. Отсюда заключаем, что $f(a_1-0)<f(a_1+0)$, ибо в противном функция f была бы непрерывной в точке a_1. Значит, a_1 является точкой разрыва I-го рода.

Далее, из неравенства $f(a_1-0)<f(a_1+0)$ следует, что $\exists r_1 = r_1(a_1)\in\mathbb{Q}$, т.ч. $f(a_1-0)<r_1<f(a_1+0)$.

Пусть a_2 — другая точка разрыва, т.ч. $a_1<a_2<\beta$. Тогда $\exists r_2 = r_2(a_2)\in\mathbb{Q}$, т.ч. $f(a_2-0)<r_2<f(a_2+0)$. В силу выбора r_1 и r_2 и возрастания f:

$$r_1 < f(a_1+0) = \inf_{(a_1,a_2)} f(x) \le \sup_{(a_1,a_2)} f(x) = f(a_2-0) < r_2,$$

т.е. $r_1<r_2$ (здесь были использованы теорема о пределах монотонных функций и свойство локальности предела (см. лекцию 10)). Таким образом, каждой точке разрыва функции f сопоставлено рациональное число и при этом разным точкам разрыва соответствуют различные рациональные числа. Значит, установлено взаимно однозначное соответствие между точками разрыва функции f и некоторым подмножеством рациональных чисел. Поскольку любое подмножество счетного множества $\mathbb{Q}$ конечно или счетно (см. лемму 2 лекции 5), то множество точек разрыва функции f на (α,β) не более чем счетно. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f монотонна на отрезке $[\alpha,\beta]$ $(-\infty<\alpha<\beta<+\infty)$, то множество всех ее точек разрыва не более чем счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если монотонная функция задана на отрезке $[\alpha,\beta]$, то кроме точек разрыва, принадлежащих интервалу (α,β), могут появиться точки разрыва в концевых точках отрезка (при этом это будут устранимые точки разрыва). Поскольку на интервале (α,β) функция f может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, то в силу свойств конечных и счетных множеств и на всем отрезке $[\alpha,\beta]$ множество точек разрыва функции f не более чем счетно.

Примеры.

1) Функция $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/n$, $x\in(1/(n+1),1/n]$ $(n\in\mathbb{N})$, $f(0)=0$ возрастает на $[0,1]$ и имеет счетное число точек разрыва $x_n=1/(n+1)$.

2) Функция Дирихле $\chi(x)=1$, если x — иррацинально и $\chi(x)=0$, если x — рационально, разрывна в любой точке $\mathbb{R}$. В самом деле, зафиксируем произвольную точку $a\in\mathbb{R}$. Поскольку можно указать последовательности (x_n) и (y_n) рациональных и соответственно иррациональных чисел,

стремящихся к a, то из определения предела по Гейне получаем, что не существует $\lim_{x \to a} \chi(x)$ и, следовательно, функция Дирихле не является непрерывной в точке a.

ЛЕКЦИЯ 14

Свойства функций, непрерывных на отрезке (глобальные свойства непрерывных функций)

Определение 1. *Функция f называется непрерывной на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке множества E, т.е. $\forall a \in E$: $f \in C(a)$.*

Класс всех непрерывных на множестве E функций обозначается $C(E)$. Запись $g \in C(E)$ означает, что функция g непрерывна на множестве E, т.е.

$$g \in C(E) \Leftrightarrow \forall a \in E: \; g \in C(a).$$

Теорема 1(первая теорема Вейерштрасса). *Если $f \in C[a,b]$, то f ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е. $\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in [a,b]$: $|f(x)| \leq M$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть $f \in C[a,b]$, но f не ограничена на $[a,b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a,b]$: $|f(x_n)| > n$. Из последовательности (x_n) точек отрезка $[a,b]$ по теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to d \in [a,b]$ $(k \to +\infty)$. В силу непрерывности f на $[a,b]$: $f(x_{n_k}) \to f(d)$ при $k \to +\infty$. Тогда последовательность $(f(x_{n_k}))$ ограничена как сходящаяся последовательность. Но по построению $|f(x_{n_k})| > n_k$, т.е. $(f(x_{n_k}))$ неограничена. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2(вторая теорема Вейерштрасса). *Если $f \in C[a,b]$, то $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$, т.ч. $\forall x \in [a,b]$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, т.е. $f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a,b] \Leftrightarrow \exists$ конечные $\inf\limits_{[a,b]} f(x) = i$ и $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = s$. Далее, по определению sup: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a,b]$, т.ч. $s \geq f(x_n) > s - 1/n$. Из полученной ограниченной последовательности (x_n) по теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Обозначим предел этой подпоследовательности через x_2. На основании непрерывности f: $f(x_{n_k}) \to f(x_2)$. Но тогда переходя к пределу в неравенстве $s - 1/n_k < f(x_{n_k}) \leq s$, получим, что $s = f(x_2)$. Существование точки x_1 доказывается аналогично.

Замечание 1. Вторая теорема Вейерштрасса утверждает, что непрерывная на отрезке функция достигает своих минимума и максимума.

Замечание 2. Обе доказанные теоремы не верны для интервалов. Например, $f(x) = 1/x \in C(0,1)$, но f не ограничена на $(0,1)$, а функция $g(x) = x \in C(0,1)$, но ни в одной точке интервала $(0,1)$ не достигает супремума, равного 1.

Замечание 3. Если $f \in C[a,b]$, а (x_n) последовательность точек отрезка $[a,b]$, т.ч. $f(x_n) \to s$ при $n \to +\infty$, то отсюда не следует, что последовательность (x_n) сходится к некоторой точке отрезка $[a,b]$. Действительно, пусть $f(x) = x^2$, $[a,b] = [-1,1]$. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела, а $(f(x_n))$ имеет.

Теорема 3(Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in (a,b)$, т.ч. $f(c) = 0$.*

Доказательство. Разделим отрезок $I_0 = [a,b]$ точкой $x_1 = (a+b)/2$ пополам. Если $f(x_1) = 0$, то теорема доказана. Если $f(x_1) \neq 0$, то на концах одного из двух отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$ функция f принимает значения разных знаков. Такой отрезок обозначим $I_1 = [a_1, b_1]$. Теперь поделим I_1 пополам точкой x_2 и повторяем вышеприведенные рассуждения и т.д.

В результате либо на конечном шаге получим точку $x_n \in [a,b]$, в которой $f(x_n) = 0$, либо получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $I_n = [a_n, b_n]$, ибо длины $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ этих отрезков стремятся к нулю. По теореме о стягивающейся СВО (теорема 4 лекции 4) $\exists c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$, при этом $a_n \to c$ и $b_n \to c$. В силу непрерывности f: $f(a_n) \to f(c)$, $f(b_n) \to f(c)$. По построению $f(a_n)f(b_n) < 0$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $f^2(c) \leq 0 \Leftrightarrow f(c) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 4(о промежуточных значениях непрерывных функций). *Пусть $f \in C[a,b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ и γ — произвольное число между α и β. Тогда $\exists c \in [a,b]$, т.ч. $f(c) = \gamma$.*

Доказательство. Если $\alpha = \beta$, то в качестве c можно взять, например, a.

Пусть $\alpha \neq \beta$. Предположим, что $\gamma \neq \alpha, \beta$. Тогда функция $f(x) - \gamma$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано–Коши $\Rightarrow \exists c \in [a,b]$, т.ч. $f(c) - \gamma = 0$, т.е. $f(c) = \gamma$. Если же γ совпадает либо с α, либо с β, то в качестве c можно взять соответственно a или b.

Следствие. *Непрерывный образ отрезка — отрезок, т.е. если $f \in C[a,b]$, то $f([a,b])$ является отрезком.*

Доказательство. В силу теорем Вейерштрасса II и о промежуточных значениях непрерывных функций непрерывным образом отрезка $[a, b]$ будет отрезок $[\inf\limits_{[a,b]} f(x), \sup\limits_{[a,b]} f(x)]$.

Последнее утверждение можно обратить: из того, что множеством значений функции, заданной на отрезке, также является отрезок можно сделать вывод о непрерывности функции, но при условии, что она монотонна.

Теорема 5(критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть f монотонна на $[a, b]$. Тогда для того, чтобы $f \in C[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f([a, b])$ был отрезком (с концами $f(a)$ и $f(b)$), т.е. чтобы $\forall\gamma$ из отрезка с концами $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in [a, b]$, т.ч. $f(c) = \gamma$.*

Доказательство. Необходимость содержится в приведенном выше следствии.

Докажем достаточность. Пусть для определенности $f \uparrow$. В этом случае в силу условий $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Предположим противное, т.е. что f не является непрерывной $\Rightarrow$ у f существует точка разрыва c. Пусть $c \in (a, b)$. Тогда в силу свойств монотонных функций $\exists f(c-0)$, $f(c+0)$, а так как c — точка разрыва, то $f(c-0) < f(c+0)$ и $f(c-0) \le f(c) \le f(c+0)$. Поскольку $f \uparrow$, то

$$\forall x \in [a, c): \ f(x) \le \sup_{[a,c)} f = f(c-0),$$

а

$$\forall x \in (c, b]: \ f(x) \ge \inf_{(c,b]} f = f(c+0).$$

Таким образом, $\forall x \in [a, c) \bigcup (c, b]$ получаем, что $f(x) \notin (f(c-0), f(c+0))$. Поэтому для $\forall\gamma \in (f(c-0), f(c+0))$, $\gamma \ne f(c)$, не существует $x \in [a, b]$ такого, чтобы $f(x) = \gamma$. Пришли к противоречию с условием теоремы о том, что функция f принимает все значения из отрезка $[f(a), f(b)]$.

В случае совпадения точки разрыва с одним из концов отрезка функция f не примет ни одного значения из интервала $(f(a), f(a+0))$, если $c = a$, и из интервала $(f(b - 0), f(b))$, если $c = b$. Теорема доказана.

Обратная функция, непрерывность обратной функции

Лемма 1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $f(E) = D$ и f строго монотонна на E. Тогда существует обратная функция $f^{-1}\colon D \to E$, имеющая тот же характер монотонности, что и функция f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f \uparrow\uparrow$ и $x_1 \neq x_2$ — произвольные точки множества E. Тогда либо $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$, либо $x_1 > x_2$ и $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f$ — инъекция, а так как $D = f(E)$, то f – биекция E на $D \Rightarrow \exists f^{-1}$.

Докажем, что $f^{-1} \uparrow\uparrow$ на D. Пусть $y_1 < y_2$ — произвольные точки из D, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Если бы $x_1 = x_2$, то $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, что противоречит выбору y_1 и y_2. Если бы $x_1 > x_2$, то в силу $f \uparrow\uparrow$: $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, что также приводит к противоречию. Следовательно, $x_1 < x_2$. Поскольку y_1 и y_2 выбраны произвольно, то лемма доказана.

Теорема 6(о непрерывности обратной функции). *Если функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция f^{-1} непрерывна на отрезке $f([a, b])$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f \uparrow\uparrow$. Поскольку $f \in C[a, b]$, то множество $f([a, b])$ является отрезком, а так как $f \uparrow\uparrow$, то $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. По лемме 1 на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена обратная функция f^{-1}. Так как $f^{-1} \uparrow\uparrow$ и $f^{-1}([f(a), f(b)]) = [a, b]$, то на основании критерия непрерывности монотонной функции $f^{-1} \in C[f(a), f(b)]$. Теорема доказана.

Замечание 4. Если f непрерывна и строго монотонна на интервале (a, b), то обратная функция будет непрерывной на интервале с концами $A = \inf_{(a,b)} f(x)$ и $B = \sup_{(a,b)} f(x)$ (A либо конечно, либо равно $-\infty$, B либо конечно, либо равно $+\infty$). Для этого надо доказать, что функция f^{-1} непрерывна в каждой точке интервала (A, B). Пусть для определенности $f \uparrow\uparrow$ на (a, b). Зафиксируем $y \in (A, B)$ и построим отрезок $[A', B'] \subset (A, B)$, т.ч. $y \in (A', B')$ (например, если A и B конечны, то отрезок $[A - \dfrac{d}{2}, B - \dfrac{d}{2}]$, где $d \doteq \min(y - A, B - y)$ обладает указанными свойствами). Положим $a' = f^{-1}(A')$, $b' = f^{-1}(B')$. Тогда $[a', b'] \subset (a, b)$ и потому $f \in C[a', b']$. Следовательно, по теореме о непрерывности обратной функции $f^{-1} \in C[A', B']$ Значит, $f^{-1} \in C(y)$. В силу произвольности точки y утверждение доказано. Для строго убывающих функций рассуждения аналогичны.

Замечание 5. В общем случае, если у непрерывной функции существует обратная функция, то она может и не быть непрерывной. Пусть f задана на $E = [0, 1) \bigcup [2, 3]$ следующим образом: $f(x) = x$ на $[0, 1)$ и $f(x) = 4 - x$ на $[2, 3]$. Эта функция непрерывна на E, у нее существует обратная f^{-1}, которая задается формулами $f^{-1}(y) = y$ на $[0, 1)$ и $f^{-1}(y) = 4 - y$ на $[1, 2]$, откуда следует, что $y = 1$ является точкой разрыва.

ЛЕКЦИЯ 15

Равномерная непрерывность

Пусть f: $E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$.

Определение 1. *Функция f равномерно непрерывна на множестве E, если $\forall\ \varepsilon\ >\ 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in E$, $|x' - x''| < \delta$: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Это определение можно переписать так: *функция f равномерно непрерывна на множестве E, если $\forall \varepsilon\ > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ > 0$, т.ч. $\forall x' \in E$ и $\forall x'' \in U(x', \delta) \bigcap E$: $f(x'') \in V(f(x'), \varepsilon)$.* Эта запись означает, что функция непрерывна в каждой точке $x' \in E$ (следовательно, функция, равномерно непрерывная на множестве, непрерывна на нем), причем выбор $\delta > 0$ определяется только ε и не зависит от точки x'.

То, что δ можно выбрать одним и тем же для всех точек множества означает, что функция "одинаково", "в равной мере" непрерывна в точках данного множества. Этим объясняется введение термина "равномерная непрерывность".

Очевидно, что если функция равномерно непрерывна на множестве, то она равномерно непрерывна и на любом его подмножестве.

Теорема 1(Кантор). *Если $f \in C[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного: пусть $f \in C[a, b]$, но не равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, что $\forall \delta > 0$ $\exists x'_\delta, x''_\delta \in [a, b]$, $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$, но $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta_n = 1/n \Rightarrow \exists x'_n, x''_n \in [a, b]$, $|x'_n - x''_n| < 1/n$, а $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$. Из последовательности (x'_n) точек отрезка $[a, b]$ выделим (по теореме Больцано–Вейерштрасса) сходящуюся подпоследовательность $x'_{n_k} \to c \in [a, b]$. Тогда и $x''_{n_k} \to c$. Это следует из неравенств $x'_{n_k} - 1/n_k < x''_{n_k} < x'_{n_k} + 1/n_k$ и леммы о зажатой последовательности $\Rightarrow$ в силу непрерывности f на $[a, b]$: $\lim_{k\to+\infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(x''_{n_k}) = f(c) \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}(f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) = 0$, что противоречит неравенству $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. Теорема доказана.

Примеры.

1. $f(x) = x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ Пусть x', x'' таковы, что $|x' - x''| < \delta$. Тогда $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta \Rightarrow$ неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ будет выполнено, если взять $\delta \in (0, \varepsilon]$ произвольным образом, например, $\delta \doteq \varepsilon$.

2. $f(x) = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной на $(0,1)$, хотя она непрерывна на этом интервале (непрерывность синуса и $1/x$ будет доказана в следующем разделе). Действительно, возьмем точки $x'_n = 1/(\pi n)$ и $x''_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|x'_n - x''_n| < 1/(\pi n)$ и $|\sin(1/x'_n) - \sin(1/x''_n)| = 1 \Rightarrow$ рассматриваемая функция не является равномерно непрерывной на $(0,1)$, так как для нее выполняется отрицание определения равномерной непрерывности на $(0,1)$.

Непрерывность элементарных функций

Многочлены и рациональные функции

1) Функция $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, так как $\forall a \in \mathbb{R}$ существует $\lim_{x\to a} f(x) = c = f(a)$ (см. теорему 2 лекции 9).

2) Функция $g(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно, зафиксируем $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $|x-a| < \delta$. Тогда $|f(x)-f(a)| = |x-a| < \delta$. Поэтому если положить $\delta \doteq \varepsilon$, то $\forall x \in \mathbb{R}$, т.ч. $|x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Значит, $f \in C(a)$.

3) Функция $h(x) = x^k = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{k}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ непрерывна в $\forall a \in \mathbb{R}$ как конечное произведение непрерывных функций.

4) Для любого натурального числа n многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ непрерывен во всех точках числовой прямой как конечная сумма непрерывных функций.

5) Рациональная функция $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены степеней n и m соответственно, непрерывна во всех точках $\mathbb{R}$, где $Q(x) \neq 0$ как отношение непрерывных функций.

Тригонометрические функции

1) Функция $\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — прозвольное. Возьмем любое число x, удовлетворяющее неравенству $|x-a| < \delta$, и оценим

$$|\sin x - \sin a| = 2|\sin((x-a)/2)\cos((x+a)/2)| \le 2|\sin((x-a)/2)| \le$$

$$|x-a| < \delta$$

(было использовано неравенство $|\sin t| \le |t|$, $t \in \mathbb{R}$, которое будет доказано в следующем разделе). Зададим $\varepsilon > 0$. Если выбрать $\delta \doteq \varepsilon$, то $\forall x$, для которых выполняется неравенство $|x-a| < \delta$, будем иметь $|\sin x - \sin a| < \varepsilon \Rightarrow \sin x \in C(\mathbb{R})$.

2) Функция $\cos x \in C(\mathbb{R})$, так как $\forall a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to a}\cos x = \lim_{x\to a}\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 - a) = \cos a$ (воспользовались непрерывностью композиции непрерывных функций $\sin x$ и многочлена $\pi/2 - x$).

3) Функция $\mathrm{tg}x = \sin x/\cos x$ непрерывна как частное двух непрерывных функций во всех точках, в которых $\cos x \neq 0$.

4) Функция $\mathrm{ctg}x = \cos x/\sin x$ непрерывна как частное двух непрерывных функций во всех точках, в которых $\sin x \neq 0$.

Функция $f(x) = a^x$, $a > 0$.

Поскольку при $a = 1$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ $a^x = 1$, то в дальнейшем функция a^x будет рассматриваться только при $a \neq 1$ и называться *показательной*, или *экспоненциальной*, функцией.

Не будем останавливаться на строгом определении функции a^x и доказательстве ее основных свойств, которые считаются известными. Также без доказательства принимается непрерывность этой функции на всей числовой прямой.

Выясним поведение функции a^x при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Покажем, что для $a > 1$: $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Действительно, поскольку $a^x \uparrow\uparrow$, то по теореме о пределе монотонной функции оба написанных предела существуют. Возьмем последовательность $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Поэтому согласно определению предела по Гейне $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ (см. лекцию 6). Для вычисления второго предела возьмем последовательность $y_n = -n$: $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{-n} = 0$.

При $0 < a < 1$: $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. Этот случай следует из рассмотренного в силу связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями, так как $a^x = (1/b)^x = 1/b^x$, где $b = 1/a > 1$.

Обратные функции

1) Функция $f(y) = y^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{y}$, $y \geq 0$, для $k = 2, 3, \ldots$ определяется как обратная функция к непрерывной, строго возрастающей на $[0, +\infty)$ функции x^k. Поэтому $\sqrt[k]{y} \uparrow\uparrow$. Покажем, что $\sqrt[k]{y}$ непрерывна на $[0, +\infty)$. Действительно, $x^k \in C[0, a]$ $\forall a > 0 \Rightarrow$ по теореме о непрерывности обратной функции $\sqrt[k]{y} \in C[0, a^k]$ $\forall a > 0 \Rightarrow \sqrt[k]{y} \in C[0, +\infty)$.

В силу непрерывности f в нуле: $\lim_{y\to 0+0} \sqrt[k]{y} = 0$. Так как для произвольного a образом отрезка $[0, a^k]$ при отображении $\sqrt[k]{y}$ будет отрезок $[0, a]$, то функция $\sqrt[k]{y}$ не ограничена на $[0, +\infty)$. Тогда по теореме о пределе монотонной функции $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[k]{y} = \sup_{y\geq 0} \sqrt[k]{y} = +\infty$.

Если k нечетно, то функция x^k строго возрастает на $\mathbb{R}$. Поэтому для таких k функцию x^k можно обратить и на всем $\mathbb{R}$. Обратная функция в этом случае обозначается тем же символом $y^{1/k} = \sqrt[k]{y}$, что и ранее. Она будет непрерывной уже на $(-\infty, +\infty)$.

2) Функция $g(y) = \log_a y$, $a > 0$, $a \neq 1$, определяется как обратная к строго монотонной и непрерывной функции $y = a^x$. Для $\forall r > 0$ функция $a^x \in C[-r, r] \Rightarrow \log_a y$ непрерывен на отрезке с концами a^{-r} и a^r $\forall r > 0 \Rightarrow \log_a y \in C(0, +\infty)$.

Далее, из свойств показательной функции (подобно тому, как это было сделано для $\sqrt[k]{y}$) следует, что при $a > 1$: $\lim_{y \to 0+0} \log_a y = -\infty$, $\lim_{y \to +\infty} \log_a y = +\infty$, а при $0 < a < 1$: $\lim_{y \to 0+0} \log_a y = +\infty$, $\lim_{y \to +\infty} \log_a y = -\infty$.

3) Аналогично доказывается, что обратные тригонометрические функции $\arccos x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg} x$ и $\mathrm{arcctg} x$ непрерывны в своей области определения.

Степенная функция

Степенная функция $h(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R}$, $x > 0$, определяется равенством $x^p \doteq e^{p \ln x}$. Она непрерывна при $x > 0$ как композиция непрерывных функций $y = e^t$ и $t = p \ln x$.

При $\forall p > 0$ $\exists \lim_{x \to 0+0} x^p = \lim_{x \to 0+0} e^{p \ln x} = 0$. Поэтому, положив по определению $h(0) = 0^p \doteq 0$, получим, что так доопределенная в нуле функция x^p будет непрерывна на $[0, +\infty)$. При тех же p: $\lim_{x \to +\infty} x^p = \lim_{x \to +\infty} e^{p \ln x} = +\infty$.

Для $\forall p < 0$ $\lim_{x \to 0+0} x^p = \lim_{x \to 0+0} e^{p \ln x} = +\infty$, а $\lim_{x \to +\infty} x^p = \lim_{x \to +\infty} e^{p \ln x} = 0$.

Непрерывными будут и любые функции, полученные из этих функций в результате применения в конечном числе арифметических действий и операций композиции.

ЛЕКЦИЯ 16

Замечательные пределы

I. Покажем, что $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Рассмотрим на координатной плоскости единичную окружность. Пусть A — точка пересечения этой окружности с осью Ox, B — точка окружности, т.ч. $\widehat{AOB}=x$, $0<x<\pi/2$. Проведем прямую, перпендикулярную оси Ox и проходящую через точку A. Обозначим через C точку пересечения OB с этим перпендикуляром.

Справедливо неравенство $0<S_{\triangle AOB}<S_{\text{сек.}AOB}<S_{\triangle AOC}$ ($S_{\text{сек.}AOB}$ — площадь сектора AOB окружности), т.е.

$$0<\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\mathrm{tg}x \;\Leftrightarrow\; 0<\sin x<x<\mathrm{tg}x.$$

Из неравенств $\sin x<x$ и $x<\mathrm{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ вытекает, что $\dfrac{\sin x}{x}<1$ и $\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. Из этих оценок следует, что

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \text{ при } x\in(0,\pi/2).$$

Поскольку функции $\dfrac{\sin x}{x}$, $\cos x$ и 1 — четные, то последнее неравенство выполняется и для $x\in(-\pi/2,0)$. Далее, $\cos x$ непрерывен в нуле, т.е. $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$. Тогда из полученного неравенства в силу леммы о зажатой функции следует доказываемое равенство.

Замечание. В ходе вычислений было доказано неравенство $0<\dfrac{\sin x}{x}<1$, если $x\in(-\pi/2,0)\bigcup(0,\pi/2)\Rightarrow\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$: $|\sin x|\le|x|$. Если $|x|\ge\pi/2$, то неравенство $|\sin x|<|x|$ очевидно, так как $\pi/2>1$, а $|\sin x|\le 1\ \forall x$. Таким образом, $\forall x\in\mathbb{R}$: $|\sin x|\le|x|$.

Примеры.

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$.

2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{x=\sin y}{=}\lim_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$.

II) Справедливы равенства $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$.

При их доказательстве воспользуемся тем, что $e=\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n$ (см. лекцию 7).

Сначала покажем, что $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$. Возьмем произвольное $x \geq 1$ и найдем $k \in \mathbb{N}$, т.ч. $k \leq x < k+1$. Из соображений монотонности имеем

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k \leq \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^x < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Заметим, что

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{-1} = e$$

и

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k}\right) = e.$$

Поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$: $(1+1/(k+1))^k,\ (1+1/k)^{k+1} \in V(e,\varepsilon) \Rightarrow \forall x > k_\varepsilon + 1$: $(1+1/x)^x \in V(e,\varepsilon)$, что доказывает равенство $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$.

Далее,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right) \overset{y=-x-1}{=}$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Из того, что $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = \lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x = e$ следует, что $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$.

Наконец, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \overset{x=1/y}{=} \lim_{y\to\infty}(y+1/y)^y = e$.

III. Докажем, что $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

В самом деле, $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}) = \ln e = 1$ (воспользовались теоремой о пределе композиции, непрерывностью логарифма и II).

III'. $\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)/x = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)/(x\ln a) = 1/\ln a$.

IV. Имеет место равенство $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Выполним замену переменной $y=e^x-1 \Leftrightarrow x=\ln(1+y)$ в данном пределе: $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x=\lim_{y\to 0}y/\ln(1+y)=1$.

IV' $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Доказывается так же, как и IV с учетом III'.

Сравнение функций: "O"–символика, эквивалентные функции

Пусть дана функция g: $E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$ и a — точка прикосновения множества E (точка a может быть как конечной, так и бесконечно удаленной).

Символом $o(g(x))$ (читается "о малое от $g(x)$") при $x\to a$ обозначается любая функции, имеющая вид $\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ — произвольная бмф при $x\to a$. Таким образом, $\varphi(x)=o(g(x))$ $(x\to a)$, если существует бесконечно малая при $x\to a$ функция $\beta(x)$, т.ч. $\varphi(x)=\beta(x)g(x)$. Если $g(x)$ — бесконечно малая при $x\to a$ функция и $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, то функция f называется бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем g.

Если $g(x)=1$ на множестве E, то для произвольной бмф $\alpha(x)$ произведение $\alpha(x)\cdot 1=\alpha(x)$, т.е. символ "о малое от единицы" — $o(1)$ — можно использовать для обозначения любой бесконечно малой при $x\to a$ функции.

Символом $O(g(x))$ (читается "О большое от $g(x)$") при $x\to a$ обозначается любая функция $f(x)$, для которой существуют окрестность $U(a)$ и постоянная $C>0$ такие, что в $\forall x\in U(a)\bigcap E$ эта функция по абсолютной величине не превосходит $C|g(x)|$. Таким образом, $h(x)=O(g(x))$ $(x\to a)$, если существует окрестность $U(a)$ и постоянная $C>0$ такие, что $\forall x\in U(a)\bigcap E$: $|h(x)|\leq C|g(x)|$ (выбор окрестности $U(a)$ и константы C зависит от функции h).

В предположении, что $g(x)\neq 0$ на E

$$f(x)=o(g(x))\text{ при }x\to a\ \Leftrightarrow\ \exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

$$f(x)=O(g(x))\text{ при }x\to a\ \Leftrightarrow\ \text{функция }\frac{f(x)}{g(x)}\text{ ограничена при }x\to a.$$

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, то $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$, ибо функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена при $x\to a$ как функция, имеющая предел в этой точке.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то как $f(x) = O(g(x))$, так и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$. Надо показать, что $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$. Действительно, из условия и свойств предела следует, что существует $\lim\limits_{x\to a} |\frac{g(x)}{f(x)}| = 1/|k| \Rightarrow$ $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$.

Определение. *$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, если $f(x) = \psi(x)g(x)$, где функция $\psi(x)$ такова, что $\lim_{x\to a}\psi(x) = 1$.*

Запись $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ читается так: "функция f эквивалентна функции g при $x \to a$".

Если $g(x) \neq 0$ на E, то

$$\text{Опр.} \ \Leftrightarrow \ \exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Примеры. Легко видеть, что $e^x/x = o(e^x)$ при $x \to +\infty$, $e^x/x = o(e^x)$ и $e^x/x = o(1/x)$ при $x \to -\infty$. При $x \to 0$: $\sin x/x \sim 1$, $\mathrm{tg}x/x^2 \sim 1/x$, $x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$.

Теорема 1. $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ $(x \to a)$.

Доказательство. Имеем $f \sim g$ $(x \to a) \Leftrightarrow f(x) = \psi(x)g(x)$, где $\lim_{x\to a}\psi(x) = 1$, т.е. $\psi(x) = 1 + o(1)$ при $x \to a \Leftrightarrow$ $f(x) = (1 + o(1))g(x) = g(x) + o(1)g(x) = g(x) + o(g(x))$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $f_1(x) \sim f(x)$, то пределы $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ и $\lim_{x\to a} f_1(x)g(x)$ существуют или не существуют одновременно. Если эти пределы существуют, то они равны.*

Доказательство. По определению $f_1(x) = \psi(x)f(x)$, где $\lim_{x\to a}\psi(x) = 1$. Пусть $\exists \lim_{x\to a} f(x)g(x) \Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f_1(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\psi(x)g(x) = \lim_{x\to a}(f(x)g(x))\psi(x) =$ $\lim_{x\to a} f(x)g(x) \lim_{x\to a}\psi(x) = \lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

Обратно: если $\exists \lim_{x\to a} f_1(x)g(x)$, то из представления $f(x)g(x) = f_1(x)g(x)\cdot 1/\psi(x)$ в силу того, что $\lim_{x\to a} 1/\psi(x) = 1$ вытекает равенство рассматриваемых пределов.

Если один из пределов не существует, то и другой не существует, ибо в противном случае по доказанному существовал бы исходный предел. Теорема доказана.

Приведенная теорема позволяет при вычислении пределов от произведений функций заменять сомножители на эквивалентные функции.

ЛЕКЦИЯ 17

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Пусть функция f задана в некоторой окрестности $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда функция $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ определена в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0.

Определение 1. *Предел* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *если он существует, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.*

Подчеркнем, что предел в определении берется по множеству $\dot{U}(x_0)$.

Пример. Если $f(x) = c$ на (α, β), то $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f'(x_0) = 0$. Действительно, функция $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ определена в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0, r)$, где $r = \min(x_0 - \alpha, \beta - x_0)$. Так как $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = 0$ в $\dot{U}(x_0, r)$, то $f'(x_0) = 0$.

Если ввести обозначения $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

(предел берется по множеству $\Delta x \neq 0$, точнее по множеству Δx, т.ч. $x_0 + \Delta x \in \dot{U}(x_0)$).

Если предел в определении производной равен $-\infty$, $+\infty$ или ∞, то производная $f'(x_0)$ называется бесконечной.

Определение 2. *Левой производной функции f в точке x_0 называют $f'_l(x_0) \doteq \lim_{\Delta x \to 0-0} \Delta f(x_0)/\Delta x$. Правой производной функции f в точке x_0 называют $f'_r(x_0) \doteq \lim_{\Delta x \to 0+0} \Delta f(x_0)/\Delta x$.*

Очевидно, что $\exists\, f'(x_0) \Leftrightarrow \exists\, f'_l(x_0)$, $f'_r(x_0)$ и $f'_l(x_0) = f'_r(x_0)$.

Дифференцируемые функции. Дифференциал

Пусть $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$.

Определение 3. *Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует число A, т.ч. в представлении приращения в точке x_0*

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

функция $\alpha(\Delta x)$ *является бесконечно малой функцией при* $\Delta x \to 0$.

В этом определении приращение Δx — произвольно, лишь бы $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ (в частности можно брать $\Delta x = 0$). Значит, функция $\alpha(\Delta x)$ определена в нуле. Поскольку $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $\alpha(\Delta x)$ из определения дифференцируемости непрерывна в нуле и (см. лекцию 10) $\alpha(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Множество всех дифференцируемых в точке x_0 функций обозначается символом $D(x_0)$. Запись $f \in D(x_0)$ означает, что функция дифференцируема в точке x_0, т.е.

$$f \in D(x_0) \;\Leftrightarrow\; \exists A \in \mathbb{R}, \text{ т.ч. } \Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что ее приращение Δf в точке x_0 как функция Δx линейно относительно Δx с точностью до бесконечно малой более высокого порядка.

Линейная функция $A\Delta x$ аргумента Δx называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается одним из символов df, $df(x_0)$, $df|_{x=x_0}$ или $df(x_0, \Delta x)$.

Итак, если $f \in D(x_0)$, то по определению

$$df(x_0, \Delta x) = A\Delta x \text{ и } \Delta f(x_0) = df(x_0, \Delta x) + o(\Delta x) \ (\Delta x \to 0).$$

Теорема 1. $f \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$. *При этом* $f'(x_0) = A$.

Доказательство. Пусть $f \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ $(\Delta x \to 0) \Rightarrow$ при $\Delta x \neq 0$: $\Delta f/\Delta x = A + \alpha(\Delta x)$. Поскольку $\lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta x \neq 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то $\exists \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x \neq o} \Delta f/\Delta x = A$, т.е. $\exists f'(x_0) = A$.

Пусть $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow$ при $\Delta x \neq 0$: $\Delta f/\Delta x = f'(x_0) + \beta(\Delta x)$, где $\beta(\Delta x) \to 0$, если $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta f = f'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x$, $\Delta x \neq 0$. Положив $\beta(0) = 0$, получим определение дифференцируемости функции в точке x_0 с $A = f'(x_0)$. Теорема доказана.

Если $f(x) = x$, то $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = \lim_{x \to x_0}(x - x_0)/(x - x_0) = 1$ $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow df \equiv dx = 1 \cdot \Delta x$, т.е. дифференциал независимой переменной x в произвольной точке x_0 совпадает с приращением Δx независимой переменной x в этой точке. Поэтому для симметрии записи приращение аргумента в определении дифференциала заменяют на dx: $df = Adx$. Отметим, что линейная функция Adx определена уже для $\forall dx \in \mathbb{R}$, а не только для dx таких, что $x_0 + dx \in U(x_0)$.

Из теоремы 1 следует, что дифференциал функции имеет вид $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Стало быть, $f'(x_0) = df(x_0)/dx$.

Теорема 2. *Если $f \in D(x_0)$, то $f \in C(x_0)$, т.е. $D(x_0) \subset C(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0)(\Delta x) + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, что равносильно непрерывности f в точке x_0 (см. лекцию 12).

Замечание. Обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = |x| \in C(0)$ как модуль от непрерывной функции, но не дифференцируема в 0. Действительно,

$$f_l'(0) = \lim_{x \to 0-0} (|x| - 0)/x = \lim_{x \to 0-0} (-x)/x = -1,$$

а

$$f_r'(0) = \lim_{x \to 0+0} (x - 0)/x = 1.$$

Поэтому $f \notin D(0)$.

Геометрический смысл производной и дифференциала.

Определимся, что понимать под кривой. Будем исходить из геометрических представлений: множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ назовем (непрерывной) кривой на плоскости, если оно является графиком некоторой (непрерывной) функции, заданной на некотором отрезке, т.е. если $\exists [a, b] \in \mathbb{R}$, $\exists f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, т.ч. $\Gamma = \{(x, f(x)) |\, x \in [a, b]\}$. В этом случае также говорят, что кривая Γ задана уравнением $y = f(x)$ или, просто, что задана кривая $y = f(x)$.

Определим касательную в точке к данной кривой. Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ а $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ — точки кривой $y = f(x)$. Проведем через точки M_0 и M прямую. Она называется *секущей.* Угловой коэфициент секущей $k(\Delta x) = \Delta f/\Delta x$.

Определение 4. *Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0, такая, что ее угловой коэффициент k равен пределу при $\Delta x \to 0$ угловых коэффициентов $k(\Delta x)$ секущих.*

В этом смысле говорят, что касательная есть предельное положение секущих.

Итак, у кривой существует касательная в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f/\Delta x = f'(x_0)$ (если x_0 совпадает с одной из концевых точек, то под производной понимается соответствующая односторонняя производная). Поэтому уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Геометрический смысл производной: число $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Геометрический смысл дифференциала: перенесем $f(x_0)$ в уравнении касательной налево, тогда

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = df(x_0),$$

т.е. дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.

Если $\lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$ (со знаком или без), то касательной называется вертикальная прямая с уравнением $x = x_0$. Таким образом, касательная вертикальна, если $f'(x_0)$ бесконечна.

Пример. Если $f(x) = \sqrt{|x|}$, то $f'(0) = \infty$, если $g(x) = \sqrt[3]{x}$, то $g'(0) = +\infty$.

Физический смысл производной: если $s = s(t)$ — длина пути, пройденного телом за время t, то $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ — длина пути, пройденного за время Δt, $v = \Delta s/\Delta t$ — средняя скорость движения на пути Δs, а $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t = v(t_0)$ — скорость тела в момент времени t_0 (мгновенная скорость), т.е. $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v = s'(t_0)$.

Свойства производной и дифференциала

Вычисление (взятие) производной функции называется *дифференцированием* функции.

Теорема 3(правила дифференцирования). *Пусть f, g: $U(x_0) \to \mathbb{R}$, f, $g \in D(x_0)$. Тогда*

1) $f \pm g \in D(x_0)$ и $(f \pm g)' = f' \pm g'$;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ функция $\lambda f \in D(x_0)$ и $(\lambda f)' = \lambda f'$;

3) $fg \in D(x_0)$ и $(fg)' = f'g + fg'$ (формула Лейбница);

4) если $g(x_0) \neq 0$, то $(f/g) \in D(x_0)$ и $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ (значения функций и производных берутся в точке x_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как

$$\Delta(f + g) = (f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = \Delta f + \Delta g,$$

то

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f + g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(воспользовались тем, что предел суммы равен сумме пределов при условии, что последние существуют). Для разности функций доказательство аналогично.

2. Следует из соответствующего свойства предела, т.к. $\Delta(\lambda f) = \lambda\Delta f$.

3. Имеем

$$\Delta(fg) = (fg)(x_0+\Delta x)-(fg)(x_0) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0) =$$

$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + f(x_0))g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$
$$\Delta f \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)\Delta g.$$

Учитывая, что $g \in C(x_0)$ как дифференцируемая в этой точке функция, согласно арифметическим свойствам предела функции имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x_0 + \Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x} =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. По условию $g(x_0) \neq 0$ и $g \in C(x_0)$ как функция, дифференцируемая в этой точке. Тогда по лемме о знаке $\exists U(x_0, \delta_0)$, в которой $g(x) \neq 0$. Поэтому $\forall \Delta x \neq 0$, т.ч. $x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta_0)$, имеет смысл $\Delta f/\Delta g$. Далее,

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} =$$

$$= \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + f(x_0))g(x_0) - g(x_0 + \Delta x)f(x_0)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$$
$$\frac{\Delta f \cdot g(x_0) - f(x_0)\Delta g}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)}.$$

Деля на $\Delta x \neq 0$ обе части этого равенства и переходя после этого к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем в силу арифметических свойств предела справедливость пункта 4. Теорема доказана.

Полученые правила дифференцирования и определение дифференциала приводят к следующим формулам для дифференциалов:

в условиях теоремы 1

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$;

2) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$, *в частности*, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$: $d(\lambda f) = \lambda df$;

3) $d(f/g) = (df \cdot g - f \cdot dg)/g^2$

(*значения функций и дифференциалов берутся в точке* x_0).

ЛЕКЦИЯ 18

Теорема 1 (производная сложной функции (цепное правило)). *Пусть* $f\colon U(x_0) \to V(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, $g\colon V(y_0) \to \mathbb{R}$, $f \in D(x_0)$, $g \in D(y_0)$. *Тогда сложная функция* $\psi(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in D(x_0)$ *и*

$$\psi'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $g \in D(y_0)$, то $\forall \Delta y$, т.ч. $y_0 + \Delta y \in V(y_0)$

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$ и $\alpha(0) = 0$.

В частности для $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)\Delta f + \alpha(\Delta f)\Delta f.$$

Но $g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = \Delta\psi$. Поэтому

$$\Delta\psi = g'(y_0)\Delta f + \alpha(\Delta f)\Delta f$$

и, разделив обе части полученного равенства на $\Delta x \neq 0$, получим, что

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \alpha(\Delta f)\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

По условию $f \in D(x_0)$. Значит, $f \in C(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ и, следовательно, по теореме о пределе композиции $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta f) = \alpha(0) = 0$. Таким образом, существуют пределы обоих слагаемых в правой части рассматриваемого равенства: предел первого слагаемого равен $g'(y_0)f'(x_0)$, а второго — нулю. Поэтому переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Следствие (инвариантность дифференциала). *В условиях теоремы* $d(g(f)) = g'df$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению дифференциала и цепному правилу

$$d(g(f))(x_0) = (g \circ f)'(x_0)dx = g'(y_0)f'(x_0)dx = g'(y_0)df(x_0),$$

т.е. $d(g(f)) = g'df$.

Эта формула показывает, что форма записи дифференциала имеет один и тот же вид независимо от того является ли аргумент рассматриваемой функции независимой переменной или, в свою очередь, является некоторой дифференцируемой функцией: в обоих случаях дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

Теорема 2(производная обратной функции). *Пусть* $f \in C(U(x_0))$, f *строго монотонна в* $U(x_0)$ *и* $\exists f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* f^{-1} *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$ *и* $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из строгой монотонности f следует, что у нее существует обратная функция f^{-1}, которая также является строго монотонной. Поэтому $f^{-1}(y) \neq x_0$ при $y \neq y_0$. Кроме того, $f^{-1} \in C(y_0)$ (теорема 3 лекции 14), т.е. $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$.

Далее, поскольку f строго монотонна, то функция $g(x) \doteq \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ определена в $\dot{U}(x_0)$. В силу условий теоремы и свойств предела

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Из сказанного выше следует, что при $y \neq y_0$ определена композиция

$$g(f^{-1}(y)) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

и по теореме о пределе композиции

$$\exists \lim_{y\to y_0} g(f^{-1}(y)) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{y\to y_0} g(f^{-1}(y)) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0).$$

Значит, $\exists (f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Замечания.

1. Условие $f \in C(U(x_0))$ гарантирует (см. теорему 2 лекции 14), что обратная функция f^{-1} определена в некоторой окрестности точки y_0. Следовательно, можно говорить о производной f^{-1} в точке y_0 и будут выполнены условия теоремы о пределе композиции.

2. Доказательство данной теоремы иллюстрирует, как можно обосновать существование предела функции с использованием теоремы о пределе композиции. Получить утверждение теоремы можно также, выполнив замену переменной $y = f(x)$ в пределе $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ и воспользовавшись замечанием из лекции 11.

Производные элементарных функций

Найдем производные элементарных функций.

1. $c' = 0$ (было доказано в лекции 17);

2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Действительно, используя формулу бинома Ньютона, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $x \neq 0$: $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$. Применяя формулы для производной функции x^n и дифференцирования дробей, получаем, что

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}, \text{ т.е. } (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$.

Вычислим сначала $(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0}(e^{x+\Delta x} - e^x)/\Delta x = e^x \lim_{\Delta x \to 0}(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x = e^x$ (воспользовались четвертым замечательным пределом). По правилу дифференцирования композиции, $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пусть $y = \log_a x$. Тогда по правилу дифференцирования обратной функции $(\log_a x)' = 1/(a^y)' = 1/(a^y \ln a) = 1/(x \ln a)$.

5. $(x^p)' = px^{p-1}$, $x > 0$, $p \neq 0$.

Действительно, $x^p = e^{p\ln x} \Rightarrow (x^p)' = (e^{p\ln x})' = e^{p\ln x}(p\ln x)' = x^p p/x = px^{p-1}$.

6. $(\sin x)' = \cos x$.

По определению производной $(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}(\sin(x+\Delta x) - \sin x)/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}(2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2))/\Delta x = \cos x$ (воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью косинуса).

7. $(\cos x)' = -\sin x$.

Действительно, $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$. Поэтому $(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = \cos(\pi/2 - x)(\pi/2 - x)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x$.

8. $(\mathrm{tg} x)' = 1/\cos^2 x$.

Действительно, $(\mathrm{tg} x)' = (\sin x/\cos x)' = ((\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)')/\cos^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)/\cos^2 x = 1/\cos^2 x$.

9. $(\mathrm{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.

Доказательство аналогично п. 8.

10. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Пусть $y = \arcsin x$, $x \in (-1,1) \Rightarrow y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \cos y > 0$. Далее, по правилу вычисления производной обратной функции $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = 1/\sqrt{1-x^2}$

11. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$.

Доказательство аналогично 10.

12. $(\mathrm{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.

Пусть $y = \mathrm{arctg} x$. По формуле для производной обратной функции $(\mathrm{arctg} x)' = 1/(\mathrm{tg} y)' = \cos^2 y = 1/(1+\mathrm{tg}^2 y) = 1/(1+x^2)$.

13. $(\mathrm{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

Доказательство аналогично п. 12.

14. $(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x$, $(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x$.

Доказательства сразу следуют из определений гиперболических синуса и косинуса: $(\mathrm{sh} x)' = ((e^x - e^{-x})/2)' = (e^x + e^{-x})/2 = \mathrm{ch} x$. Вторая формула доказывается аналогично.

15. $(\mathrm{th} x)' = 1/\mathrm{ch}^2 x$, $(\mathrm{cth} x)' = -1/\mathrm{sh}^2 x$.

Эти формулы следуют из правила дифференцирования дробей и легко проверяемого тождества $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, справедливого $\forall x \in \mathbb{R}$.

ЛЕКЦИЯ 19

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ для $\forall x \in U(x_0)$. Тогда в окрестности $U(x_0)$ определена функция $x \to f'(x)$.

Определение 1. *Если функция $f'\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют второй производной функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.*

Аналогично определяются производные более высоких порядков. А именно, если $f^{(n)}\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$, то $f^{(n+1)}(x_0) \doteq (f^{(n)})'(x_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $f^{(0)} \doteq f$.

Если $\exists f^{(n)}(x_0)$, то, согласно определению, функция и ее производные порядков, меньших n, заданы в некоторых окрестностях точки x_0. Выберем наименьшую окрестность и обозначим ее $V(x_0)$. Тогда f, f',…,$f^{(n-1)}\colon V(x_0) \to \mathbb{R}$, т.е. если $\exists f^{(n)}(x_0)$, то можно считать, что сама функция и ее производные до порядка $n-1$ включительно заданы в одной и той же окрестности точки x_0.

Определение 2. *Если у функции f в некоторой окрестности точки x_0 $\exists f^{(n-1)}(x)$ и $f^{(n-1)}(x)$ дифференцируема в точке x_0, то функцию f называют n раз дифференцируемой в точке x_0 и при этом пишут $f \in D^n(x_0)$.*

Условие $f \in D^n(x_0) \Leftrightarrow \exists f^{(n)}(x_0)$. Действительно, по определению, $f \in D^n(x_0) \Leftrightarrow f^{(n-1)}(x) \in D(x_0)$, что согласно доказанному ранее (теорема 1 лекции 16) $\Leftrightarrow \exists (f^{(n-1)}(x))'|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)$.

Примеры.

1. Очевидно, что $(e^x)^{(n)} = e^x$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства: $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$ и $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$. Действительно, эти равенства следуют из формул $(\cos(x+a))' = \cos'(x+a) = -\sin(x+a) = \cos(x + a + \pi/2)$ и $(\sin(x+a))' = \sin'(x+a) = \cos(x+a) = \sin(x+a+\pi/2)$, справедливых $\forall a \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть f, $g \in D^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ — произвольны. Тогда $\lambda f + \mu g \in D^n(x_0)$, $fg \in D^n(x_0)$ и*

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)},$$

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g' + \cdots + C_n^n f^{(0)} g^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j f^{(j)} g^{(n-j)},$$

где $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ — биномиальные коэффициенты (значения функций и всех производных взяты в точке x_0).

Доказательство. Справедливость обеих формул устанавливается методом математической индукции. Докажем последнюю формулу. При $n = 1$ утверждение истинно (это формула Лейбница для производной произведения). Пусть при $n = k$ формула верна. Докажем ее справедливость для $n = k + 1$. Имеем:

$$(fg)^{(k+1)} = ((fg)^{(k)})' = (C_k^0 f^{(k)} g^{(0)} + C_k^1 f^{(k-1)} g' + \dots + C_k^k f^{(0)} g^{(k)})' =$$

$$C_k^0 f^{(k+1)} g^{(0)} + C_k^0 f^{(k)} g' + C_k^1 f^{(k)} g' + C_k^1 f^{(k-1)} g'' + \dots + C_k^k f^{(0)} g^{(k+1)} =$$

$$C_{k+1}^0 f^{(k+1)} g^{(0)} + C_{k+1}^1 f^{(k)} g' + \dots + C_{k+1}^{k+1} f^{(0)} g^{(k+1)}$$

(сначала воспользовались предположением индукции, затем — формулой Лейбница и свойствами биномиальных коэффициентов $C_k^{j-1} + C_k^j = C_{k+1}^j$ и $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1$). Формула доказана.

Пусть у функции f в некоторой окрестности точки x_0 существует дифференциал $df = f'(x)dx$, который будем называть первым дифференциалом. Тогда df зависит от x и от приращения независимой переменной $dx = \Delta x$: $df = df(x, dx)$. Зафиксируем dx. В этом случае первый дифференциал df будет функцией только переменной x. Предположим, что $\exists f''(x_0)$. Тогда $\exists\ (df)'|_{x=x_0} = (f'(x)dx)'|_{x=x_0} = dx\ (f'(x))'|_{x=x_0} = f''(x_0)dx$. Следовательно, по определению дифференциала

$$d(df)(x_0) = (df)'|_{x=x_0}\, \delta x = f''(x_0) dx \delta x,$$

где δx — новое приращение независимой переменной x (оно может не совпадать с зафиксированным старым приращением $dx = \Delta x$).

Определение 3. *Дифференциал от первого дифференциала $df = f'(x)dx$, рассматриваемого как функция только переменной x, при условии, что новое приращение δx переменной x совпадает с первоначальным, называется вторым дифференциалом $d^2 f$ функции f в точке x_0.*

Итак, если $f \in D^2(x_0)$, то

$$d^2 f(x_0) \doteq d(df(x, dx))|_{x=x_0} \doteq (df)'|_{x=x_0}\, dx = f''(x_0)(dx)^2 = f''(x_0) dx^2$$

(вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2). Второй дифференциал в точке x_0 также обозначают $d^2 f(x_0, dx)$.

Аналогично вводятся дифференциалы третьего, четвертого и т.д. порядков. Поэтому если $f \in D^n(x_0)$, то дифференциал n–го порядка $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$. Отметим, что дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности.

Производная функции, заданной параметрически

Пусть на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ (например, интервале) задана пара функций: $x(t)$, $y(t)$, причем $x(t)$ строго монотонна на D. В этом случае на множестве $E = x(D)$ существует обратная функция $t = t(x)$, для которой D является множеством значений. Следовательно, на множестве E определена функция $Y(x) = y(t(x))$, про которую говорят, что она задана параметрически функциями $x(t)$, $y(t)$ (или уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$). Как следует из определения, функция Y принимает в точке x значение, равное $y = y(t)$, где t таково, что $x(t) = x$.

Пусть $x(t), y(t) \in D(t_0)$, $x(t) \in C(U(t_0))$ и $x'(t_0) \neq 0$. По теореме о производной обратной функции в точке $x_0 = x(t_0)$ $\exists t'(x_0) = 1/x'(t_0)$. Тогда функция $Y(x) = y(t(x))$ дифференцируема в точке x_0 как композиция дифференцируемых функций и

$$Y'(x_0) = y(t(x))'|_{x=x_0} = y'(t(x))|_{x=x_0} \cdot t'(x)|_{x=x_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Если приведенные условия на $x(t)$ и $y(t)$ выполнены во всей окрестности $U(t_0)$, то во всех точках $x = x(t)$ определена производная $Y'(x)$ и ее значение в точке $x = x(t)$ равно $y'(t)/x'(t) \Rightarrow$ функция $Y'(x)$ задается параметрически функциями $y'(t)/x'(t)$ и $x(t)$. Поэтому, чтобы вычислить $Y''(x_0) = (Y'(x))'|_{x=x_0}$, надо применить полученную формулу нахождения производной к параметрически заданной функции $Y'(x)$. Значит, если $x(t), y(t) \in D^2(t_0)$, то

$$Y''(x_0) = \frac{(\frac{y'(t)}{x'(t)})'|_{t=t_0}}{x'(t_0)} = \frac{y''(t_0)x'(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0))^3}.$$

Локальный экстремум

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$.

Определение 4. *Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если $\exists U(x_0)$, т.ч. $\forall x \in \dot{U}(x_0) \bigcap E$: $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.*

x_0 — точка строгого локального максимума (минимума) функции f, если $\exists U(x_0)$, т.ч. $\forall x \in \dot U(x_0) \bigcap E$: $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Определение 5. *Точки (строго) локального максимума и минимума функции называются точками ее (строго) локального экстремума.*

Таким образом, точка x_0 является точкой локального экстремума $f \Leftrightarrow \exists U(x_0)$, т.ч. $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ не меняет знак $\forall x \in \dot U(x_0) \bigcap E$.

Само значение $f(x_0)$ в точке локального максимума (минимума) называется локальным максимумом (минимумом) функции f.

Теорема 2(Ферма). *Если функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности x_0 — точка локального максимума. Без ограничения общности можно считать, что $\forall x \in \dot U(x_0)$: $f(x) \le f(x_0)$. Из дифференцируемости f в точке x_0 следует, что существуют левая $f'_l(x_0)$ и правая $f'_r(x_0)$ производные в точке x_0 и $f'_l(x_0) = f'_r(x_0) = f'(x_0)$. Если $x < x_0$, то $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) = f'_l(x_0) \ge 0$; если $x > x_0$, то $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \le 0 \Rightarrow f'(x_0) = f'_r(x_0) \le 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Аналогично рассматривается случай локального минимума.

Определение 6. *Точка $x \in E$ называется внутренней точкой множества E, если $\exists U(x) \subset E$, т.е. точка x входит в множество E вместе с некоторой своей окрестностью.*

Примеры.

1. Любая точка интервала (a, b), $a < b$, является внутренней. Действительно, $\forall x \in (a, b)$ положим $r = \min(x - a, b - x) \Rightarrow U(x, r) \subset (a, b)$.

2. Для полуинтервала $[a, b)$ точка a не является внутренней, так как в любую окрестность точки a входят точки, не принадлежащие $[a, b)$.

Замечание. Теорема Ферма дает необходимое условие того, что внутренняя точка области определения дифференцируемой функции является точкой локального экстремума.

Пример. Пусть $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Точки $x = 0$ и $x = 1$ являются точками локального минимума и максимума соответственно, а $f'_r(0) = 1$ и $f'_l(1) = 1$.

Определение 7. *Функция f дифференцируема на интервале (a, b), если $\forall x \in \ (a, b)$ функция $f \in D(x)$.*

Класс всех дифференнцируемых на (a, b) функций обозначается $D(a, b)$. Запись $g \in D(a, b)$ означает, что функция g дифференцируема на интервале (a, b).

Поскольку $f \in D(x) \Leftrightarrow \exists f'(x)$, то $f \in D(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b)\ \exists f'(x)$.

Через $D[a, b]$ обозначается класс функций, дифференцируемых на интервале (a, b) и имеющих левую и правую производные в точках a и b соответственно, т.е. $f \in D[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in (a, b)\ \exists f'(x)$ и, кроме того, $\exists f'_r(a)$ и $f'_l(b)$.

Дифференциальные теоремы о среднем

Теорема 3(Ролль). *Если* $f \in C[a, b] \bigcap D(a, b)$, $f(a) = f(b)$, *то* $\exists c \in (a, b)$, *т.ч.* $f'(c) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in C[a, b]$, то по 2–й теореме Вейерштрасса $\exists x_1,\ x_2 \in [a, b]$, т.ч. $\forall x \in [a, b]$: $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$. Если $f(x_1) = f(x_2)$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b] \Rightarrow \forall x \in (a, b)$: $f'(x) = 0 \Rightarrow$ в качестве c можно взять любую точку интервала (a, b).

Если $f(x_1) \ne f(x_2)$, то хотя бы одна из точек x_1, x_2 не совпадает с концевыми точками отрезка $[a, b]$, ибо по условию $f(a) = f(b) \Rightarrow$ хотя бы одна из точек x_1 и x_2 принадлежит интервалу (a, b) и при этом является точкой локального экстремума. В такой точке по теореме Ферма производная обращается в нуль. Теорема доказана.

Замечание. Из условия $f \in D(a, b)$, конечно, следует, что $f \in C(a, b)$. Поэтому требование $f \in C[a, b]$ привносит лишь то, что функция f должна быть непрерывной в точках a и b.

Все условия теоремы Ролля существенны. Если хотя бы одно условие нарушено, то можно построить функцию, для которой теорема Ролля не имеет места:

1) условие непрерывности $f \in C[a, b]$: $f(x) = x$ при $x \in [-1, 1)$, $f(1) = 0$;

2) условие дифференцируемости $f \in D(a, b)$: $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$;

3) условие $f(a) = f(b)$: $f(x) = x$ на $[-1, 1]$.

В этих примерах производная функции f ни в одной точке интервала $(-1, 1)$ не обращается в нуль.

ЛЕКЦИЯ 20

Теорема 1(Лагранж). *Пусть* $f \in C[a,b]\bigcap D(a,b)$. *Тогда* $\exists c \in (a,b)$, *т.ч.* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную функцию $\Phi(x)=f(x)-\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Ясно, что $\Phi(x)\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ и $\Phi'(x)=f'(x)-\lambda$. Подберем число λ так, чтобы $\Phi(a)=\Phi(b)$: $f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b$. Из этого равенства находим, что $\lambda=(f(b)-f(a))/(b-a)$. При таком выборе λ по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)$, т.ч. $0=\Phi'(c)=f'(c)-\lambda$, т.е. $f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ *и* $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$. *Тогда* $f(x)$ *постоянна на* $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x\in(a,b]$ — произвольная точка. Применим к отрезку $[a,x]$ теорему Лагранжа, все условия которой выполнены: $\exists c\in(a,x)$, т.ч. $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0$, т.е. $\forall x\in(a,b]$: $f(x)=f(a)$. Следствие доказано.

Теорема Лагранжа связывает приращение функции на отрезке $[a,b]$ с приращением аргумента $b-a$ (поэтому ее еще называют теоремой о конечных приращениях).

Замечание 1. Всякую точку $c\in(a,b)$ можно представить в виде $c=a+\theta(b-a)$, где $\theta=\theta(c)\in(0,1)$ (действительно, $c=a+\dfrac{c-a}{b-a}(b-a)$, т.е. $\theta=\dfrac{c-a}{b-a}$). Тогда заключение теоремы Лагранжа можно записать так: $\exists\theta\in(0,1)$, т.ч. $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$.

Геометрический смысл формулы Лагранжа: $(f(b)-f(a)/(b-a)$ — это угловой коэффициент хорды, стягивающей точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$, а $f'(c)$ — это угловой коэффициент касательной в точке $(c,f(c))\Rightarrow$ теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка, в которой касательная параллельна хорде.

Теорема 2(Коши). *Пусть*

1) $f,\ g\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$;
2) $g'(x)\neq0\ \forall x\in(a,b)$.

Тогда $\exists c\in(a,b)$, *т.ч.* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что $g(b)\neq g(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля $g'(d)=0$ в некоторой точке d интервала (a,b). Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-\lambda g(x)$. Очевидно, что $\varphi\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$. Подберем число λ из условия $\varphi(a)=\varphi(b)$. Тогда $\lambda=(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))$. При таком выборе λ по теореме Ролля $\exists c\in(a,b)$, т.ч. $0=\varphi'(c)=$

$f'(c) - \lambda g'(c)$, т.е. $f'(c)/g'(c) = \lambda = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема Лагранжа следует из теоремы Коши, если положить $g(x) = x$.

Производная и монотонность функций

Теорема 3. *Пусть* $f \in C[a,b] \bigcap D(a,b)$. *Если* $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) *на* (a,b), *то* $f \uparrow$ *(соответственно* $f \uparrow\uparrow$*) на* $[a,b]$. *Если* $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) *на* (a,b), *то* $f \downarrow$ *(соответственно* $f \downarrow\downarrow$*) на* $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a,b). Возьмем $\forall x_1$, $x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$, получим, что $\exists c \in (x_1, x_2)$, т.ч. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f \uparrow$ на $[a,b]$.

Если $f'(x) > 0$ на (a,b), то повторяя приведенные выше рассуждения, получим строгое возрастание f на $[a,b]$.

Случай неположительной (строго отрицательной) производной исследуется точно так же.

Теорема 4. *Пусть* $f \in D(a,b)$. *Если* $f \uparrow$ ($f \uparrow\uparrow$) *на* (a,b), *то* $f'(x) \geq 0$ *на* (a,b). *Если* $f \downarrow$ ($f \downarrow\downarrow$) *на* (a,b), *то* $f'(x) \leq 0$ *на* (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \uparrow$ ($f \uparrow\uparrow$) на (a,b) и x_0 — произвольная точка интервала (a,b). Тогда $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \geq 0$ (> 0) для $x \neq x_0$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем, что $f'(x_0) \geq 0$. В силу произвольности x_0 заключаем, что $f' \geq 0$ на (a,b).

Для убывающих (строго убывающих) функций доказательство аналогично.

Замечание 3. Если $f \uparrow\uparrow$ на (a,b), то ее производная может обращаться в нуль: $f(x) = x^3 \uparrow\uparrow$, а $f'(x) = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$.

Правило Лопиталя

I. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 5. *Пусть* f, g*:* $U(x_0) \to \mathbb{R}$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\exists f'(x_0)$, $g'(x_0)$, *причем* $g'(x_0) \neq 0$ *(производные конечные). Тогда* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = f'(x_0)/g'(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

(все функции, стоящие под знаком предела, имеют смысл: согласно условию $g'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ по лемме о знаке в некоторой проколотой окрестности точки x_0 дробь $(g(x) - g(x_0))/(x - x_0) \neq 0 \Rightarrow$ в этой же проколотой окрестности функция $g(x) = g(x) - g(x_0) \neq 0$).

Теорема 6. *Пусть*

1) $f,\, g \in D(a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$;

2) $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b);

3) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$;

4) $\exists$ *конечный или бесконечный* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

Тогда $\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим функции f и g в точке $x = a$ по непрерывности, т.е. положим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда так продолженные в точку a функции f и g при $\forall x \in (a, b)$ будут удовлетворять теореме Коши о среднем на отрезке $[a, x]$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ где } c = c(x) \in (a, x).$$

Поскольку при $x \to a$ также и $c \to a$, то по теореме о пределе композиции $\exists \lim_{x\to a} f'(c)/g'(c) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Поэтому переходя к пределу в приведенном выше равенстве, получаем, что $\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если функции* $f, g \colon \dot{U}(a) \to \mathbb{R}$, *таковы, что*

1) $f, g \in D(\dot{U}(a))$, $a \in \mathbb{R}$,

2) $g' \neq 0$ *в* $\dot{U}(a)$,

3) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *и*

4) $\exists \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ *(конечный или бесконечный).*

Тогда $\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, применяя теорему 6, получаем, что $\exists \lim_{x\to a+0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a+0} f'(x)/g'(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Аналогично $\exists \lim_{x\to a-0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Тогда из критерия существования предела следует, что $\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

II) Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 7. *Пусть*

1) $f,\, g \in D(a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$;

2) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$;

3) $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Тогда

i) если существует конечный $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = p$, *то* $\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = p$;

ii) если $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \infty$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *то* $\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *i)* Шаг 1. Если $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = p \in \mathbb{R}$, то $f'(x)/g'(x)$ ограничена в некоторой односторонней проколотой окрестности точки a. В силу свойства локальности предела (см. лекцию 10) можно полагать, что интервал (a,b) совпадает с этой окрестностью. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in (a,b)$: $|f'(x)/g'(x)| \le M$. Так как $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, то на основании замечания к лемме о знаке (см. лекцию 10) также можно считать, что $g(x) \ne 0$ на (a,b).

Шаг 2. Зафиксируем $x_0 \in (a,b)$ и пусть $x \in (a, x_0)$ — произвольно. Функции f и g удовлетворяют всем условиям теоремы Коши на отрезке $[x, x_0]$. Поэтому существует точка $c = c(x, x_0) \in (x, x_0)$, т.ч.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Выразим из этого соотношения $f(x)/g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Стало быть,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - p = \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - p\right) + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Поскольку $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, то второе слагаемое стремится к нулю при $x \to a$. Третье слагаемое также стремится к нулю при $x \to a$, ибо дробь $f'(x)/g'(x)$ ограничена на (a,b). Про первое слагаемое этого утверждать нельзя, т.к. неизвестно поведение точки c при $x \to a$.

Шаг 3. Сделаем малым первое слагаемое за счет выбора точки x_0. Действовать будем следующим образом. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x \in (a, a+\delta_1)$: $|f'(x)/g'(x) - p| < \varepsilon$. Возьмем $x_0 = a + \delta_1/2$ (отметим, что выбор x_0 зависит от ε, ибо $x_0 = x_0(\delta_1(\varepsilon)) = x_0(\varepsilon)$). А тогда $c \in (x, x_0) \subset (a, a+\delta_1)$ и, следовательно, $|f'(c)/g'(c) - p| < \varepsilon$.

Далее, поскольку $\lim_{x\to a} 1/g(x) = 0$, то для данного ε $\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0) = \delta_2(\varepsilon)$, т.ч. $\forall x \in (a, a+\delta_2)$: $|f(x_0)/g(x)| < \varepsilon$, $|g(x_0)/g(x)| < \varepsilon$. Значит, $\forall x \in (a, a+\delta/2)$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - p\right| \le \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - p\right| + \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| <$$
$$\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = \varepsilon(2+M).$$

В силу произвольности ε пункт $i)$ доказан.

Пусть теперь $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \infty$. Тогда $f'(x) \neq 0$ в некоторой проколотой односторонней окрестности точки a и $\lim_{x\to a} g'(x)/f'(x) = 0$. По условию $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, поэтому согласно доказанному $\exists \lim_{x\to a} g(x)/f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$. Теорема доказана.

Правило Лопиталя применимо для нахождения предела $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ и в том случае, когда функции $f, g \in D(\dot{U}(a))$, $g' \neq 0$ на $\dot{U}(a)$, если выполнены остальные условия теоремы 7. Это доказывается также, как и следствие из теоремы 6.

Замечание 4. Правило Лопиталя остается в силе при раскрытии неопределенностей, если $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ или $x \to \infty$. Действительно, пусть, скажем, $x \to +\infty$ и функции f и g удовлетворяют условиям теоремы 6 или 7 на $(b, +\infty)$. С помощью замены $x = 1/t$ этот случай сводится к рассмотренным выше:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to0+0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} =$$
$$\lim_{t\to0+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(чтобы обосновать законность написанной цепочки равенств, ее надо читать справа налево, ибо последний предел (конечный или бесконечный) существует по предположению, а остальные равенства справедливы на основании либо теоремы о пределе композиции, либо правила Лопиталя.)

Примеры.

1. $\forall p > 0$: $\lim_{x\to+\infty} \ln x/x^p = \lim_{x\to+\infty}(1/x)/(px^{p-1}) = \lim_{x\to+\infty} 1/(px^p) = 0$;

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\ln^n x/x^p = \underbrace{\ln x/x^{p/n} \cdot \ldots \cdot \ln x/x^{p/n}}_{n} \to 0$ при $x \to +\infty$ как произведение n множителей, стремящихся к нулю.

Поэтому $\forall p$, $q > 0$ $(x > e)$: $\ln^q x/x^p \le \ln^{[q]+1} x/x^p \to 0$ $(x \to +\infty)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a > 1$: $\lim_{x\to+\infty} x^n/a^x = \lim_{x\to+\infty}(nx^{n-1})/(a^x \ln a) = \lim_{x\to+\infty}(n(n-1)x^{n-2})/(a^x(\ln a)^2) = \ldots = \lim_{x\to+\infty} n!/(a^x(\ln a)^n) = 0$.

Отсюда следует (см. п. 1)), что $\forall p > 0$, $\forall a > 1$: $\lim_{x\to+\infty} x^p/a^x = 0$.

3. $\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{x\to0+0} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x\to0+0} \ln x/x^{-\varepsilon} = \lim_{x\to0+0}(1/x)/(-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}) = \lim_{x\to0+0}(-x^\varepsilon/\varepsilon) = 0$.

В этих примерах использованы результаты лекции 15, касающиеся поведения степенной и показательной функций.

ЛЕКЦИЯ 21

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть $f \in D(x_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ $(x \to x_0)$. Таким образом, если $f \in D(x_0)$, то существует многочлен $P_1(x, f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ степени не выше первой, т.ч.

$$P_1(x_0, f) = f(x_0),\ P_1'(x_0, f) = f'(x_0) \text{ и } f(x) - P_1(x, f) = o(x - x_0)$$

при $x \to x_0$.

Пусть теперь $f \in D^n(x_0)$. Убедимся, что многочлен

$$P_n(x, f) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

обладает следующим свойством:

$$P_n(x_0, f) = f(x_0),\ P_n'(x_0, f) = f'(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0, f) = f^{(n)}(x_0),$$

т.е. в точке x_0 значение многочлена $P_n(x, f)$ и всех его производных до порядка n включительно совпадает с соответствующими значениями функции f и ее производных в этой точке. Действительно, из определения следует, что $P_n(x_0, f) = f(x_0)$. Далее,

$$P_n'(x, f) = f'(x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1},$$

$$P_n''(x, f) = f''(x_0) + \sum_{k=3}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x - x_0)^{k-2}, \ldots, P_n^{(n)}(x, f) = f^{(n)}(x_0).$$

Отсюда заключаем, что в точке x_0 имеют места равенства $P_n^{(l)}(x_0, f) = f^{(l)}(x_0)$, $l = 1, \ldots, n$.

Для удобства записи полагаем, что $f^{(0)}(x) \doteq f(x)$, $0! \doteq 1$ и $0^0 \doteq 1$.

Определение 1. *Для* $f \in D^n(x_0)$ *многочлен*

$$P_n(x, f) \doteq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0.

Представление

$$f(x)=P_n(x,f)+r_n(x)$$

называется *формулой Тейлора*, а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x,f)$$

остаточным членом формулы Тейлора порядка n.

Теорема 1(формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $f\in D^n(x_0)$. Тогда*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\ x\to x_0,$$

т.е. $r_n(x)=f(x)-P_n(x,f)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$.

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно равенству

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k)/(x-x_0)^n=0.$$

По правилу Лопиталя (вторая теорема), примененного $n-1$ раз, имеем

$$p\doteq\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}$$

(использование правила Лопиталя было законным, т.к. все его условия выполнены). Далее правило Лопиталя в виде теоремы 2 из лекции 20 не применимо, ибо по условию производная n–го порядка существует только в точке x_0.

Поскольку $f^{(n-1)} \in D(x_0)$, то в силу арифметических свойств предела

$$p = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} - \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} =$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. На последнем шаге доказательства теоремы 1 можно было применить теорему 1 лекции 20.

Теорема 2. *Пусть функция g задана в окрестности точки x_0 и для нее имеет место представление $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0)$. Тогда это представление единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$. Положим $c_k = a_k - b_k$. Тогда

$$0 = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \qquad (1)$$

Переходя в (1) к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$. После деления (1) на $x - x_0$ придем к равенству

$$0 = c_1 + c_2(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

Вновь перейдя к пределу при $x \to x_0$, обнаружим, что $c_1 = 0$.

Повторяя проведенные рассуждения, получим, что $c_2 = \ldots = c_n = 0 \Rightarrow a_k = b_k$ для всех $k = 0, \ldots, n$.

Из доказанной теоремы следует важное утверждение: если для n раз дифференцируемой в точке x_0 функции f получено представление $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0)$, то это представление является ее разложением по формуле Тейлора, т.е. $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, \ldots, n$.

Замечание 1. Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано называют также локальной формулой Тейлора, а формулу Тейлора в точке $x_0 = 0$ — формулой Маклорена.

Замечание 2. Так как $d^k f(x_0, dx) = f^{(k)}(x_0)dx^k = f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$, то многочлен Тейлора порядка n функции f в точке x_0 можно записать в следующем виде

$$P_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x_0, dx).}{k!}.$$

Формулы Тейлора некоторых элементарных функций

1. Поскольку для $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $\sin^{(k)} x = \sin(x + k\pi/2)$, то в нуле отличны от нуля производные только нечетных порядков $\Rightarrow$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),\ x \to 0,$$

(остаточный член этой формулы Тейлора записан как $o(x^{2n})$, а не как $o(x^{2n-1})$, так как $\sin^{(2n)} 0 = 0$.)

2. Поскольку для $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $\cos^{(k)} x = \cos(x + k\pi/2)$, то в нуле отличны от нуля производные только четных порядков $\Rightarrow$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

3. Так как $(e^x)^k = e^x$ для $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$, то

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0.$$

4. Пусть $p \neq 0$ и $x \in \mathbb{R}$ — произвольны. Тогда $((1+x)^p)' = p(1+x)^{p-1}$, $((1+x)^p)'' = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \ldots, ((1+x)^p)^{(k)} = p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)(1+x)^{p-k}$. Поэтому

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\ x \to 0.$$

5. Пусть $x > 0$ — произвольно. Так как $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$, $(\ln(1+x))'' = -1/(1+x)^2$, $(\ln(1+x))''' = 2/(1+x)^3, \ldots, (\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k+1}(k-1)!/(1+x)^k$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x \to 0.$$

Теорема 3(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть* $f \in D^{n+1}(U(x_0))$. *Тогда* $\forall x \in U(x_0)$ $\exists \theta \in (0,1)$, *т.ч.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $x \neq x_0$, т.к. для $x = x_0$ формула справедлива (θ можно брать любым). Как следует из свойств многочлена Тейлора, остаточный член

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

формулы Тейлора обладает тем свойством, что $r_n(x_0) = 0$, $r'(x_0) = 0, \dots, r^{(n)}(x_0) = 0$ и $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Теперь введем вспомогательную функцию

$$q(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

и рассмотрим отношение $r_n(x)/q(x)$. Поскольку $q(x_0) = 0$, $q'(x_0) = 0, \dots, q^{(n)}(x_0) = 0$, то последовательно применяя теорему Коши, получим, что

$$\frac{r_n(x)}{q(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{q(x) - q(x_0)} = \frac{r'_n(c_1)}{q'(c_1)} = \frac{r'_n(c_1) - r'_n(x_0)}{q'(c_1) - q'(x_0)} =$$

$$= \frac{r''_n(c_2)}{q''(c_2)} = \frac{r''_n(c_2) - r''_n(x_0)}{q''(c_2) - q''(x_0)} = \dots = \frac{r_n^{(n+1)}(c_{n+1})}{q^{(n+1)}(c_{n+1})},$$

где точка c_1 лежит между точками x и x_0, c_2 — между c_1 и x_0 и т.д. Ввиду того, что $\forall x \in U(x_0)$ $q^{(n+1)}(x) = 1$, а $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ из полученного равенства следует, что

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Так как точка c_{n+1} принадлежит интервалу с концами в точках x и x_0, то $\exists\theta \in (0, 1)$, т.ч. $c_{n+1} = x_0 + \theta(x - x_0)$ Теорема доказана.

Замечание. Анализ доказательства теоремы показывает, что утверждение остается в силе для функций $f \in C^n(U(x_0)) \cap D^{n+1}(\dot{U}(x_0))$, где через $C^n(U(x_0))$ обозначается класс функций, обладающих непрерывной в $U(x_0)$ производной порядка n.

ЛЕКЦИЯ 22

Теория экстремума

Точки локальных максимумов, минимумов и экстремумов будем обозначать locmax, locmin и locextr соответственно.

Теорема 1(необходимое условие locextr). *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 — точка* locextr *функции f, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 либо существует, либо нет. Если существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

Замечание 1. Оба случая реализуются: точка $x_0 = 0$ является точкой locmin для функций x^2 и $|x|$. У первой функции производная в нуле обращается в нуль, а у второй — не существует.

Замечание 2. Обратное утверждение неверно: условие $f'(x_0) = 0$ не влечет наличие locextr в точке x_0; точка $x_0 = 0$ не является точкой locextr функции $f(x) = x^3$, хотя $f'(0) = 0$.

Точки, в которых производная обращается в нуль, называются *стационарными*, или *критическими*, точками функции.

Если некоторое выражение $A(x)$ таково, что $A(x) \leq 0$, если $x < x_0$ и $A(x) \geq 0$, если $x > x_0$ или $A(x) \geq 0$, если $x < x_0$ и $A(x) \leq 0$, если $x > x_0$, то говорят, что выражение $A(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Теорема 2(первое достаточное условие внутреннего locextr). *Пусть* $f \in C(U(x_0)) \bigcap D(\dot{U}(x_0))$. *Если*

1) $f'(x) \geq 0$ *при* $x < x_0$ *и* $f'(x) \leq 0$ *при* $x > x_0$, *то* x_0 — *точка* locmax *функции* f;

2) $f'(x) \leq 0$ *при* $x < x_0$ *и* $f'(x) \geq 0$ *при* $x > x_0$, *то* x_0 — *точка* locmin *функции* f.

Если для производной выполнены строгие неравенства, то точка x_0 является соответственно либо точкой строго locmax, *либо точкой строго* locmin .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Лагранжа $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где точка c лежит на интервале с концами в x и x_0. Следовательно, если $x < x_0$, то $c \in (x, x_0)$, а если $x > x_0$, то $c \in (x_0, x)$. Значит, в первом случае оба множителя и $f'(c)$, и $x - x_0$ имеют противоположные знаки $\forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow \Delta f(x_0) \leq 0 \Rightarrow x_0$ — точка locmax.

Во втором случае оба множителя имеют одинаковые знаки $\forall x \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow \Delta f(x_0) \geq 0 \Rightarrow x_0$ — точка locmin.

В случае строгих неравенств рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Замечание 3. Если $f \in C(U(x_0)) \bigcap D(\dot{U}(x_0))$ и $f'(x) > 0$ (соответственно $f'(x) < 0$) в $\dot{U}(x_0)$, то в точке x_0 нет locextr. Действительно, в этой ситуации приращение $\Delta f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности точки x_0, т.к. оба множителя отличны от нуля, причем первый из них всегда положителен (соответственно отрицателен), а второй множитель имеет разные знаки слева и справа от точки x_0.

Пример. Функция $f(x) = |x|$ в окрестности нуля удовлетворяет всем условиям теоремы и $f'(x) = -1 < 0$, если $x < 0$, и $f'(x) = 1 > 0$, если $x > 0$. Значит, $x_0 = 0$ является точкой locmin.

Для функции $g(x) = |x|$, если $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ и $g(0) = 2$ точка $x_0 = 0$ не будет точкой locmin. В этой точке функция принимает максимальное значение.

Теорема 3(второе достаточное условие внутреннего locextr). *Пусть $f \in D^n(x_0)$ и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

Тогда:

1) *если $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ и $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строго* locmax*; если $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строго* locmin.

2) *если $n = 2m - 1$, $m \in \mathbb{N}$, то в точке x_0 нет* locextr.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом условий теоремы из формулы Тейлора следует, что

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) =$$
$$= (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right), \ x \to x_0.$$

Поскольку второй множитель имеет предел при $x \to x_0$, равный $f^{(n)}(x_0)/n!$, и он отличен от нуля, то по лемме о знаке в некоторой окрестности $V(x_0)$ знак суммы $f^{(n)}(x_0)/n! + o(1)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$.

Если $n = 2m$, то $(x - x_0)^{2m} > 0$ в $\dot{V}(x_0) \Rightarrow \Delta f(x_0)$ в $\dot{V}(x_0)$ имеет знак числа $f^{(2m)}(x_0) \Rightarrow$ если $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то $\Delta f(x_0) < 0$ в $\dot{V}(x_0) \Rightarrow x_0$ — точка строго locmax;

если $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то $\Delta f(x_0) > 0$ в $\dot{V}(x_0) \Rightarrow x_0$ — точка строго locmin, что доказывает первую часть теоремы.

Если $n = 2m-1$, то $(x-x_0)^{2m-1}$ меняет знак при переходе точки x через точку $x_0 \Rightarrow \Delta f(x_0)$ также меняет знак при переходе через точку $x_0 \Rightarrow$ точка x_0 не является точкой locextr. Теорема доказана.

Замечание 4. Доказанные теоремы позволяют находить наибольшие и наименьшие значения дифференцируемых функций на отрезках. Точнее, если $f \in C[a,b] \bigcap D(a,b)$, то, чтобы определить эти значения, находим точки внутренних locextr, т.е. locextr из (a,b), используя полученные теоремы. Затем сравниваем значения функции во всех найденных точках внутренних locextr со значениями $f(a)$ и $f(b)$ функции в концевых точках. Наибольшее из этих значений будет максимумом функции, а наименьшее значение будет минимумом функции на отрезке $[a,b]$.

Выпуклость

Пусть f: $(a,b) \to \mathbb{R}$, x_1, $x_2 \in (a,b)$ — произвольны $(x_1 < x_2)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A = (x_1, f(x_1))$ и $B = (x_2, f(x_2))$. Ее угловой коэффициент $k = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$, следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$l_{AB}(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) = \frac{(f(x_2) - f(x_1))(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)(x - x_1) - f(x_1)x + f(x_1)x_2}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Определение 1. *Функция f называется выпуклой вверх (вниз) на (a,b), если $\forall x_1$, $x_2 \in (a,b)$ $(x_1 < x_2)$ неравенство $f(x) \geq l_{AB}(x)$ (соответственно $f(x) \leq l_{AB}(x)$) выполняется $\forall x \in (x_1, x_2)$.*

Это означает, что для любой хорды AB соответствующий участок графика функции $y = f(x)$ расположен не выше (не ниже) хорды.

Если в определении выполняются строгие неравенства, то функция называется строго выпуклой вверх (вниз) на (a,b).

В дальнейшем в обозначении ординаты прямой AB нижний индекс AB будет опускаться.

Теорема 4(достаточное условие выпуклости). *Пусть $f \in D^2(a,b)$. Если $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ на (a,b), то f выпукла вниз (вверх) на (a,b).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_1, $x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ и $x \in (x_1, x_2)$. Имеем

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x) =$$

$$\frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x + x - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{f'(c_2)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(c_1)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

(применили теорему Лагранжа для приращений функции f на отрезках $[x, x_2]$ и $[x_1, x]$)

$$\frac{(f'(c_2) - f'(c_1)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{f''(c)(c_2 - c_1)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}, \ c_1 \in (x_1, x), \ c_2 \in (x, x_2), \ c \in (c_1, c_2)$$

(теперь воспользовались теоремой Лагранжа для приращения f' на отрезке $[c_1, c_2]$).

Так как $c_2 > c_1$, $x_1 < x < x_2$, то знак разности $l(x) - f(x)$ определяется знаком $f''(c)$, следовательно, если $f''(x) \geq 0$ на (a,b), то $l(x) - f(x) \geq 0$ на (x_1, x_2); если $f''(x) \leq 0$ на (a,b), то $l(x) - f(x) \leq 0$ на (x_1, x_2). В силу произвольности точек x_1, x_2 теорема доказана.

Замечание 5. Если для второй производной выполнены строгие неравенства на (a,b), функция f соответственно либо строго выпукла вниз, либо строго выпукла вверх на интервале (a,b).

Выпуклость и касательные

Следующая теорема описывает расположение графика выпуклой, дважды дифференцируемой функции относительно касательных к графику.

Теорема 5. *Пусть* $f \in D^2(a,b)$. *Если* $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ *на* (a,b), *то* $\forall x_0 \in (a,b)$ *все точки графика* $\{(x, f(x)) |\ x \in (a,b)\}$

функции $f(x)$ *лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной к нему в точке* $(x_0, f(x_0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in D^2(a,b)$, то $\forall x_0 \in (a,b)$ $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists$ касательная $y = L(x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. По условию $\forall x$, $x_0 \in (a,b)$ на отрезке с концами в точках x_0 и x для функции f имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) - L(x,x_0) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Если $f''(x) \geq 0$ на (a,b), то $\forall x \in (a,b)$: $f(x) - L(x,x_0) \geq 0$; если $f''(x) \leq 0$ на (a,b), то $\forall x \in (a,b)$: $f(x) - L(x,x_0) \leq 0$. В силу произвольности $x_0 \in (a,b)$ теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ 23

Точки перегиба

Определение 1. *Точка x_0 назавается точкой перегиба дифференцируемой в точке x_0 функции f, если разность $f(x) - L(x, x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции f.*

В точке $(x_0, f(x_0))$ график функции переходит с одной стороны касательной на другую (вообще говоря, в нестрогом смысле).

Теорема 1(необходимое условие точки перегиба). *Пусть $f \in D^2(x_0)$ и x_0 — точка перегиба функции f. Тогда $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. Из условий следует, что в точке x_0 для функции f справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) - L(x, x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) =$$

$$(x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) \right).$$

Если $f''(x_0) \neq 0$, то сумма $f''(x_0)/2 + o(1)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 имела бы знак числа $f''(x_0)$ (по лемме о знаке), следовательно, разность $f(x) - L(x, x_0)$ не меняла бы знак при переходе через точку x_0. Получили противоречие, которое доказывает теорему.

Теорема 2(первое достаточное условие точки перегиба). *Пусть $f \in C^1(U(x_0)) \bigcap D^2(\dot{U}(x_0))$. Если $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) при $x < x_0$ и $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) при $x > x_0$ ($x \in U(x_0)$), то x_0 — точка перегиба функции f.*

Доказательство. Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем: $f(x) - L(x, x_0) = f''(c)(x - x_0)^2/2$, где c лежит на интервале с концами в x_0 и x. Поскольку $(x - x_0)^2$ знак не меняет, то знак разности $f(x) - L(x, x_0)$ определяется знаком $f''(c)$. При переходе точки x через x_0 точка c также переходит через x_0, следовательно, доказываемое утверждение вытекает из условий теоремы и определения точки перегиба.

Теорема 3(второе достаточное условие перегиба). *Пусть $f \in D^3(x_0)$. Если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$ то точка x_0 является точкой перегиба функции f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f''(x_0) = 0$, то из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем:

$$f(x) - L(x, x_0) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3) =$$

$$(x - x_0)^3 \left(\frac{f'''(x_0)}{3!} + o(1) \right),\ x \to x_0.$$

Множитель $(x - x_0)^3$ меняет знак при переходе через точку x_0, а множитель $f'''(x_0)/3! + o(1)$ в некоторой окрестности этой точки имеет знак числа $f'''(x_0)$. Следовательно, по определению точка x_0 является точкой перегиба.

Асимптоты

Пусть f: $(a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < +\infty$.

Определение 2. *Прямая $y = kx + l$ называется асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + l)) = 0$.*

Для g: $(-\infty, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty < b \leq +\infty$, аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.

Теорема 4. *Прямая $y = kx + l$ является асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ в том и только том случае, если $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = k$ и $\exists \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + l)) = 0$ $\Rightarrow f(x) - kx - l = o(1)$, $x \to +\infty \Rightarrow f(x) - kx = l + o(1) \Rightarrow f(x)/x = k + l/x + o(1/x) = k + o(1)$, $x \to +\infty$.

Последние два равенства означают, что $\exists \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l$ и $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = k$.

Теперь докажем обратное утверждение. Из условий следует, что при указанном выборе k для функции $f(x) - kx$ имеет место равенство $f(x) - kx = l + o(1)$, $x \to +\infty \Rightarrow f(x) - kx - l = o(1)$ при $x \to +\infty$, т.е. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + l)) = 0 \Rightarrow$ прямая $y = kx + l$ согласно определению является асимптотой функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Пример. При отыскании асимптот во многих случаях бывает удобнее использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Найдем асимптоты функции $f(x) = (x^3 - 2x^2)^{1/3}$ (под кубическим корнем понимается функция, обратная к функции y^3). Имеем $f(x) =$

$x(1-2/x)^{1/3} = x(1-2/(3x)+o(1/x)) = x-2/3+o(1)$, $x \to \infty \Rightarrow$ прямая $y = x - 2/3$ является асимптотой данной функции как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$.

Неопределенный интеграл

Напомним, что к промежуткам числовой прямой относятся отрезки, интервалы и полуинтервалы. Далее все промежутки будут предполагаться невырожденными.

Определение 3. *Функция $\Phi(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке Δ, если $\Phi \in D(\Delta)$ и $\forall x \in \Delta$: $\Phi'(x) = f(x)$.*

Так как $d\Phi = \Phi'(x)dx$, то равенство $\Phi'(x) = f(x) \Leftrightarrow d\Phi = f(x)dx$.

Определение 4. *Функция $\Phi(x)$ называется обобщенной первообразной функции $f(x)$ на промежутке Δ, если: 1) $\Phi \in C(\Delta)$, 2) $\exists$ конечное множество $M = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $x_j \in \Delta$, $j = 1, \ldots, k$, т.ч. $\forall x \in \Delta \setminus M$: $\Phi'(x) = f(x)$.*

Пример. Функция $|x|$ является обобщенной первообразной функции $\mathrm{sgn} x$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ (Δ — промежуток), $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ — две ее произвольные первообразные на Δ. Тогда разность $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ постоянна на Δ.*

Доказательство. Пусть $\Psi(x) = \Phi_1(x) - \Phi_2(x) \Rightarrow \Psi \in D(\Delta)$ и $\Psi'(x) = \Phi_1'(x) - \Phi_2'(x) = 0$ на Δ. Зафиксируем точку $x_0 \in \Delta$. Тогда $\forall x \in \Delta$, $x \neq x_0$, по теореме Лагранжа $\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Psi'(c)(x - x_0) = 0$ $\Rightarrow \forall x \in \Delta$: $\Psi(x) = \Psi(x_0)$, т.е. $\Psi(x)$ постоянна. Теорема доказана.

Итак, доказано, что любые две первообразные функции f на промежутке отличаются на постоянную. Следовательно, если у функции f на промежутке Δ существует первообразная $\Phi_0(x)$, то множество всех ее первообразных $\{\Phi(x)\}$ совпадает с множеством $\{\Phi_0(x) + C|\, C \in \mathbb{R}\}$, т.е.

$$\{\Phi(x)\} = \{\Phi_0(x) + C|\, C \in \mathbb{R}\}.$$

Таким образом, найден общий вид первообразной на промежутке.

Нетрудно убедиться, что утверждение об общем виде первообразной переносится на случай обобщенных первообразных.

Определение 5. *Пусть $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$. Совокупность всех ее первообразных на промежутке Δ называется неопределенным интегралом функции f на Δ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.*

В записи $\int f(x)\,dx$ символ $\int$ является знаком неопределенного интеграла, $f(x)\,dx$ называется подынтегральным выражением, а $f(x)$ — подынтегральной функцией.

Если у функции $f(x)$ на промежутке Δ существует первообразная $\Phi(x)$, то в силу общего вида первообразной на промежутке

$$\int f(x)\,dx = \{\Phi(x) + C|\, C \in \mathbb{R}\}.$$

При обозначении множества первообразных принято опускать фигурные скобки: $\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$ (C пробегает множество действительных чисел).

Если g — дифференцируемая функция, то под символом $\int f\,dg$, или $\int f(x)\,dg(x)$, понимается неопределенный интеграл $\int f(x)g'(x)\,dx$ (это естественно, ибо $dg = g'(x)dx$).

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Если $f \in D(\Delta)$, то $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ ($\int\, df = f(x) + C$).

Доказательство. Формула следует из общего вида первообразной и того, что $f(x)$ является первообразной $f'(x)$ на промежутке Δ.

2. Если f имеет первообразную на промежутке Δ, то $\forall x \in \Delta$:

$$d(\int f(x)\,dx) = d\{\Phi(x)\} \doteq \{d\Phi(x)\} = \{\Phi'(x)dx\} = \{f(x)dx\}.$$

Если, как принято, опустить фигурные скобки, то полученное равенство примет вид $d(\int f(x)\,dx) = f(x)dx$.

Аналогично $(\int f(x)\,dx)' = \{\Phi(x)\}' \doteq \{\Phi'(x)\} = \{f(x)\} = f(x)$.

3. Если f_1 и f_2 имеют первообразные Φ_1 и Φ_2 на промежутке Δ, то функция $f_1 + f_2$ также имеет первообразную на Δ и

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

(равенство понимается как равенство множеств).

Доказательство. Очевидно, что функция $\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$ является первообразной функции $f_1(x)+f_2(x) \Rightarrow \int (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \{\Phi_1(x) + \Phi_2(x) + C\}$. Таким образом, надо доказать,что $\{\Phi_1(x) + C_1\} + \{\Phi_2(x) + C_2\} = \{\Phi_1(x) + \Phi_2(x) + C\}$, где C_1, C_2 и C независимо друг от друга пробегают множество действительных чисел (слева стоит арифметическая сумма двух множеств см. Лекцию 4). Пусть $\Phi(x) \in \{\Phi_1(x)+C_1\}+\{\Phi_2(x)+C_2\} \Rightarrow \Phi(x) = \Phi_1(x)+C_1'+\Phi_2(x)+C_2' = \Phi_1(x)+\Phi_2(x)+C_1'+C_2' \in \{\Phi_1(x)+\Phi_2(x)+C\}$. Если $\Phi(x) \in \{\Phi_1(x)+\Phi_2(x)+C\}$, то $\Phi(x) = \Phi_1(x)+\Phi_2(x)+C'$, где C' — некоторая постоянная $\Rightarrow \Phi(x) = \Phi_1(x)+0+\Phi_2(x)+C' \in \{\Phi_1(x)+C_1\}+\{\Phi_2(x)+C_2\}$.

4. Пусть у функции f имеется первообразная на промежутке Δ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда у функции $\lambda f(x)$ также имеется первообразная на Δ и при $\lambda \neq 0$ справедливо равенство $\int (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\Phi(x)$ — первообразная функции f, то $\lambda\Phi(x)$ — первообразная функции $\lambda f(x)$. Второе утверждение следует из того, что при $\lambda \neq 0$ $\{\lambda\Phi + C_1\} = \lambda\{\Phi + C\}$.

5. (Формула интегрирования по частям). Пусть функции u, $v \in D(\Delta)$ и у функции $u'(x)v(x)$ существует первообразная на Δ. Тогда у функции $u(x)v'(x)$ также существует первообразная и

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \quad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $u, v \in D(\Delta)$, то $d(uv) = vdu + udv \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$. Поскольку $\exists \int v\,du = \int v(x)u'(x)\,dx$ и $\int d(uv)$ (первый по условию, а второй по свойству 1), то в силу свойств 3 и 4: $\exists \int u\,dv = uv - \int v\,du$.

6. (Формула замены переменной). Пусть f: $\Delta_x \to \mathbb{R}$, g: $\Delta_t \to \Delta_x$, $g \in D(\Delta_t)$ (Δ_x, Δ_t – промежутки). Если $f(x)$ имеет первообразную $\Phi(x)$ на Δ_x, т.е. $\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$, то функция $\Phi(g(t))$ является первообразной $f(g(t))g'(t)$ на Δ_t и, следовательно, $\int f(g(t))g'(t)\,dt = \Phi(g(t)) + C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции f и Φ определены на Δ_x $\Rightarrow$ определены $f(g(t))$ и $\Phi(g(t))$. Так как $\forall x \in \Delta_x$: $\Phi'(x) = f(x)$, то $(\Phi(g(t)))' = \Phi'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \Rightarrow \Phi(g(t))$ является первообразной $f(g(t))g'(t)$ на $\Delta_t \Rightarrow \int f(g(t))g'(t)\,dt = \Phi(g(t)) + C$.

Замечание. Так как $g'(t)dt = dg(t)$, то доказанная формула имеет вид $\int f(g(t))\,dg(t) = \Phi(g(t)) + C = \Phi(x)|_{x=g(t)} + C = (\Phi(x)+C)|_{x=g(t)} = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_{x=g(t)}$. Отсюда следует, что если сначала в подынтегральном выражении сделать подстановку $x = g(t)$ и вычислить интеграл, или сначала взять интеграл, а после выполнить замену $x = g(t)$, то результат будет один и тот же.

Приведем таблицу неопределенных интегралов основных элементарных функций (в приводимых формулах считается, что $a > 0$).

Она непосредственно следует из таблицы производных: формулы проверяются дифференцированием правой части.

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C,\ p \neq -1;\ \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C;\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a \neq 1);$$

$$\int \sin x\,dx = \cos x + C;\ \int \cos x\,dx = -\sin x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + C;\ \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}x + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (-\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C);$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (-\arccos\frac{x}{a} + C);$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+p}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+p}| + C.$$

Примеры.

$$1) \int \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}\,dx = \int \mathrm{tg}x\,d\mathrm{tg}x \overset{t=\mathrm{tg}x}{=} \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + C;$$

$$2) \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

(воспользовались формулой интегрирования по частям);

$$3) \qquad \int e^x x^2\,dx = \int x^2\,de^x = e^x x^2 - \int 2xe^x\,dx = e^x x^2 - 2\int x\,de^x =$$

$$e^x x^2 - 2e^x x + 2\int e^x\,dx = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C$$

(здесь дважды была применена формула интегрирования по частям).

4) $$I_n=\int\sin^n x\,dx=\int\sin^{n-1}x\sin x\,dx=-\int\sin^{n-1}\ d\cos x=$$

$$-\sin^{n-1}x\cos x+\int\cos x\,d\sin^{n-1}x=$$

$$-\sin^{n-1}x\cos x+\int\cos x(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx=$$

$$-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$

$$-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$I_n=-\frac{1}{n}(\sin^{n-1}x\cos x-(n-1)I_{n-2}),$$

которая позволяет вычислить данный интеграл для $\forall n\in\mathbb{N}$. Действительно, если n нечетное, то достаточно знать $I_1=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$, чтобы последовательным применением полученной рекуррентной формулы найти I_n. Если n четное, то достаточно вычислить $I_0=\int\,dx=x+C$, чтобы найти I_n.

ЛЕКЦИЯ 24

Интеграл Римана и его простейшие свойства

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определение 1. *Разбиением T отрезка $[a, b]$ (обозначают $T[a, b]$) называется множество точек $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ ($n = n(T)$), т.ч. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Точки x_k, $k = 0, \ldots, n$ называются точками разбиения отрезка $[a, b]$; отрезки $\Delta_k \doteq [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \ldots, n$) — отрезками разбиения T.*

Через Δx_k обозначается длина k–го отрезка разбиения, т.е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Величина $\lambda(T) \doteq \max_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$ называется *диаметром*, или *мелкостью*, разбиения T.

Пусть дано разбиение $T[a, b] = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Выберем произвольно точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Набор таких точек $\bar{\xi} \doteq (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется *разметкой* разбиения T, а пара $(T, \bar{\xi})$ — *размеченным разбиением* отрезка $[a, b]$.

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и $(T, \bar{\xi})$ некоторое размеченное разбиение $[a, b]$.

Определение 2. *Интегральной суммой Римана функции f, соответствующей размеченному разбиению $(T, \bar{\xi})$, называется*

$$\sigma(f, T, \bar{\xi}) \doteq f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Определение 3. *Число I называется пределом интегральных сумм Римана при $\lambda(T) \to 0$ ($I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, \bar{\xi})$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. для любого размеченного разбиения $(T, \bar{\xi})$ отрезка $[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $|\sigma(f, T, \bar{\xi}) - I| < \varepsilon$.*

Определение 4. *Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, если $\exists \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, \bar{\xi})$.*

При этом число I, равное значению этого предела, называют определенным интегралом Римана функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Класс всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, обозначается символом $R[a, b]$. Запись $g \in R[a, b]$ означает, что функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

Определение 5. *Если для функции f не существует предел ее интегральных сумм Римана, то говорят, что она не интегрируема по Риману на рассматриваемом отрезке.*

Лемма 1. *Если существует предел интегральных сумм Римана, то он единствен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассуждать от противного. Пусть два несовпадающих числа I_1 и I_2 являются пределами интегральных сумм $\sigma(f,T,\bar{\xi})$ при $\lambda(T) \to 0$. Возьмем непересекающиеся ε–окрестности точек I_1 и I_2, например, можно взять $\varepsilon = |I_1 - I_2|/2$. Тогда по определению $\exists \delta_1,\ \delta_2 > 0$, т.ч.

$\sigma(f,T,\bar{\xi}) \in V(I_1,\varepsilon)$ $\forall (T,\bar{\xi})$ с $\lambda(T) < \delta_1$ и $\sigma(f,T,\bar{\xi}) \in V(I_2,\varepsilon)$ $\forall (T,\bar{\xi})$ с $\lambda(T) < \delta_2$.

Пусть $\delta = \min(\delta_1,\delta_2) \Rightarrow \sigma(f,T,\bar{\xi}) \in V(I_1,\varepsilon) \bigcap V(I_2,\varepsilon)$ для $\forall (T,\bar{\xi})$ с $\lambda(T) < \delta$. Пришли к противоречию, ибо по предположению эти окрестности не пересекаются. Лемма доказана.

Теорема 1(необходимое условие интегрируемости). *Если $f \in R[a,b]$, то функция f ограничена на отрезке $[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. что $f \in R[a,b]$, но f не ограничена на отрезке $[a,b]$. Пусть $I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T,\bar{\xi})$. Тогда для $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$, т.ч. для любой интегральной суммы $\sigma(f,T,\bar{\xi})$ с диаметром разбиения $\lambda(T) < \delta$: $I - 1 < \sigma(f,T,\bar{\xi}) < I + 1$, т.е. множество $\{\sigma(f,T,\bar{\xi})\}$ значений интегральных сумм $\sigma(f,T,\bar{\xi})$ с $\lambda(T) < \delta$ ограничено.

Теперь зафиксируем разбиение $T[a,b]$ с $\lambda(T) < \delta$. Так как f не ограничена на $[a,b]$, то она не ограничена по крайней мере на одном из отрезков разбиения T. Без ограничения общности можно считать, что f не ограничена на $\Delta_1 = [x_0,x_1]$. Зафиксируем каким-то образом точки $\xi_i \in \Delta_i$, $i = 2,\ldots,n$. Тогда сумма

$$S \doteq f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

будет иметь вполне определенное значение. Добавив к S слагаемое $f(\xi_1)\Delta x_1$, где $\xi_1 \in \Delta_1$ получим интегральную сумму

$$\sigma(f,T,\bar{\xi}) = f(\xi_1)\Delta x_1 + S.$$

Поскольку f не ограничена на $\Delta_1 = [x_0,x_1]$, то за счет выбора $\xi_1 \in \Delta_1$ первое слагаемое, а следовательно, и сумму $\sigma(f,T,\bar{\xi})$ можно сделать сколь угодно большой по абсолютной величине, что противоречит ограниченности интегральных сумм. Теорема доказана.

Пример. Функция Дирихле $f(x) = 1$, если $x \in \mathbb{Q}$ и $f(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ограничена, но не интегрируема по Риману ни на каком невырожденном отрезке $[a, b]$.

Действительно, возьмем произвольное разбиение отрезка $T[a, b]$. В любом невырожденном отрезке содержатся как рациональные, так и иррациональные числа. Поэтому если в качестве отмеченных точек выбрать рациональные числа, то

$$\sigma(f, T, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_n - x_{n-1} = b - a.$$

Если в качестве разметки взять иррациональные числа, то

$$\sigma(f, T, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Отсюда следует, что никакое действительное число I не является пределом интегральных сумм Римана функции Дирихле.

В самом деле, если число $I \neq 0$, то в окрестность $U(I, \varepsilon)$ при $\varepsilon = |I|$ не попадут интегральные суммы, построенные по иррациональным точкам, ибо эта окрестность не содержит нуля. Если $I = 0$, то в $U(0, \varepsilon)$ при $\varepsilon = b-a$ не попадут интегральные суммы, построенные по рациональным точкам, так как эта окрестность не содержит точку $b-a$. Следовательно, функция Дирихле не интегрируема по Риману.

Таким образом, ограниченность функции на отрезке не влечет ее интегрируемость.

По определению полагают, что

$$\forall g : [a, b] \to \mathbb{R} \ : \int_a^a g(x)\, dx = 0,$$

$$\forall f \in R[a, b] : \ \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Приведем свойства интеграла Римана, вытекающие непосредственно из его определения:

1. $\int_a^b 0\, dx = 0$, $\int_a^b 1\, dx = b - a$.

Эти равенства следуют из того, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall (T, \bar{\xi})$:

$$|\sigma(0, T, \bar{\xi})| = |\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i| = 0 < \varepsilon \text{ и}$$

$$|\sigma(1,T,\bar\xi)-(b-a)|=|\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i-(b-a)|=0<\varepsilon.$$

2 (**линейность интеграла**). *Если* $f,\ g\in R[a,b]$, *то* $\forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ *функция* $\lambda f(x)+\mu g(x)\in R[a,b]$ *и*

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx+\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Действительно, для произвольного размеченного разбиения $(T,\bar\xi)$ отрезка $[a,b]$

$$\sigma(\lambda f+\mu g,T,\bar\xi)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda f(\xi_i)+\mu g(\xi_i))\Delta x_i=$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\mu\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i=\lambda\sigma(f,T,\bar\xi)+\mu\sigma(g,T,\bar\xi).$$

Пусть $I'\doteq\int_a^b f(x)\,dx$, $I''\doteq\int_a^b g(x)\,dx$ и дано $\varepsilon>0$. По условию $\exists\delta',\ \delta''>0$, т.ч. $\forall(T',\bar\xi'),\ (T'',\bar\xi'')$ отрезка $[a,b]$ с $\lambda(T')<\delta'$, $\lambda(T'')<\delta''$:

$$|\sigma(f,T',\bar\xi')-I'|<\varepsilon,\ |\sigma(f,T'',\bar\xi'')-I''|<\varepsilon.$$

Положим $\delta=\min(\delta',\delta'')$ и возьмем произвольное $(T,\bar\xi)$ с $\lambda(T)<\delta$. Тогда

$$|\sigma(\lambda f+\mu g,T,\bar\xi)-(\lambda I'+\mu I'')|\le|\lambda\sigma(f,T,\bar\xi)-\lambda I'|+|\mu\sigma(g,T,\bar\xi)-\mu I''|<$$
$$<|\lambda|\varepsilon+|\mu|\varepsilon=(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon.$$

В силу произвольности ε утверждение доказано.

3 (**неотрицательность интеграла**). *Если* $f\in R[a,b]$ *и* $f(x)\ge0$ $\forall x\in[a,b]$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx\ge0$.

Предположим противное, т.е. что $I=\int_a^b f(x)\,dx<0$. Тогда, с одной стороны, $\forall(T,\bar\xi)$ $\sigma(f,T,\bar\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\ge0$. С другой стороны, для $\varepsilon\doteq|I|$ $\exists\delta>0$, т.ч. $\forall(T,\bar\xi)$ с $\lambda(T)<\delta$: $|\sigma(f,T,\bar\xi)-I|<|I|\Rightarrow\sigma(f,T,\bar\xi)<|I|+I=0$. В результате получили противоречие, которое доказывает утверждение.

Следствие (интегрирование неравенств). *Если* $f,\ g\in R[a,b]$ *и* $f(x)\ge g(x)$ *на* $[a,b]$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$.

Действительно, в силу условий следствия, 3) и 2) имеем

$$0 \le \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$

откуда следует справедливость доказываемого неравенства.

4. *Пусть $f \in R[a,b]$, g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ и $g(x) \neq f(x)$ в конечном числе точек. Тогда $g \in R[a,b]$ и $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Функция $h(x) \doteq f(x) - g(x)$ равна нулю за исключением конечного числа точек отрезка $[a,b]$. Покажем, что $h(x) \in R[a,b]$ и $\int_a^b h(x)\,dx = 0$.

Сначала предположим, что $h(x) \neq 0$ только в одной точке $y \in [a,b]$. Возьмем произвольное размеченное разбиение $(T,\bar{\xi}]$ отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\sigma(h,T,\bar{\xi}) =$$

$$\sum_{i=1}^n h(\xi_i)\Delta x_i = \begin{cases} 0,\ y \notin \bar{\xi}; \\ h(y)\Delta x_k,\ \xi_k = y \in [x_{k-1},x_k],\ \xi_k \neq \xi_i,\ i \neq k; \\ h(y)\Delta x_k + h(y)\Delta x_{k+1},\ \xi_k = \xi_{k+1} = y \in [x_{k-1},x_k]. \end{cases}$$

Следовательно, интегральная сумма $\sigma(h,T,\bar{\xi})$ содержит не более двух не равных нулю слагаемых. Стало быть, $|\sigma(h,T,\bar{\xi})| \le 2|h(y)|\lambda(T)$.

Пусть теперь функция $h(x)$ отлична от нуля в m точках $y_1,\ldots,y_m$. В этом случае произвольная интегральная сумма $\sigma(h,T,\bar{\xi})$ содержит не более $2m$ слагаемых, отличных от нуля, и поэтому

$$|\sigma(h,T,\bar{\xi})| \le 2|h(y_1)|\lambda(T)+\ldots+2|h(y_m)|\lambda(T) \le 2m \max_{j=1,\ldots,m} |h(y_j)|\lambda(T).$$

Далее, для $\forall\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon/(2m\max_{j=1,\ldots,m}|h(y_j)|)$. Тогда $\forall(T,\bar{\xi})$ с $\lambda(T) < \delta$: $|\sigma(h,T,\bar{\xi}) - 0| < \varepsilon \Rightarrow h \in R[a,b]$ и $\int_a^b h(x)\,dx = 0$.

Так как $g(x) = f(x) - h(x)$, то в силу свойства 2 функция $g \in R[a,b]$ и $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Утверждение доказано.

ЛЕКЦИЯ 25

Верхние и нижние суммы Дарбу

Для нахождения условий интегрируемости функций потребуется ввести еще один тип интегральных сумм.

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и f ограничена на $[a,b]$. Для произвольного разбиения $T[a,b] = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ положим

$$m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x),\ M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),\ \Delta_i = [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,\dots,n.$$

Вследствие ограниченности f величины M_i и m_i конечны.

Определение 1. *Суммы*

$$s_T = s(f,T) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

и

$$S_T = S(f,T) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

называются соответственно нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции f для разбиения $T[a,b]$.

Очевидно, что $\forall T[a,b]$: $s_T \le S_T$.

Если f достигает инфимума на каждом отрезке разбиения, то s_T совпадает с некоторой интегральной суммой Римана. Если f не достигает инфимума хотя бы на одном отрезке разбиения, то s_T не является суммой Римана. Аналогично и для S_T.

Лемма 1. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная функция и пусть разбиение $T[a,b]$ отрезка $[a,b]$ также произвольно. Тогда:*

1) для $\forall$ разметки $\bar\xi$ разбиения T: $s_T \le \sigma(f,T,\bar\xi) \le S_T$;

2) $s_T = \inf_{\bar\xi} \sigma(f,T,\bar\xi)$, $S_T = \sup_{\bar\xi} \sigma(f,T,\bar\xi)$.

Доказательство. Так как $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ и

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(f,T,\bar\xi) \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = S_T.$$

Далее, по определению inf: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\xi_i = \xi_i(\varepsilon) \in [x_{i-1}, x_i]$, т.ч. $f(\xi_i) < m_i + \varepsilon/(b-a) \Rightarrow$ соответствующая интегральная сумма Римана

$$\sigma(f,T,\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}(m_i + \varepsilon/(b-a))\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i + (\varepsilon/(b-a))(b-a) = s_T + \varepsilon.$$

С учетом 1) это означает, что $s_T = \inf_{\bar{\xi}} \sigma(f,T,\bar{\xi})$.

Аналогичными рассуждениями получаем второе равенство. Лемма доказана.

Определение 2. *Разбиение $T^*[a,b]$ называется измельчением (продолжением) разбиения $T[a,b]$, если $T \subset T^*$.*

Примеры.

1. Разбиение $T^*[0,1] = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ является измельчением $T[0,1] = \{0, 1/4, 1\}$.

2. Если T_1 и T_2 — произвольные разбиения отрезка $[a,b]$, то разбиение $T_1 \bigcup T_2$ будет измельчением как T_1, так и T_2.

Лемма 2.

1) *Если разбиение T^* является измельчением разбиения T, то для интегральных сумм Дарбу справедливы неравенства $s_T \le s_{T^*}$, $S_{T^*} \le S_T$.*

2) *Для произвольных разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,b]$: $s_{T_1} \le S_{T_2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $T \subset T^*$. Достаточно рассмотреть случай, когда T^* отличается от T одной точкой x^*: $T^* = T\bigcup\{x^*\}$, $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$ (в общем случае последовательно добавляем по одной точке к исходному разбиению T). Тогда s_{T^*} отличается от s_T лишь тем, что слагаемое $m_i(x_i - x_{i-1})$ заменяется на сумму $m_i'(x^* - x_{i-1}) + m_i''(x_i - x^*)$, где $m_i' = \inf_{[x_{i-1},x^*]} f(x)$, $m_i'' = \inf_{[x^*,x_i]} f(x)$. Так как $[x_{i-1}, x^*]$, $[x^*, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то

$$m_i' = \inf_{[x_{i-1},x^*]} f(x) \ge \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i,$$
$$m_i'' = \inf_{[x^*,x_i]} f(x) \ge \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i.$$

Сдедовательно,

$$m_i\Delta x_i = m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x_i - x^* + x^* - x_{i-1}) =$$
$$= m_i(x^* - x_{i-1}) + m_i(x_i - x^*) \le m_i'(x^* - x_{i-1}) + m_i''(x_i - x^*)$$

Значит, $s_T \le s_{T^*}$.

Аналогично доказывается неравенство $S_T \ge S_{T^*}$.

2) Пусть теперь T_1 и T_2 — произвольные разбиения $[a,b]$. Введем разбиение $T = T_1 \bigcup T_2$. Так как $T_1 \subset T$ и $T_2 \subset T$, то согласно полученным выше оценкам справедлива цепочка неравенств $s_{T_1} \le s_T \le S_T \le S_{T_2}$. Лемма доказана.

Определение 3. *Пусть $g\colon E \to \mathbb{R}$. Колебанием функции g на множестве $A \subset E$ называется $\omega(g,A) \doteq \sup_{x,y\in A} |g(x)-g(y)|$.*

Замечание. Поскольку $g(x)-g(y) = -(g(y)-g(x))$, то хотя бы одна из разностей $g(x)-g(y)$, $g(y)-g(x)$ совпадает с $|g(x)-g(y)| \Rightarrow \omega(g,A) = \sup_{x,y\in A}(g(x)-g(y))$.

Лемма 3. *Для любого разбиения $T[a,b]$:*

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i.$$

Доказательство. Имеем $S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$. А в силу свойств inf и sup (см. лемму 1 лекции 4): $M_i - m_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{y\in\Delta_i} f(y) = \sup_{x\in\Delta_i} f(x) + \sup_{y\in\Delta_i}(-f(y)) = \sup_{x,y\in\Delta_i}(f(x)-f(y)) = \omega(f,\Delta_i)$, откуда следует доказываемая формула.

Верхний и нижний интегралы Дарбу

Пусть функция f ограничена на $[a,b]$. Так как для любых разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,b]$: $s_{T_1} \le S_{T_2}$, то множество значений $\{s_{T_1}\}$ нижних сумм Дарбу ограничено сверху, а множество значений $\{S_{T_2}\}$ верхних сумм Дарбу ограничено снизу. Следовательно, величины $I_* \doteq \sup_T s_T$ и $I^* \doteq \inf_T S_T$ конечны. При этом для произвольных разбиений T_1 и T_2 выполняются неравенства $s_{T_1} \le I_* \le S_{T_2}$, $s_{T_1} \le I^* \le S_{T_2}$. Из первого неравенства следует, что $I_* \le \inf_{T_2} S_{T_2} = I^*$. Таким образом, для любых разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство: $s_{T_1} \le I_* \le I^* \le S_{T_2}$. В частности, $\forall T[a,b]$: $s_T \le I_* \le I^* \le S_T$.

Определение 4. *Число I_* называется нижним интегралом Дарбу функции f по отрезку $[a,b]$, а число I^* — верхним интегралом Дарбу.*

Например, для функции Дирихле, рассматриваемой на произвольном невырожденном отрезке $[a,b]$: $I_* = 0$, а $I^* = b-a$.

Критерий Дарбу интегрируемости по Риману функции

Теорема 1(Дарбу). *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Для того, чтобы $f \in R[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограничена на $[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $S_T - s_T < \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $f \in R[a,b]$ $\Rightarrow f$ ограничена на отрезке $[a,b]$ (теорема 1 лекции 23) и $\exists I \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что $\forall (T, \bar{\xi})$ с $\lambda(T) < \delta$: $|\sigma(f,T,\bar{\xi}) - I| < \varepsilon/4$, т.е. $I - \varepsilon/4 < \sigma(f,T,\bar{\xi}) < I + \varepsilon/4$. Переходя в последнем неравенстве к inf и sup по разметке $\bar{\xi}$, вследствие леммы 1 получим

$$I - \varepsilon/4 \le s_T \le S_T \le I + \varepsilon/4,$$

т.е. $s_T, S_T \in [I-\varepsilon/4, I+\varepsilon/4] \Rightarrow 0 \le S_T - s_T \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ и это неравенство выполняется $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T) < \delta$. Необходимость доказана.

Достаточность. Поскольку f ограничена, то верхние и нижние суммы Дарбу имеют смысл. Так как $\forall T[a,b]$: $s_T \le I_* \le I^* \le S_T$, то $\forall T[a,b]$: $0 \le I^* - I_* \le S_T - s_T$. Из этой оценки и условий теоремы следует, что $\forall \varepsilon > 0$ справедливо неравенство $0 \le I^* - I_* < \varepsilon \Rightarrow I_* = I^*$.

Пусть $I \doteq I_* = I^*$. Покажем, что I является интегралом Римана функции f. Действительно, во-первых, $\forall T[a,b]$: $s_T \le I \le S_T$, а во-вторых, по лемме 1 $\forall T[a,b]$ и любой разметки $\bar{\xi}$: $s_T \le \sigma(f,T,\bar{\xi}) \le S_T$. Поэтому $I, \sigma(f,T,\bar{\xi}) \in [s_T, S_T]$, т.е. $|\sigma(f,T,\bar{\xi}) - I| \le S_T - s_T$. Теперь зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу условий теоремы $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $S_T - s_T < \varepsilon$. Тогда для $\forall (T,\bar{\xi})$ отрезка $[a,b]$ с $\lambda(T) < \varepsilon$ имеем: $|\sigma(f,T,\bar{\xi}) - I| \le S_T - s_T < \varepsilon$. Теорема доказана.

Классы интегрируемых функций

Теорема 2. *Если $f \in C[a,b]$, то $f \in R[a,b]$, т.е. $C[a,b] \subset R[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in C[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$ (теорема Вейерштрасса I) и равномерно непрерывна на $[a,b]$ (теорема Кантора). Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T) < \delta$ (это δ из условия равномерной непрерывности). Тогда $\forall x,y \in \Delta_i$ выполняется неравенство $|x-y| \le \Delta x_i \le \lambda(T) < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ колебания $\omega(f,\Delta_i) = \sup_{x,y\in\Delta_i} |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно,

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то для f выполнен критерий Дарбу интегрируемости. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* f*:* $[a, b] \to \mathbb{R}$ *и* f *монотонна на* $[a, b]$*. Тогда* $f \in R[a, b]$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f \uparrow$ на $[a, b]$ $\Rightarrow \forall x \in [a, b]$: $f(a) \le f(x) \le f(b) \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Так как $f \uparrow$, то $m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x) = f(x_{i-1})$, $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x) = f(x_i)$. Поэтому $\forall T[a, b]$

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \le \lambda(T) \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) =$$

$$\lambda(T)(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$

$$\lambda(T)(f(x_n) - f(x_0)) = \lambda(T)(f(b) - f(a)).$$

Если $f(b) = f(a)$, т.е. функция постоянна, то $S_T - s_T = 0$ $\forall T[a, b]$ $\Rightarrow f \in R[a, b]$ согласно критерию Дарбу (интегрируемость постоянной функции также следует из свойств 1 и 2 интеграла).

Пусть $f(b) \ne f(a)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Тогда $\forall T[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$ выполняется неравенство $S_T - s_T < \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon$. Теорема доказана.

Замечание. Напомним, что монотонная на отрезке функция может иметь бесконечно много точек разрыва, но такие точки образуют не более чем счетное множество.

Лемма 4(интегрируемость по подотрезкам). *Если* $f \in R[a, b]$*, то* $\forall [a', b'] \subset [a, b]$*:* $f \in R[a', b']$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall T[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon$.

Пусть $T' = \{x'_j\}_{j=0}^{m'}$ — произвольное разбиение $[a', b']$ с $\lambda(T') < \delta$. Добавив к T' конечное число точек, лежащих на $[a, b] \setminus [a', b']$, всегда можно получить $T[a, b] = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ с $\lambda(T) < \delta$. Для T' и построенного разбиения T всего отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_j \omega(f, \Delta'_j)\Delta x'_j \le \sum_i \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Следовательно, $f \in R[a', b']$.

ЛЕКЦИЯ 26

Лемма 1(аддитивность интеграла по отрезкам). *Если $f \in R[a,b]$ и точка $c \in (a,b)$ произвольна, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. По лемме 4 лекции 25 $f \in R[a,c]$ и $f \in R[c,b]$. Пусть

$I = \int_a^b f(x)\,dx,\ I' = \int_a^c f(x)\,dx,\ I'' = \int_c^b f(x)\,dx.$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta$, δ' и δ'', т.ч. соответствующие интегральные суммы Римана отличаются от I, I' и I'' меньше чем на ε, лишь бы мелкости этих разбиений не превышали δ, δ' и δ'' соответственно.

Положим $\delta_0 = \min(\delta, \delta', \delta'')$ и возьмем произвольное $T[a,b]$, $\lambda(T) < \delta_0$, содержащее точку c. Такое разбиение порождает разбиения $T'[a,c] \doteq T \bigcap [a,c]$ и $T''[c,b] \doteq T \bigcap [c,b]$ с $\lambda(T')$, $\lambda(T'') < \delta_0$. При этом $\sigma(f,T,\bar\xi) = \sigma(f,T',\bar\xi') + \sigma(f,T'',\bar\xi'')$, где $\bar\xi'$ и $\bar\xi''$ части разметки $\bar\xi$, попавшие в $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Поэтому

$$|I - (I' + I'')| = |I - \sigma(f,T,\bar\xi) - I' + \sigma(f,T',\bar\xi') - I'' + \sigma(f,T'',\bar\xi'')| \le$$

$$|I - \sigma(f,T,\bar\xi)| + |I' - \sigma(f,T',\bar\xi')| + |I'' - \sigma(f,T'',\bar\xi'')| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольно, то из полученной оценки следует равенство $I = I' + I''$. Лемма доказана.

Следствие (монотонность интеграла по отрезкам). *Пусть $f \in R[a,b]$ и $f \ge 0$ на $[a,b]$. Тогда*

$$\forall [c,d] \subset [a,b]:\ \int_c^d f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. На основании леммы и неотрицательности интеграла имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \ge \int_c^d f(x)\,dx.$$

Замечание. Так как $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, то утверждение леммы означает, что $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$. Если a, b, $c \in \mathbb{R}$ — произвольны и f интегрируема по Риману на наибольшем из отрезков с концами в этих точках, то непосредственной проверкой убеждаемся, что $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$.

Приведем без доказательства утверждение, обратное к лемме 1.

Лемма 2. *Пусть точка $c \in (a,b)$ произвольна. Если $f \in R[a,c]$ и $f \in R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$ и, стало быть,*

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Определение 1. *Функция f называется кусочно–непрерывной на отрезке $[a,b]$, если $\exists T[a,b] = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n = n(f)$, т.ч.*

1) $f \in C(x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$;

2) $\exists$ *конечные пределы* $f(x_{i-1}+0)$ *и* $f(x_i - 0)$, $i = 1, \ldots, n$.

Если ввести функции

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f(x_{i-1}+0), & x = x_{i-1} \\ f(x_i - 0), & x = x_i \end{cases}$$

то $f_i \in C[x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f_i \in R[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$. По свойству 4 интеграла из лекции 24 исходная функция $f \in R[x_{i-1}, x_i]$, ибо на этих отрезках функция f может отличаться от f_i не более, чем в двух точках, а именно, в концевых точках. Но тогда согласно лемме 2 $f \in R[a,b]$, т.е. доказано, что всякая кусочно–непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке. При этом интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ не зависит от того, какие значения функция $f(x)$ принимает в точках x_i, $i = 0, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть $f \in R[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a,b]$. Если $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то функция $f(x) = 0$ во всех точках своей непрерывности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассуждать от противного. Пусть $\exists x_0 \in [a,b]$, т.ч. $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$. Если $x_0 \in (a,b)$, то по лемме о знаке $\exists U(x_0,\delta) \subset [a,b]$, т.ч. $\forall x \in U(x_0,\delta)$: $f(x) > f(x_0)/2 \Rightarrow f(x) > f(x_0)/2$ и на отрезке $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$. Тогда по свойству монотонности интеграла по отрезкам

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} f(x)\,dx \geq \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} dx = \frac{f(x_0)}{2}\delta > 0.$$

Пришли к противоречию, что доказывает теорему.

Если x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$, то вместо $U(x_0, \delta)$ берем соответствующую одностороннюю окрестность точки x_0. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a, b]$. Если $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то функция $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$.*

Утверждение сразу следует из теоремы.

Теорема 2(интегрирование модуля). *Если $f \in R[a, b]$, то $|f| \in R[a, b]$ и*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $f \in R[a, b]$. Значит, на основании необходимого условия интегрируемости $\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in [a, b]$: $|f(x)| \leq M$, т.е. $|f|$ ограничена на $[a, b]$. Далее, $\forall A \subset [a, b]$ и $\forall x, y \in A$ по неравенству треугольника $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. Поэтому в силу определения супремума $||f(x)| - |f(y)|| \leq \omega(f, A)$. Теперь переходя к sup по $x, y \in A$, получаем оценку

$$\omega(|f|, A) \leq \omega(f, A),$$

из которой следует, что $\forall T[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $f \in R[a, b]$, то $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall T[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$: $\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon$. Следовательно, и $\sum_{i=1}^{n} \omega(|f|, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon$ $\forall T[a, b]$ с $\lambda(T) < \delta$, откуда на основании критерия Дарбу заключаем, что $|f| \in R[a, b]$.

Перейдем к доказательству неравенства. Так как

$$-f(x) \leq |f(x)| \text{ и } f(x) \leq |f(x)|,\ x \in [a, b],$$

а f, $|f| \in R[a, b]$, то интегрируя эти неравенства, получаем, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

$$\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Из написанных оценок и свойств модуля числа (см. лекцию 2) заключаем, что $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. Теорема доказана.

Замечания.

1. Если не предполагать, что $a < b$, то доказанное неравенство примет вид

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Действительно, если $b < a$, то $|\int_a^b f(x)\,dx| = |-\int_b^a f(x)\,dx| = |\int_b^a f(x)\,dx| \le \int_b^a |f(x)|\,dx = |\int_b^a |f(x)|\,dx| = |-\int_b^a |f(x)|\,dx| = |\int_a^b |f(x)|\,dx|$ (воспользовались тем, что $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, свойствами модуля и доказанным неравенством).

2. Из интегрируемости модуля функции не следует интегрируемость самой функции:

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на $[0,1]$ (это сразу же следует из критерия Дарбу интегрируемости или доказывается, как и неинтегрируемость функции Дирихле), а ее модуль интегрируем.

Теорема 3(интегрирование произведения функций). *Если $f, g \in R[a,b]$, то $fg \in R[a,b]$.*

Доказательство. Так как f и g интегрируемы, то они ограничены на $[a,b] \Rightarrow \exists M_1,\ M_2 > 0$, т.ч. $\forall x \in [a,b]$: $|f(x)| \le M_1$, $|g(x)| \le M_2$. Поэтому $\forall x \in [a,b]$ имеем $|f(x)g(x)| \le M_1M_2$. Значит, функция $f(x)g(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Далее, $\forall A \subset [a,b]$ и $\forall x, y \in A$:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \le$$

$$|f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \le M_1\omega(g, A) + M_2\omega(f, A) \le$$

$$M(\omega(f, A) + \omega(g, A)),$$

где $M = \max(M_1, M_2)$.

Переходя в левой части полученного неравенства к sup по $x, y \in A$, приходим к оценке

$$\omega(fg, A) \le M(\omega(f, A) + \omega(g, A)).$$

Следовательно, $\forall T[a,b]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(fg,\Delta_i)\Delta x_i \le M\left(\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega(g,\Delta_i)\Delta x_i\right).$$

Поскольку $f,\ g\in R[a,b]$, то $\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta',\ \delta''>0$, т.ч. $\forall T'[a,b],\ T''[a,b]$ с $\lambda(T')<\delta',\ \lambda(T'')<\delta''$:

$$\sum_i\omega(f,\Delta_i')\Delta x_i'<\varepsilon \text{ и } \sum_i\omega(g,\Delta_i'')\Delta x_i''<\varepsilon.$$

Тогда $\forall T[a,b]$ с $\lambda(T)<\delta$, где $\delta\doteq\min(\delta',\delta'')$ будем иметь

$$\sum_i\omega(fg,\Delta_i)\Delta x_i<2\varepsilon M,$$

откуда в силу критерия Дарбу интегрируемости следует утверждение теоремы.

Замечание. Если $f\in R[a,b]$, $f(x)\ne 0$ на отрезке $[a,b]$ и $1/f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то $1/f\in R[a,b]$. Это утверждение доказывается по той же схеме, что и теоремы 2 и 3.

Теорема 4(интегральная теорема о среднем). *Пусть* $f,g\in R[a,b]$, $g(x)\ge 0$ *на* $[a,b]$, $m=\inf_{[a,b]}f(x)$, $M=\sup_{[a,b]}f(x)$. *Тогда* $\exists\mu\in[m,M]$, *т.ч.*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим неравенство $m\le f(x)\le M$ на $g(x)\Rightarrow mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ (здесь использована неотрицательность функции g) и проинтегрируем полученное неравенство по отрезку $[a,b]$ (функция $f(x)g(x)$ по доказанному выше интегрируема):

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx \tag{1}$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то из (1) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$, следовательно, в качестве μ можно взять любое число из $[m,M]$.

Если $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (случай < 0 невозможен), то из (1) получаем, что

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Следовательно,

$$\mu \doteq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in [m, M].$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если дополнительно предположить, что $f \in C[a,b]$, то $\exists c \in [a,b]$, т.ч. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.*

Доказательство. В силу свойств непрерывных на отрезке функций для $\mu \in [m, M]$ $\exists c \in [a,b]$, т.ч. $f(c) = \mu$.

Теорема о среднем остается справедливой и в случае, если $g(x) \leq 0$ на $[a,b]$ (доказательство аналогичное).

Замечание. Требование неотрицательности функции $g(x)$ существенно. Действительно, пусть

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} -1, \ x \in [-1, 0) \\ 1, \ x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда функции f и g интегрируемы как кусочно непрерывные функции. Интеграл $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^1 1\,dx = 2$ (свойство 1 из лекции 24), а в силу аддитивности интеграла и свойства 4 из той же лекции 24

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx = \int_{-1}^0 g(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = \int_{-1}^0 (-1)\,dx + \int_0^1 1\,dx = -1 + 1 = 0.$$

Следовательно, равенство $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx = \mu\int_{-1}^1 g(x)\,dx$ невозможно ни при каких μ.

ЛЕКЦИЯ 27

Интегралы с переменными пределами интегрирования

Пусть $f \in R[a,b] \Rightarrow f$ интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a,b] \Rightarrow$ на отрезке $[a,b]$ определены функции $\Phi(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$ и $\Psi(x) \doteq \int_x^b f(t)\,dt$, которые называются *интегралами с переменным верхним и нижним пределами интегрирования* соответственно. Так как $\Phi(x)+\Psi(x) = \int_a^b f(t)\,dt$, то $\Psi(x)$ отличается от $-\Phi(x)$ на постоянную, равную $\int_a^b f(t)\,dt$. Поэтому ограничимся изучением свойств функции $\Phi(x)$ — интеграла с переменным верхним пределом интегрирования.

Теорема 1. *Если $f \in R[a,b]$, то $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in C[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $x \in [a,b]$ и Δx, т.ч. $x+\Delta x \in [a,b]$. Тогда, используя аддитивность интеграла по отрезкам (лемма 1 лекции 25),

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Так как $f \in R[a,b]$, то f ограничена на $[a,b] \Rightarrow \exists M>0$, т.ч. $\forall t \in [a,b]$: $|f(t)| \le M \Rightarrow$

$$\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \le M\left|\int_x^{x+\Delta x} dt\right| = M|\Delta x|$$

(при оценке интеграла было использовано замечание 1 к теореме 3 лекции 25).

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и положим $\delta = \varepsilon/M \Rightarrow \forall \Delta x$, $|\Delta x|<\delta$: $|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)| \le M|\Delta x| < M\delta = \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f \in R[a,b]$. Если $f \in C(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$, то $\Phi \in D(x_0)$ и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$, т.е. $(\int_a^x f(t)\,dt)'|_{x=x_0} = f(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из выкладок теоремы 1 следует, что

$$\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f \in C(x_0)$, то $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall t \in [a, b]$, $|t - x_0| < \delta$: $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Далее, поскольку $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx = \Delta x$, то

$$f(x_0) = f(x_0)\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\, dt.$$

Поэтому при $0 < |\Delta x| < \delta$:

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt - f(x_0)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\, dt - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\, dt\right| =$$

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\, dt\right| \leq \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\, dt\right| <$$

$$\frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon.$$

Полученное неравенство означает, что $\Phi'(x_0) = f(x_0)$. Теорема доказана.

Замечание. Если точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка, то под производной в этой точке понимается соответствующая односторонняя производная.

Из теоремы 2 и связи функций $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ следует, что $\Psi'(x_0) = -\Phi'(x_0) = -f(x_0)$ во всех точках непрерывности функции f.

Следствие. *Если $f \in C[a, b]$, то у функции f существует первообразная на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ в силу доказанной теоремы будет одной из первообразных непрерывной функции f.

Теорема 3(основная теорема интегрального исчисления). *Пусть $f \in C[a, b]$, и $F(x)$ — произвольная ее первообразная на $[a, b]$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b,$$

называемая формулой Ньютона–Лейбница.

Доказательство. Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции f на $[a,b]$. Если $F(x)$ какая–либо другая первообразная той же функции f, то Φ и F отличаются на постоянную (теорема 5 лекции 23), т.е. $\exists C \in \mathbb{R}$, т.ч. $F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$. Положив в этом равенстве $x = a$, получаем, что $F(a) = 0 + C = C$; при $x = b$ имеем $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$, т.е. $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Теорема доказана.

Формула Ньютона–Лейбница справедлива и при $b < a$. Действительно, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b)$.

Формула Ньютона–Лейбница остается верной и для интегралов от кусочно–непрерывных на $[a,b]$ функций. В этом случае вместо первообразной надо брать обобщенную первообразную.

Примеры.

1. $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2|_0^1 = \frac{1}{2}$.

2. Функция $\Phi(x) = |x|$ является обобщенной первообразной кусочно непрерывной функции $f(x) = \mathrm{sgn} x \Rightarrow \int_{-1}^1 \mathrm{sgn} x\,dx = |x||_{-1}^1 = 0$.

Теорема 4(формула замены переменной в определенном интеграле). *Пусть $f \in C[a,b]$, g: $[\alpha,\beta] \to [a,b]$, $g \in C^1[\alpha,\beta]$ (т.е. $g' \in C[\alpha,\beta]$) и $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная функции f на $[a,b]$. Тогда $F(g(t))$ является первообразной непрерывной на $[\alpha,\beta]$ функции $f(g(t))g'(t)$, ибо $(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) =$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Формулу замены переменной можно применять, если $g(\alpha) = b$, $g(\beta) = a$. В этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

В самом деле,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(g(\alpha)) - F(g(\beta)) =$$

$$-(F(g(\beta)) - F(g(\alpha))) = -\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

Теорема 5(формула интегрирования по частям). *Пусть* u, $v \in C^1[a,b]$. *Тогда* $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрируем тождество

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

по отрезку $[a,b]$:

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

(все интегралы существуют, так как подынтегральные функции непрерывны на $[a,b]$).

Применяя к интегралу в левой части формулу Ньютона–Лейбница, получаем, что

$$u(x)v(x)|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание. Как и в случае неопределенных интегралов под $\int_a^b f(x)\,dg(x)$, где $g \in D[a,b]$, будем понимать интеграл Римана $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$. Тогда формула интегрирования по частям примет вид

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Теорема 6(формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Если* $f \in C^{n+1}[a,b]$ *(т.е.* $f^{(n+1)} \in C[a,b]$*), то* $\forall x \in [a,b]$ *справедлива формула:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $x \in [a,b]$. В силу формул Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям имеем

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=-\int_a^b f'(t)(x-t)'\,dt=-\int_a^x f'(t)\,d(x-t)=$$

$$=-f'(t)(x-t)|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\,d(x-t)^2=$$

$$=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2|_a^x+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2\,dt=\dots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ 28

Аддитивная функция ориентированного промежутка

Изложим общую схему, позволяющую с единой точки зрения охватить различные приложения определенного интеграла. Начнем с примера.

Пример 1. Пусть f: $[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a,b]$ и $f \geq 0$ на $[a,b]$. Для произвольных α и β, $\alpha \leq \beta$, принадлежащих отрезку $[a,b]$, обозначим через $S(\alpha,\beta)$ площадь множества $P(\alpha,\beta) \doteq \{(x,y)|\ \alpha \leq x \leq \beta,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, называемого криволинейной трапецией. Пусть $\gamma \geq \beta$ и $\gamma \in [a,b]$. Поскольку криволинейная трапеция $P(\alpha,\gamma)$ составлена из криволинейных трапеций $P(\alpha,\beta)$ и $P(\beta,\gamma)$, то в силу свойств площадей

$$S(\alpha,\gamma) = S(\alpha,\beta) + S(\beta,\gamma) \text{ (аддитивность площади)} \tag{2}$$

и, следовательно,

$$S(\alpha,\beta) = S(\alpha,\gamma) - S(\beta,\gamma)$$

Полагая $-S(\beta,\gamma) = S(\gamma,\beta)$, получим, что $\forall \alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$ вне зависимости от их взаимного расположения для функции S будет справедливо равенство (2). Перейдем к изучению свойств таких функций.

Определение 1. *Если каждой упорядоченной паре* (α,β) *точек* α, $\beta \in [a,b]$ *поставлено в соответствие число* $I(\alpha,\beta)$, *причем* $\forall \alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$ *выполняется равенство* $I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$, *то говорят, что на отрезке* $[a,b]$ *задана аддитвная функция* $I(\alpha,\beta)$ *ориентированного промежутка.*

Если $I(\alpha,\beta)$ — аддитивная функция ориентированного промежутка, то, взяв $\alpha = \beta = \gamma$, получим, что $I(\alpha,\alpha) = 0$. Если выбрать $\gamma = \alpha$, то $I(\beta,\alpha) = -I(\alpha,\beta)$.

Положим $\Psi(x) = I(a,x)$. Тогда вследствие аддитивности функции I

$$I(\alpha,\beta) = I(\alpha,a) + I(a,\beta) = -I(a,\alpha) + I(a,\beta) = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha).$$

Следовательно, всякая функция ориентированного промежутка может быть записана в виде

$$I(\alpha,\beta) = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha).$$

Если Φ: $[a,b] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, то $I(\alpha,\beta) \doteq \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ очевидно является аддитивной функцией ориентированного промежутка.

В приложениях важную роль играют аддитивные функции ориентированного промежутка, порождаемые функциями $\Phi(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, где $f \in R[a,b]$. В этом случае в силу аддитивности интеграла

$$I(\alpha,\beta) \doteq \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt,\ \alpha,\beta \in [a,b].$$

Про такие аддитивные функциии говорят, что они порождены интегрируемой функцией f.

Лемма (условие порождаемости аддитивной функции интегралом). *Пусть аддитивная функция ориентированного промежутка $I(\alpha,\beta)$ задана на $[a,b]$. Если существует $f \in R[a,b]$, т.ч.*

$$\forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]:\ \inf_{[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \le I(\alpha,\beta) \le \sup_{[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha),$$

то $I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем отрезок $[\alpha,\beta]$. Возьмем произвольное разбиение $T[\alpha,\beta]$ и пусть $m_i \doteq \inf_{\Delta_i} f(x)$, $M_i \doteq \sup_{\Delta_i} f(x)$, где $\Delta_i = [x_{i-1},x_i]$ — i-й отрезок разбиения. По условию $m_i\Delta x_i \le I(x_{i-1},x_i) \le M_i\Delta x_i$, $i=1,\dots,n$. Просуммировав по i эти неравенства, получим

$$s_T = \sum_i m_i\Delta x_i \le \sum_i I(x_{i-1},x_i) = I(\alpha,\beta) \le \sum_i M_i\Delta x_i = S_T.$$

Такие же оценки через суммы Дарбу имеют место и для интегральной суммы Римана функции f, рассматриваемой на отрезке $[\alpha,\beta]$: $s_T \le \sigma(f,T,\bar\xi) \le S_T$. Значит, для любого разбиения $T[\alpha,\beta]$ и любой его разметки $\bar\xi$ имеет место неравенство $|I(\alpha,\beta) - \sigma(f,T,\bar\xi)| \le S_T - s_T$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу критерия Дарбу интегрируемости $\exists\delta > 0$, т.ч. $\forall T[\alpha,\beta]$ с $\lambda(T) < \delta$: $S_T - s_T < \varepsilon \Rightarrow \forall (T,\bar\xi)$ с $\lambda(T) < \delta$: $|I(\alpha,\beta) - \sigma(f,T,\bar\xi)| < \varepsilon \Rightarrow I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Лемма доказана.

Если аддитивная функция промежутка может быть представлена интегралом Римана от некоторой функции, то эта последняя функция называется *плотностью* аддитивной функции.

Приложения интеграла

В школьном курсе математики даны элементарные представления о длине, площади и объеме. Опираясь на эти начальные сведения и лемму, приведем примеры использования интеграла.

Вычисление площадей

Пусть f: $[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a,b]$ и $f \geq 0$ на $[a,b]$, а $S(\alpha,\beta)$ площадь криволинейной трапеции $P(\alpha,\beta)$. Из представлений о площади (ее аддитивности и монотонности) и примера 1 будет следовать, что $\forall \alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$

$$S(\alpha,\gamma) = S(\alpha,\beta) + S(\beta,\gamma)$$

и

$$\inf_{[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \leq S(\alpha,\beta) \leq \sup_{[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \text{ (монотонность площади)}$$

(слева стоит площадь прямоугольника, вписанного в криволинейную трапецию, а справа — площадь прямоугольника, который содержит криволинейную трапецию). Следовательно, согласно лемме

$$S(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Пример 2. Найдем площадь $S(\alpha,\beta)$ кругового сектора окружности радиуса R, заключенного между лучами $\psi = \alpha$ и $\psi = \beta$. Для этого достаточно вычислить площадь сектора, заключенного между лучами $\psi = 0$ и $\psi = \beta$, $\beta \in [0,\pi/2]$. Площадь сектора равна сумме площадей прямоугольного треугольника с катетами $R\cos\beta$ и $R\sin\beta$ и криволинейной трапеции $\{(x,y)|\ x \in [R\cos\beta, R],\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\}$. Поэтому

$$S(0,\beta) = \frac{1}{2}R\cos\beta R\sin\beta + \int_{R\cos\beta}^{R} (R^2-x^2)^{1/2}\,dx \overset{x=R\cos t}{=}$$

$$\frac{1}{4}R^2\sin 2\beta + \int_\beta^0 R\sin t\,d(R\cos t) = \frac{R^2}{4}\sin 2\beta + R^2\int_0^\beta \sin^2 t\,dt =$$

$$\frac{R^2}{4}\sin 2\beta + R^2\int_0^\beta \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{R^2}{2}\beta.$$

Если $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$, то по аддитивности площади $S(\alpha,\beta) = S(0,\beta) - S(0,\alpha) = \dfrac{1}{2}R^2(\beta-\alpha)$.

Эта формула справедлива и в общем случае в силу симметрии окружности относительно осей координат и аддитивности площади.

Получим также формулу площади $S(a,b)$ сектора, заданного в полярной системе координат неравенствами $0 \le r \le r(t)$, $a \le t \le b$, где $r = r(t) \in R[a,b]$. Снова площадь сектора $S(\alpha,\beta)$ ($\alpha,\ \beta \in [a,b]$) как функция промежутка обладает свойством аддитивности, а в силу монотонности площади $\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b]$:

$$\frac{1}{2}\inf_{[\alpha,\beta]} r^2(t)(\beta-\alpha) \le S(\alpha,\beta) \le \frac{1}{2}\sup_{[\alpha,\beta]} r^2(t)(\beta-\alpha)$$

(в неравенстве слева и справа стоят площади круговых секторов, один из которых вписан в рассматриваемую фигуру, а другой содержит ее). Следовательно,

$$S(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(t)\,dt.$$

Объем тела вращения

Для произвольных $\alpha,\beta \in [a,b]$ ($\alpha \le \beta$) через $V(\alpha,\beta)$ обозначим объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $P(\alpha,\beta)$ вокруг оси Ox. В силу имеющихся представлений об объеме должны выполняться следующие соотношения: если $a \le \alpha \le \beta \le \gamma \le b$, то

$$V(\alpha,\gamma) = V(\alpha,\beta) + V(\beta,\gamma) \text{ (аддитивность объема)}$$

и

$$\pi\inf_{[\alpha,\beta]} f^2(x)(\beta-\alpha) \le V(\alpha,\beta) \le \pi\sup_{[\alpha,\beta]} f^2(x)(\beta-\alpha) \text{ (монотонность объема)}$$

(слева и справа в неравенстве стоят объемы цилиндров, первый из которых вписан в тело вращения, а второй содержит это тело). Поэтому

$$V(a,b) = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Длина кривой

Пусть дана непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{(x,y)|\ x \in [a,b],\ y = f(x)\}$, $f \in C^1[a,b]$. Получим формулу для длины кривой Γ, считая, что функция $f(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$, $y(t) \in C^1[t_1,t_2]$.

Для произвольных $\alpha, \beta \in [t_1, t_2]$ $(\alpha \le \beta)$ через $l(\alpha, \beta)$ обозначим длину участка кривой между точками $M(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ и $N(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$. Из наших представлений о длине $l(\alpha, \gamma) = l(\alpha, \beta) + l(\beta, \gamma)$ для $t_1 \le \alpha \le \beta \le \gamma \le t_2$. Из физической интерпретации $x(t)$ и $y(t)$ как закона движения материальной точки, а $\bar{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ как вектора скорости, получаем, что длина кривой удовлетворяет неравенствам

$$\inf_{[\alpha,\beta]} |\bar{v}(t)|(\beta - \alpha) \le l(\alpha, \beta) \le \sup_{[\alpha,\beta]} |\bar{v}(t)|(\beta - \alpha),$$

где $|\bar{v}(t)| \doteq \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$. Поскольку $x(t),\ y(t) \in C^1[t_1, t_2]$, то $|\bar{v}(t)| \in C[t_1, t_2] \Rightarrow |\bar{v}(t)| \in R[t_1, t_2]$. Значит,

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Выражение $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ называется дифференциалом длины кривой Γ и обозначается ds. Поэтому $l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} ds$.

Если известен явный вид функции $f(x)$, то полагая $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$ получаем параметрическое задание кривой $y = f(x)$. Поэтому $ds = \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$ и

$$l(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Если дана кривая $r = r(\psi)$, $r(\psi) \in C^1[t_1, t_2]$ в полярной системе координат, то ее можно задать параметрически: $x = r(\psi)\cos\psi$, $y = r(\psi)\sin\psi \Rightarrow ds = (x'^2(\psi) + y'^2(\psi))^{1/2}\, d\psi = ((r'(\psi)\cos\psi - r(\psi)\sin\psi)^2 + (r'(\psi)\sin\psi + r(\psi)\cos\psi)^2)^{1/2}\, d\psi = (r^2(\psi) + r'^2(\psi))^{1/2}\, d\psi$ и

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2(\psi) + r'^2(\psi))}\, d\psi.$$

ЛЕКЦИЯ 29

Несобственный интеграл

Предварительные соображения.

Рассмотрим функцию $g(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ на $[0,1)$. Она непрерывна на полуинтервале $[0,1)$ и не ограничена на нем ($\Rightarrow g$ не интегрируема на $[0,1]$ при любом ее доопределении в точке 1), а ее первообразная $\arcsin x$ будет непрерывна уже на всем отрезке $[0,1] \Rightarrow$ можно взять приращение первообразной на $[0,1]$: $\arcsin x|_0^1$. Поэтому вполне естественно объявить функцию $1/\sqrt{1-x^2}$ интегрируемой в расширенном смысле на полуинтервале $[0,1)$ и положить $\int_0^1 1/\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x|_0^1 = \pi/2$. Поскольку $\arcsin x|_0^1 = \lim_{\eta\to 1-0} \arcsin t|_0^\eta = \lim_{\eta\to 1-0} \int_0^\eta 1/\sqrt{1-x^2}\,dx$, то интегралом $\int_0^1 1/\sqrt{1-x^2}\,dx$ объявляется предел $\lim_{\eta\to 1-0} \int_0^\eta 1/\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Таким образом, если $f \in C[0,1)$ и существует $\lim_{\eta\to 1-0} \int_0^\eta f(x)\,dx$, то функцию f следует считать интегрируемой в расширенном смысле на $[0,1)$. При этом по определению следует положить, что $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 1-0} \int_0^\eta f(x)\,dx$.

Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что для функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, новое определение интеграла совпадает со старым определением через интегральные суммы Римана.

Наконец, можно снять требование $f \in C[0,1)$: для существования функции $\int_0^\eta f(x)\,dx$ на $[0,1)$ достаточно, чтобы $f \in R[0,\eta]$ $\forall \eta \in [0,1)$.

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, и $\forall \eta \in [a,b)$ $f \in R[a,\eta]$ (если $b < +\infty$, то функция f изначально может быть как определена при $x = b$, так и не определена).

Определение 1. *Функция $\int_a^\eta f(x)\,dx$ называется несобственным интегралом (НИ) функции f по полуинтервалу $[a,b)$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Если $c \in (a,b)$, то НИ $\int_c^b f(x)\,dx$ называют *остатком*, или *"хвостом"*, НИ $\int_a^b f(x)\,dx$.

Определение 2. *Если существует конечный $\lim_{\eta\to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.*

В первом случае говорят также, что несобственный интеграл существует, а во втором — что несобственный интеграл не существует.

Определение 3. *Если НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то величину $\lim_{\eta\to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx$ обозначают тем же символом $\int_a^b f(x)\,dx$,* *что и сам НИ, и называют ее значением НИ:* $\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x)\,dx$.

Подчеркнем, что термин "несобственный интеграл" используется для обозначения интегралов с переменным верхним пределом интегрирования исключительно в описанной ситуации.

Лемма 1. *Если $f \in R[a,b]$, то $\exists$ НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ и его значение совпадает с интегралом Римана функции f.*

Доказательство. В силу свойств интеграла с переменным верхним пределом интегрирования функция $\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx \in C[a,b] \Rightarrow \exists \lim_{\eta\to b-0}\Phi(\eta) = \Phi(b)$. Так как $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ — интеграл Римана функции f, то утверждение доказано.

Замечание. Если $b < +\infty$, то случаи, когда $f \in R[a,b]$ или f ограничена при $x \to b-0$ (а тогда f ограничена и на $[a,b)$), не представляют интереса. В первом случае, как было показано, $\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x)\,dx$ совпадает с интегралом Римана функции f, а второй сводится к первому, так как можно показать, что из наложенных на функцию f условий следует ее интегрируемость на $[a,b]$. Поэтому определение несобственного интеграла содержательно, когда либо $[a,b)$ конечный полуинтервал и f неограничена при $x \to b-0$, либо $b = +\infty$.

Чтобы отличать несобственные интегралы от интегралов Римана, последний иногда называют собственным интегралом. В дальнейшем, где это не вызывает недоразумений, говоря о несобственном интеграле, слово "несобственный" иногда будет опускаться.

Зафиксируем произвольное $c \in (a,b)$. Из аддитивности интеграла Римана следует, что $\forall \eta \in (c,b)$

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx \tag{3}$$

Поскольку функции $\int_a^\eta f(x)\,dx$ и $\int_c^\eta f(x)\,dx$ отличаются на постоянную (равную $\int_a^c f(x)\,dx$), то существование $\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x)\,dx$ равносильно существованию $\lim_{\eta\to b-0}\int_c^\eta f(x)\,dx$. Поэтому сходимость (расходимость) НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ эквивалентна сходимости (расходимости) любого его "хвоста" $\int_c^b f(x)\,dx$.

В случае сходимости НИ $\int_a^b f(x)\,dx$, переходя к пределу в (3), получаем, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, сходящиеся НИ обладают свойством аддитивности.

Если $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$, где $-\infty \le a < b < +\infty$ и $f \in R[\theta, b]$ $\forall \theta \in (a,b]$, то несобственным интегралом по полуинтервалу $(a,b]$ называется функция $\int_\theta^b f(x)\,dx$, а его сходимость, расходимость и значение определяются аналогично рассмотренному выше случаю (предел, естественно, берется при $\theta \to a+0$).

Пусть теперь $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ и f интегрируема по Риману на любом отрезке, содержащемся в (a,b).

Определение 4. *Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ функции f по интервалу (a,b) называется пара несобственных интегралов $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$, где $c \in (a,b)$ — произвольная фиксированная точка.*

Определение 5. *Если оба этих несобственных интегралов сходятся, то НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся. Если хотя бы один расходится, то — расходящимся.*

Определение 6. *Если НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то его значением, которое обозначается тем же символом $\int_a^b f(x)\,dx$, что и сам НИ, называется $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ — сумма значений НИ $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$.*

Легко показать, что определение сходимости (расходимости) НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ и его значение корректны, т.е. не зависят от выбора точки $c \in (a,b)$.

Примеры.

1. Исследуем на сходимость $\int_0^1 dx/x^p$. Очевидно, что этот интеграл следует рассматривать как НИ по полуинтервалу $(0,1]$.

$$\text{а) } p = 1: \lim_{\theta\to 0+0} \int_\theta^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\theta\to 0+0} \ln x|_\theta^1 = \ln 1 - \lim_{\theta\to 0+0} \ln\theta = +\infty,$$

следовательно, интеграл $\int_0^1 dx/x$ расходится;

$$\text{б) } p \ne 1: \lim_{\theta\to 0+0} \int_\theta^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\theta\to 0+0} 1/(1-p)x^{1-p}|_\theta^1 = \frac{1}{1-p} \lim_{\theta\to 0+0} (1-\theta^{1-p}),$$

следовательно, при $p < 1$ НИ сходится (отметим, что для $0 < p < 1$ функция $1/x^p$ не ограничена на $(0,1]$ $\Rightarrow$ не интегрируема по Риману на $[0,1]$ при любом ее доопределении в точке $x = 0$) и его значение равно $\dfrac{1}{1-p}$.

При $p > 1$ предел равен $+\infty$ $\Rightarrow$ при $p > 1$ НИ расходится.

Точно так же устанавливается, что НИ $\int_a^b dx/(x-a)^p$ и $\int_a^b dx/(b-x)^p$, где $-\infty < a < b < +\infty$, сходятся тогда и только тогда, когда $p < 1$.

2. Исследуем на сходимость $\int_1^{+\infty} dx/x^p$:

a) $p = 1$: $\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{\eta} dx/x = \lim_{\eta\to+\infty} \ln x|_1^{\eta} = +\infty \Rightarrow$ НИ расходится;

b) $p \neq 1$: $\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{\eta} dx/x^p = \lim_{\eta\to+\infty}(1/(1-p))x^{1-p}|_1^{\eta}$. При $p > 1$ предел равен $1/(p-1) \Rightarrow$ НИ сходится и его значение равно $1/(p-1)$. При $p < 1$ предел равен $+\infty \Rightarrow$ НИ расходится.

3. Исследуем НИ $\int_0^{+\infty} dx/x^p$. Этот интеграл следует рассматривать как НИ по интервалу $(0, +\infty)$. Поэтому согласно определению изучим пару НИ $\int_0^1 dx/x^p$ и $\int_1^{+\infty} dx/x^p$. Какое бы p ни взять, один из интегралов расходится (это следует из примеров 1 и 2) $\Rightarrow$ рассматриваемый НИ расходится $\forall p$.

Рассмотрим общий случай. Пусть точки $x_1, \ldots, x_m \in (a, b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, а функция f такова, что она интегрируема по Риману на любых отрезках, содержащихся в интервалах $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, b)$.

Определение 7. *Несобственным интегралом* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется совокупность несобственных интегралов* $I_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx$, $I_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \ldots, I_{m+1} = \int_{x_m}^{b} f(x)\,dx$.

Определение 8. *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется сходящимся, если сходятся все несобственные интегралы* $I_1, \ldots, I_{m+1}$*, а его значением, которое обозначается тем же символом* $\int_a^b f(x)\,dx$*, — сумма значений несобственных интегралов* $I_1, \ldots I_{m+1}$.

Если хотя бы один несобственный интеграл из указанной совокупности расходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется расходящимся.*

Из определений несобственных интегралов следует, что достаточно рассмотреть первые два типа интегралов. В дальнейшем ограничимся исследованием $\int_a^{\eta} f(x)\,dx$, поскольку второй тип изучается аналогично.

Выясним, какую совокупность несобственных интегралов необходимо рассмотреть , чтобы установить сходимость или расходимость интеграла от данной функции. Для этого введем понятие особой точки функции.

Определение 9. *Точка* $b \in E'$ *называется особой точкой, или особенностью, функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$*, если либо* $|b| < \infty$ *и* f *не ограничена при* $x \to b$*, либо* $b = \pm\infty$.

Тогда на основании замечания заключаем, что в качестве точек

x_j, фигурирующих в определении несобственного интеграла, следует брать особенности функции f, принадлежащие интервалу (a, b).

Свойства несобственных интегралов

Будем рассматривать функции, заданные на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$ и интегрируемые по Риману на любых отрезках из этого полуинтервала.

Теорема 1(линейность НИ). *Если* $\exists$ *НИ* $\int_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int_a^b g(x)\,dx$, *то* $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *НИ* $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ *сходится и*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем (пояснения ниже)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx =$$

$$\lim_{\eta \to b-0} (\alpha \int_a^\eta f(x)\,dx + \beta \int_a^\eta g(x)\,dx) =$$

$$\lim_{\eta \to b-0} (\alpha \int_a^\eta f(x)\,dx) + \lim_{\eta \to b-0} (\beta \int_a^\eta g(x)\,dx) =$$

$$\alpha \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx + \beta \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta g(x)\,dx =$$

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(сначала воспользовались определением НИ, затем — линейностью интеграла Римана, а после — линейностью предела и снова определением НИ).

Теорема 2(интегрирование неравенств). *Если НИ* $\int_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходятся и* $\forall x \in [a, b)\ f(x) \le g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств интеграла Римана $\forall \eta \in [a, b)$: $\int_a^\eta f(x)\,dx \le \int_a^\eta g(x)\,dx$. Переходя к пределу при $\eta \to b - 0$ в этом неравенстве, получаем (4).

ЛЕКЦИЯ 30

Теорема 1(формула Ньютона–Лейбница для НИ). *Пусть $f \in C[a,b)$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a,b)$.*

Тогда существование (конечного) предела $\lim_{x\to b-0} F(x) = F(b-0)$ равносильно сходимости НИ $\int_a^b f(x)\,dx$. В случае сходимости имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a) = F(x)\big|_a^{b-0}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $\eta \in [a,b)$ по формуле Ньютона–Лейбница для интеграла Римана

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a), \tag{6}$$

следовательно, пределы функций $\int_a^\eta f(x)\,dx$ и $F(\eta)$ при $\eta \to b-0$ существуют или не существуют одновременно, ибо эти функции отличаются на постоянную, равную $F(a)$. Если эти пределы существуют, то после перехода к пределу в (6) получаем (5). Теорема доказана.

Теорема 2(замена переменной в НИ). *Пусть $f \in C[a,b)$, $g \in C^1[\alpha,\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, $a = g(\alpha) \le g(t) < b = \lim_{t\to\beta-0} g(t)$ и существует НИ $\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда НИ $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$ сходится и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Psi(x)$ — какая-либо первообразная функции f на $[a,b)$. Поскольку функция $\Psi(g(t))$ является первообразной для непрерывной на $[\alpha,\beta)$ функции $f(g(t))g'(t)$, то $\forall\gamma \in [\alpha,\beta)$ (по формуле Ньютона–Лейбница для интеграла Римана)

$$\int_\alpha^\gamma f(g(t))g'(t)\,dt = \Psi(g(\gamma)) - \Psi(g(\alpha)) = \Psi(g(\gamma)) - \Psi(a).$$

Устремим $\gamma \to \beta - 0$. По теореме 1 существует конечный $\lim_{x\to b-0} \Psi(x)$, а по теореме о пределе композиции (теорема 3 лекции 11) $\exists \lim_{\gamma\to\beta-0} \Psi(g(\gamma)) = \Psi(b-0)$. Следовательно, на основании теоремы 1 НИ $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$ сходится и

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = \lim_{\gamma\to\beta-0} \Psi(g(\gamma)) - \Psi(a) =$$

$$\Psi(b-0) - \Psi(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорему о замене переменной можно применять для доказательства сходимости НИ. Если дан НИ $\int_a^b f(x)\,dx$, то выполняя формально замену переменной, приходим к интегралу $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$. Если этот интеграл сходится, а обратная замена $t = g^{-1}(x)$ также удовлетворяет условиям теоремы о замене переменной, то исходный НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ является сходящимся.

Теорема 3(интегрирование по частям НИ). *Пусть* u, $v \in C^1[a,b)$. *Если две из трех функций* $\int_a^\eta u(x)v'(x)\,dx$, $\int_a^\eta u'(x)v(x)\,dx$ *и* $u(\eta)v(\eta)$ *имеют конечный предел при* $\eta \to b-0$, *то третья функция также имеет конечный предел и справедливо равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\eta \in [a,b)$ по формуле интегрирования по частям для интеграла Римана

$$\int_a^\eta uv'\,dx = uv|_a^\eta - \int_a^\eta u'v\,dx. \tag{7}$$

Если две из трех перечисленных функций имеют конечные пределы, то из (7), в силу свойств предела, следует существование предела третьей функции. Предельный переход при $\eta \to b-0$ в (7) завершает доказательство.

Сходимость несобственных интегралов

Теорема 4(критерий Коши сходимости НИ). *НИ* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta = \eta(\varepsilon) \in [a,b)$, *т.ч.* $\forall\ \eta',\ \eta'' \in (\eta,b)$: $|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сходимость НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ по определению означает существование конечного предела при $\eta \to b-0$

функции $\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$, что равносильно выполнению критерия Коши существования этого предела: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta \in [a,b)$, т.ч. $\forall\ \eta'$, $\eta'' \in (\eta, b)$: $|\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')| < \varepsilon$. А это и есть требуемое утверждение, т.к.

$$\Phi(\eta'') - \Phi(\eta') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx.$$

Критерий Коши доказан.

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Лемма (критерий сходимости НИ от неотрицательной функции). *Пусть $f \geq 0$ на $[a,b)$. НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда функция $\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$ ограничена сверху.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть η', $\eta'' \in [a,b)$ и $\eta' < \eta'' \Rightarrow \Phi(\eta'') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx \geq \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \Phi(\eta')$ (воспользовались свойством монотонности интеграла по отрезкам). В силу произвольности η' и η'' это означает, что $\Phi(\eta) \uparrow$ на $[a,b)$. Возрастающая на $[a,b)$ функция имеет предел при $\eta \to b-0$ тогда и только тогда, когда она ограничена сверху на $[a,b)$ (теорема 2 лекции 11). Лемма доказана.

Замечание. Если $f \geq 0$, то расходимость НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ означает, что $\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x)\,dx = +\infty$. Поэтому для обозначения расходимости НИ от неотрицательной функции используется запись $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Напротив, существование $\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x)\,dx$ записывается как $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$.

Теорема 5(признак сравнения). *Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a,b)$. Тогда*

1) *если НИ $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ также сходится*

2) *если $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, то и $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\eta \in [a,b)$ из условий теоремы и свойств интеграла Римана:

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \leq \int_a^\eta g(x)\,dx \tag{8}$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$, то согласно критерию сходимости НИ от неотрицательной функции $\exists C > 0$, т.ч. $\forall \eta \in [a,b)$: $\int_a^\eta g(x)\,dx \leq C$.

Тогда из (8) следует, что $\forall \eta \in [a,b)$: $\int_a^\eta f(x)\,dx \le C$. Поэтому в силу того же критерия $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$.

Если $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, то по лемме 1 функция $\int_a^\eta f(x)\,dx$ не ограничена сверху. На основании неравенства (8) заключаем, что функция $\int_a^\eta g(x)\,dx$ также не ограничена сверху. Следовательно, $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

Следствие (метод выделения главной части). *Если*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ при } x \to b-0, \text{ где } g(x) \ge 0 \text{ на } [a,b),$$

то НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Имеем

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) = g(x)(1 + o(1))\ (x \to b-0).$$

Так как $o(1)$ — бесконечно малая функция при $x \to b-0$, то $\exists \eta_0 \in [a,b)$, т.ч. $\forall x \in (\eta_0, b)$: $|o(1)| < 1/2 \Rightarrow \forall x \in (\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}g(x) \le f(x) \le \frac{3}{2}g(x).$$

Поскольку НИ $\int_a^b$ и его "хвост" $\int_{\eta_0}^b$ сходятся или расходятся одновременно, то утверждение следствия непосредственно вытекает из признака сравнения.

Примеры.

1. Исследуем на сходимость $\int_0^{\pi/2} 1/(\sin^p x \cos^q x)\,dx$. Особыми точками подынтегральной функции будут $x = 0$ (если $p > 0$) и $x = \pi/2$ (если $q > 0$). Поэтому рассмотрим пару НИ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}\,dx \text{ и } \int_1^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}\,dx.$$

Выделим главную часть подынтегральной функции при $x \to 0+0$ и при $x \to \pi/2 - 0$.

При $x \to 0+0$:

$$\sin^{-p} x \cos^{-q} x = (x + o(x))^{-p}(1 + o(1))^{-q} =$$

$$x^{-p}(1 + o(1))^{-p}(1 + o(1))^{-q} = x^{-p}(1 + o(1))$$

На основании примера 1 из лекции 28 и метода выделения главной части заключаем, что НИ сходится в нуле $\Leftrightarrow p < 1$.

При $x \to \pi/2 - 0$ сделаем замену $t = \pi/2 - x \Rightarrow t \to 0 + 0$ и

$$\sin^{-p} x \cos^{-q} x = \sin^{-p}(\pi/2 - t) \cos^{-q}(\pi/2 - t) = \cos^{-p} t \sin^{-q} t =$$

$$(1 + o(1))^{-p}(t + o(t))^{-q} = (1 + o(1))t^{-q}(1 + o(1))^{-q} =$$
$$t^{-q}(1 + o(1)) = (\pi/2 - x)^{-q}(1 + o(1)).$$

Опять используя пример 1 из предыдущей лекции, делаем вывод, что НИ сходится в точке $x = \pi/2 \Leftrightarrow q < 1$.

Следовательно, рассматриваемый интеграл существует $\Leftrightarrow$ и $p < 1$, и $q < 1$.

2. Выясним, когда сходится НИ $\int\limits_3^{+\infty} dx/(x^p \ln^q x)$.

Пусть $p > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$, т.ч. $p - \varepsilon > 1$ и представим $p = p - \varepsilon + \varepsilon \Rightarrow$

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} = \frac{1}{x^{p-\varepsilon}} \cdot \frac{1}{x^\varepsilon \ln^q x} \leq \frac{1}{x^{p-\varepsilon}} \ \forall x > \eta'_\varepsilon$$

(в самом деле, $\forall q \in \mathbb{R}$ функция $\dfrac{1}{x^\varepsilon \ln^q x} \to 0$ при $x \to +\infty$ (при $q < 0$ это следует из правила Лопиталя) $\Rightarrow \exists \eta'_\varepsilon$, т.ч. $\forall x > \eta'_\varepsilon$: $\dfrac{1}{x^\varepsilon \ln^q x} \leq 1$) $\Rightarrow$ НИ сходится $\forall q$ в силу признака сравнения.

Пусть $p < 1$. Тогда выберем $\varepsilon > 0$, т.ч. $p + \varepsilon < 1$ и представим $p = p + \varepsilon - \varepsilon$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} = \frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \cdot \frac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \geq \frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \ \forall x > \eta''_\varepsilon$$

(это следует из того, что $\forall q$: $\dfrac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \to +\infty$ при $x \to +\infty \Rightarrow \exists \eta''_\varepsilon$, т.ч. $\forall x > \eta''_\varepsilon$: $\dfrac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \geq 1$) $\Rightarrow$ НИ расходится по признаку сравнения $\forall q$.

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int_3^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^q x} \overset{t = \ln x}{=} \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$$

$\Rightarrow$ в силу теоремы 2, замечания к ней и примера 2 из лекции 29 НИ сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$.

ЛЕКЦИЯ 31

Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов

Пусть f: $[a, b) \to \mathbb{R}$ и $\forall \eta \in [a, b)$: $f \in R[a, \eta]$.

Определение 1. *НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, при этом функция f называется абсолютно интегрируемой (в несобственном смысле) на $[a, b)$.*

Теорема 1. *Всякий абсолютно сходящийся несобственный интеграл сходится.*

Доказательство. Пусть $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty \Rightarrow$ в силу критерия Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta = \eta(\varepsilon)$, т.ч. $\forall \eta', \eta'' \in (\eta, b)$: $|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx| < \varepsilon$. Но $|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx| \le |\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx| \Rightarrow \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b)$: $|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx| < \varepsilon \Rightarrow$ по критерию Коши НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Замечание. В случае абсолютной сходимости интеграла справедливо неравенство $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, которое получается из неравенства $|\int_a^\eta f(x)\,dx| \le \int_a^\eta |f(x)|\,dx$ предельным переходом при $\eta \to b-0$.

Определение 2. *Если НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а НИ $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется условно сходящимся.*

Признаки сходимости несобственных интегралы от знакопеременных функций

Приведем без доказательств признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов (в этих признаках предполагается, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке, содержащемся в полуинтервале $[a, b)$).

Теорема 2(Дирихле). *НИ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится, если:*

1) *$\exists C > 0$, т.ч. $\forall t \in [a, b)$: $|\int_a^t f(x)\,dx| \le C$*

2) *$g(x)$ монотонна на $[a, b)$*

3) *$g(x) \to 0$ при $x \to b-0$.*

Замечания.

1) Условия 2 и 3 влекут ограниченность функции g на $[a, b)$.

2) Из монотонности функции g на $[a, b)$ следует ее интегрируемость на любых отрезках $[a, \eta]$, $\eta \in [a, b)$ (теорема 3 лекции 25) $\Rightarrow$ произведение $f(x)g(x) \in R[a, \eta]\ \forall \eta \in [a, b) \Rightarrow$ НИ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ имеет смысл.

Теорема 3(Абель). *НИ* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *сходится, если:*
1) *НИ* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*
2) $g(x)$ *монотонна на* $[a,b)$
3) $\exists M>0$, *т.ч.* $\forall x\in[a,b)$: $|g(x)|\le M$.

Замечания.

1) Из монотонности функции g вытекает, что она не меняет знака в некоторой окрестности точки b. Поэтому знакопеременной в окрестности особой точки в приведенных теоремах может быть только функция f.

2) Хотя в формулировках признаков Дирихле и Абеля ничего не говорится о знаке функции f, эти теоремы следует применять, именно когда f знакопеременна в любой окрестности точки b. В самом деле, если в признаке Абеля функция f знакопостоянна, то сходимость НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ равносильно его абсолютной сходимости. Тогда НИ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится по признаку сравнения, ибо $|f(x)g(x)|\le M|f(x)|$ без требования монотонности функции $g(x)$ (его надо заменить на условие интегрируемости функции $g(x)$ на любых отрезках вида $[a,\eta]$, где $\eta>a$). Это же верно и для признака Дирихле: для знакопостоянной функции $f(x)$ условие 1) равносильно сходимости НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ (см. лемму из предыдущей лекции), а условие 2) и 3) влекут ограниченность функции $g(x)$.

Пример. Исследуем на сходимость и абсолютную сходимость $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$. Особой точкой подынтегральной функции будет только $+\infty$; точка $x=0$ не особая: в ней функция доопределяется по непрерывности единицей. Следовательно, исходный интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ (перешли к рассмотрению "хвоста" , что позволит применить к получившемуся интегралу признак Дирихле: к исходному интегралу это невозможно, ибо функция $1/x$ не ограничена и не монотонна на $[0,+\infty)$ при любом ее доопределении в нуле).

Имеем $|\int_1^t \sin x\,dx| = |-\cos t+\cos 1|\le 2$, функция $1/x$ монотонна на $[1,+\infty)$ и $1/x\to 0$ при $x\to+\infty\Rightarrow$ по признаку Дирихле интеграл сходится.

Проверим есть ли абсолютная сходимость. Воспользуемся очевидным неравенством

$$|\sin x|\ge\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ \Rightarrow\int_1^t\frac{|\sin x|}{x}\,dx\ge$$

$$\int_1^t\frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_1^t\frac{1}{x}\,dx-\int_1^t\frac{\cos 2x}{x}\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\ln t-\int_1^t\frac{\cos 2x}{x}\,dx\right).$$

Первое слагаемое не имеет предела (конечного) при $t\to+\infty$, а второе — имеет ($\int_1^{+\infty}\cos 2x/x\,dx$ сходится по признаку Дирихле, что доказывается аналогично сходимости исходного интеграла) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} |\sin x/x|\,dx$ расходится $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin x/x\,dx$ сходится условно.

Замечание. В признаках Дирихле и Абеля требование монотонности функции $g(x)$ существенно. Действительно, пусть $f(x) = \sin x$, а $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Тогда НИ $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}\,dx$, как было показано выше, расходится.

Теперь положим $f(x) = g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Тогда НИ $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится по признаку Дирихле, а НИ $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится.

В обоих примерах выполнены все условия признаков Дирихле и Абеля соответственно, кроме монотонности функции $g(x)$.

Несобственные интегралы в смысле главного значения

Можно ввести еще один тип несобственного интеграла. Пусть $c \in (a,b)$ и f интегрируема по Риману на любых отрезках из $[a,c)$ и $(c,b]$.

Определение 3. *Несобственным интегралом* $p.v. \int_a^b f(x)\,dx$ *функции* f *в смысле главного значения называется функция* $G(t) \doteq \int_a^{c-t} f(x)\,dx + \int_{c+t}^b f(x)\,dx$ $(t \in (0, \min(b-c, c-a)))$.

Определение 4. *Если существует конечный* $\lim_{t\to+0} G(t)$, *то интеграл* $p.v. \int_a^b f(x)\,dx$ *сходится (существует) в смысле главного значения, в противном — интеграл расходится (не существует) в смысле главного значения.*

Определение 5. *Если интеграл сходится в смысле главного значения, то величина предела* $\lim_{t\to+0} G(t)$ *называется значением интеграла в смысле главного значения и обозначается тем же символом* $p.v. \int_a^b f(x)\,dx$:

$$p.v. \int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to+0} \left(\int_a^{c-t} f(x)\,dx + \int_{c+t}^b f(x)\,dx \right).$$

Эти определения будут содержательными, если c является особой точкой функции f. В противном случае значение несобственного интеграла совпадет с интегралом Римана f на отрезке $[a,b]$.

Пусть НИ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится в прежнем смысле, т.е. сходятся оба НИ $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$. В этом случае (см. теорему 1 из лекции 11) $\exists \lim_{t\to+0}(\int_a^{c-t} f(x)\,dx + \int_{c+t}^b f(x)\,dx) = \lim_{t\to+0} \int_a^{c-t} f(x)\,dx + \lim_{t\to+0} \int_{c+t}^b f(x)\,dx$. Поскольку величина справа равна значению НИ в прежнем смысле, то получаем, что НИ от $f(x)$ сходится и в смысле главного значения, причем величины этих НИ совпадают. Обратное неверно.

Пример. $p.v.\int_{-1}^{1} 1/x\,dx = 0$. Действительно,

$$p.v.\int_{-1}^{1} 1/x\,dx = \lim_{t\to+0}\left(\int_{-1}^{-t} 1/x\,dx + \int_{t}^{1} 1/x\,dx\right) =$$

$$\lim_{t\to+0}\left(\ln|x||_{-1}^{-t} + \ln x|_{t}^{1}\right) = 0.$$

В прежнем смысле данный интеграл не существует.

Пусть $f\colon (-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ и $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$: $f\in R[a,b]$.

Определение 6. *Несобственным интегралом* $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *функции* f *в смысле главного значения называется функция* $G(t)\doteq\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ *(*$t>0$*).*

Определение 7. *Если существует конечный* $\lim_{t\to+\infty} G(t)$, *то интеграл* $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится в смысле главного значения, в противном — расходится.*

Определение 8. *Если интеграл сходится в смысле главного значения, то величина предела* $\lim_{t\to+\infty} G(t)$ *называется значением интеграла в смысле главного значения и обозначается тем же символом* $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$*:*

$$p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

Как и выше из сходимости НИ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ в прежнем смысле следует его сходимость в смысле главного значения и совпадение их величин.

Пример. $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$. Действительно, $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx = \lim_{t\to+\infty} x^2/2|_{-t}^{t} = 0$. В прежнем смысле рассматриваемый несобственный интеграл не существует.

Метрические пространства

Пусть X — некоторое непустое множество.

Определение 9. *Метрикой (расстоянием) на множестве* X *называется всякая Функция* $d(x,y)$, *заданная на* $X\times X$, *обладающая следующими свойствами*

1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2) $\forall x, y \in X$: $d(x,y) = d(y,x)$ *(симметричность метрики);*

3) $\forall x, y, z \in X$: $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ *(неравенство треугольника).*

Замечание. Из свойств метрики следует, что $\forall x, y \in X$: $d(x,y) \ge 0$ (неотрицательность расстояния). Действительно, положим в неравенстве треугольника $z = x$. Тогда $0 = d(x,x) \le d(x,y) + d(y,x) = d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$.

Определение 10. *Метрическим пространством называется пара (X, d), где X — непустое множество, а d — метрика на нем.*

Таким образом, метрическое пространство — это множество, в котором определено расстояние между любыми двумя точками. Если метрика d фиксирована, то будем обозначать метрическое пространство тем же символом X, что и само множество.

Примеры.

1. Любое непустое множество можно превратить в метрическое пространство, задав метрику формулой

$$d(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & x \ne y; \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(ясно, что свойства метрики для $d(x,y)$ выполнены).

2. Очевидно, что функция $d(x,y) \doteq |x-y|$ будет метрикой на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

3. Легко проверить, что функция $d(x,y) \doteq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ ($x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$) является метрикой на $\mathbb{R}^2$.

4. В множестве $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, метриками будут, например, $d_1(f,g) \doteq \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ и $d_2(f,g) \doteq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$. Проверка того, что функция d_1 является расстоянием, не составляет труда. Что касается d_2, то симметричность этой функции очевидна. Далее, поскольку $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|,$$

то интегрируя это неравенство, получаем неравенство треугольника. Наконец, свойство 1 метрики следует из теоремы 1 лекции 26.

ЛЕКЦИЯ 32

Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим теперь $\mathbb{R}^n$ — множество всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$. Каждый такой набор будем обозначать строчной буквой, например, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и называть точкой множества $\mathbb{R}^n$. Если $z = (z_1, \ldots, z_n)$, то z_j называют j-ой координатой точки z, $j = 1, \ldots, n$. Покажем, что функция

$$d(x, y) \doteq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

$(x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n))$ является метрикой на $\mathbb{R}^n$. Выполнимость свойств 1 и 2 очевидна. Остается проверить свойство 3.

Теорема 1(неравенство Коши–Буняковского). *Для произвольных $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)^{1/2}.$$

Если в каждом наборе чисел x_j и y_j хотя бы одно число отлично от нуля, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда все числа x_j и y_j пропорциональны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что неравенство справедливо, когда все числа $y_j = 0$. Если это не так, то рассмотрим квадратный трехчлен от $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - t y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2t \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - t^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

Вследствие неотрицательности многочлена его дискриминант

$$D = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \leq 0 \ \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

Извлекая корень из обеих частей неравенства и избавляясь от модуля, получаем требуемую оценку.

Неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow D = 0$, что равносильно наличию у квадратного трехчлена действительного корня, т.е. $\exists t$, т.ч. $\forall j = 1, \ldots, n$: $x_j - ty_j = 0$. В случае существования ненулевых чисел в наборах x_j и y_j корень $t \neq 0$, откуда следует пропорциональность чисел x_j и y_j.

Замечание. Из полученного неравенства следует, что $\forall a,\ b \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j||b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

Левое неравенство — это просто неравенство треугольника. Чтобы получить правое, положим в неравенстве Коши–Буняковского $x_j = |a_j|$, $y_j = |b_j|$, $j = 1, \ldots, n$, что с учетом равенств $a_j^2 = |a_j|^2$, $b_j^2 = |b_j|^2$ приводит к требуемой оценке.

Теперь проверим справедливость неравенства треугольника, которое для рассматриваемой метрики имеет вид

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n}(y_j - z_j)^2\right)^{1/2}.$$

Для удобства положим $u_j = x_j - y_j$, $v_j = y_j - z_j \Rightarrow u_j + v_j = x_j - z_j$, а доказываемое неравенство при этом примет вид

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(u_j + v_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2}.$$

Возведем в квадрат обе части проверяемого неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n}(u_j + v_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} u_j^2 + \sum_{j=1}^{n} v_j^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2}.$$

После раскрытия квадрата слева и приведения подобных членов получаем истинное неравенство (неравенство Коши–Буняковского)

$$\sum_{j=1}^{n} u_j v_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно, для функци $d(x,y) = ((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2)^{1/2}$ выполняется свойство 3 метрики.

В дальнейшем $\mathbb{R}^n$ будет рассматриваться только с указанной метрикой.

Замечание. Поскольку для действительных чисел $(x_j-y_j)^2 = |x_j - y_j|^2$, то $d(x,y) = (\sum_{j=1}^n |x_j-y_j|^2)^{1/2}$.

Введенная метрика удовлетворяет неравенствам, которые будут использованы в дальнейшем:

$$|x_k - y_k| \leq d(x,y) \leq \begin{cases} |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|, \\ n^{1/2} \max_{j=1,\ldots,n} |x_j-y_j| \end{cases}$$

$(k = 1, \ldots, n)$. Левое и правое верхнее неравенства проверяются возведением в квадрат, правое нижнее неравенство следует из оценки $|x_k-y_k| \leq \max_{j=1,\ldots,n} |x_j-y_j|$.

Чтобы изложение теории функций многих переменных не зависило от общей теории метрических пространств, всюду ниже под метрическим пространством (X,d) можно понимать метрическое пространство $\mathbb{R}^n$. При этом свойства компактов в метрических пространствах можно опустить, оставив независимое доказательство теоремы Больцано–Вейерштрасса для $\mathbb{R}^n$, которое приводится после доказательства полноты метрического пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Всякое отображение $f\colon \mathbb{N} \to X$ называется последовательностью (или последовательностью точек) множества X.*

Для последовательностей множества X используются те же обозначения, что и для числовых последовательностей.

Пусть (a_k) — последовательность точек множества X.

Определение 2. *Точка $a \in X$ называется пределом последовательности (a_k) в метрическом пространстве (X,d) ($a_k \xrightarrow{d} a$ при $k \to +\infty$), если числовая последовательность $d(a_k,a) \to 0$ при $k \to +\infty$.*

Последовательность (a_k) стремится к бесконечности (бесконечно удаленной точке) в метрическом пространстве (X,d), если для некоторого $b \in X$: $\lim_{k\to+\infty} d(a_k,b) = +\infty$.

Запишем на $\varepsilon - k$ языке что значит, что $a_k \overset{d}{\to} a$:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ т.ч. } \forall k > k_\varepsilon: \ d(a_k, a) < \varepsilon.$$

Определение 3. *Последовательность* (a_k) *точек множества* X *имеет предел (сходится) в метрическом пространстве* (X, d) *, если* $\exists a \in X$*, т.ч.* $a_k \overset{d}{\to} a$ *при* $k \to +\infty$.

Из свойств метрики следует единственность предела: если a и b являются пределами последовательности (a_k), то $\forall\varepsilon > 0$: $d(a, b) \leq d(a, a_k) + d(a_k, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ $(k > k_\varepsilon) \Rightarrow d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

Шары в метрических пространствах. Внутренние, внешние и граничные точки множества

Пусть дано метрическое пространство (X, d).

Определение 4. *Шаром радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $a \in X$ *называется множество* $B(a, r) \doteq \{x \in X |\ d(a, x) < r\}$.

Через $\dot{B}(a, r)$ обозначается *проколотый* шар, т.е. $\dot{B}(a, r) \doteq B(a, r) \setminus \{a\}$.

Определение 5. *Замкнутым шаром радиуса* $r \geq 0$ *с центром в точке* $a \in X$ *называется множество* $\bar{B}(a, r) \doteq \{x \in X |\ d(a, x) \leq r\}$.

Пусть E — непустое подмножество метрического пространства X.

Определение 6. *Точка* $a \in X$ *называется внутренней точкой множества* E*, если существует шар* $B(a, r)$*, т.ч.* $B(a, r) \subset E$*, т.е. точка* a *входит в множество* E *вместе с некоторым шаром с центром в этой точке. Множество внутренних точек* E *обозначается* $\mathrm{int}E$.

Определение 7. *Точка* $a \in X$ *называется внешней точкой множества* E*, если существует шар* $B(a, r)$*, т.ч.* $B(a, r) \cap E = \emptyset$*. Множество внешних точек* E *обозначается* $\mathrm{ext}E$.

Другими словами, точка $a \in X$ является внешней точкой множества E, если она является внутренней точкой множества $X \setminus E$.

Определение 8. *Точка* $a \in X$ *называется граничной точкой множества* E*, если для произвольного шара* $B(a, r)$*:* $B(a, r) \cap E \neq \emptyset$ *и* $B(a, r) \cap X \setminus E \neq \emptyset$*, т.е. точка* a *не является ни внутренней, ни внешней точкой множества* E*. Множество граничных точек* E *называется границей множества* E *и обозначается* ∂E.

Таким образом, точка a — граничная точка множества E, если в $\forall B(a, r)$ имеются как точки множества E, так и точки, не принадлежащие E.

Из определений следует, что для произвольного множества E метрического пространства (X, d) справедливы вложения

$$\mathrm{int}E \subset E = \mathrm{int}E \cup (E \cap \partial E) \subset \mathrm{int}E \cup \partial E.$$

В данном метрическом пространстве (X, d) произвольная точка $a \in X$ по отношению к множеству E может быть точкой только одного из трех перечисленных типов. Поэтому имеет место разложение

$$X = \mathrm{int}E \cup \mathrm{extE} \cup \partial E,$$

на непересекающиеся множества.

Примеры.

1. Для одноточечного множества $E = \{a\}$ в $\mathbb{R}^n$: $\mathrm{int}E = \emptyset$, $\partial E = E$, $\mathrm{ext}E = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

2. Пусть $E = \{x \in \mathbb{R}^2 |\, x_2 > 0\}$. Любая точка $x = (x_1, x_2) \in E$ является внутренней точкой множества E, так как $B(x, r) \subset E$ при $r = x_2$: $E = \mathrm{int}E$. Любая точка $x \in \mathbb{R}^2$ с $x_2 < 0$ является внешней точкой множества E, так как $B(x, r)$ с $r = |x_2|$ не пересекается с E. Любая точка $x = (x_1, 0)$ является граничной точкой множества $E \Rightarrow \partial E \bigcap E = \emptyset$, т.е. граничные точки множества могут не принадлежать ему.

ЛЕКЦИЯ 33

Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах.

Определение 1. *Множество $G \subset X$ называется открытым в метрическом пространстве X, если $\forall a \in G$ $\exists r = r(a) > 0$, т.ч. $B(a,r) \subset G$.*

Следовательно, множество G открыто в $X \Leftrightarrow G =\text{int}G$, т.е. любая точка множества G является внутренней точкой G.

Пустое множество по определению считается открытым в любом метрическом пространстве.

Определение 2. *Множество $F \subset X$ называется замкнутым в метрическом пространстве X, если его дополнение $X \setminus F$ открыто в X.*

Легко видеть, что множество G открыто в метрическом пространстве X тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus G$ замкнуто в X. Это сразу же следует из представления представления $G = X \setminus (X \setminus G)$. Действительно, открытость множества G в X означает, что $X \setminus (X \setminus G)$ открыто. Значит, дополнение к множеству $X \setminus G$ открыто в X и, стало быть, $X \setminus G$ замкнуто согласно определению замкнутого множества. Если множество $X \setminus G$ замкнуто в метрическом пространстве X, то его дополнение $X \setminus (X \setminus G) = G$ открыто в X в силу определения замкнутого множества.

Само множество X согласно определению открытого множества будет открытым в метрическом пространстве (X, d). Так как пустое множество считается открытым, то X будет и замкнутым множеством в метрическом пространстве (X, d) как дополнение к открытому множеству $X = X \setminus \emptyset$. Пустое множество также окажется замкнутым, так как $\emptyset = X \setminus X$ – дополнение к открытому множеству X.

Лемма 1. *Пусть E произвольное подмножество метрического пространства X. Тогда множества $\text{int}E$ и $\text{ext}E$ открыты в X, а ∂E замкнуто в X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Открытость $\text{int}E$ и $\text{ext}E$ в метрическом пространстве X следует из определения этих множеств. Если $a \in X \setminus \partial E$, то либо $a \in \text{int}E$, либо $a \in \text{ext}E \Rightarrow$ в обоих случаях $\exists U(a) \subset X \setminus \partial E \Rightarrow X \setminus \partial E$ открыто $\Rightarrow \partial E$ замкнуто в X.

Лемма 2. *Для произвольных $a \in X$ и $r > 0$ шар $B(a,r)$ является открытым множеством в метрическом пространстве (X,d); $\forall r \geq$*

0 *множество* $X \setminus \bar{B}(a,r)$ *— открыто в метрическом пространстве* (X,d).

Доказательство. Пусть точка $x \in B(a,r)$ — произвольна. Покажем, что при $r_1 = r - d(a,x)$ шар $B(x,r_1) \subset B(a,r)$. Для этого возьмем любую точку $y \in B(x,r_1)$ и оценим $d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r - d(a,x) = r \Rightarrow y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,r_1) \subset B(a,r) \Rightarrow$ согласно определению шар $B(a,r)$ является открытым множеством в метрическом пространстве (X,d).

Докажем вторую часть леммы. Если $X \setminus \bar{B}(a,r) = \emptyset$, то утверждение леммы верно. Если это множество не пусто, то возьмем любую точку $x \in X \setminus \bar{B}(a,r)$. Покажем, что при $r_2 = d(a,x) - r$ шар $B(x,r_2) \subset X \setminus \bar{B}(a,r)$. Пусть $y \in B(x,r_2)$ — произвольная точка. Из оценки $d(a,x) \le d(a,y) + d(y,x)$ имеем: $d(a,y) \ge d(a,x) - d(x,y) > d(a,x) - r_2 = r \Rightarrow y \in X \setminus B(a,r) \Rightarrow B(x,r_2) \subset X \setminus B(a,r)$. Лемма доказана.

Второе утверждение леммы означает, что произвольный замкнутый шар $\bar{B}(a,r)$ является замкнутым множеством в метрическом пространстве X.

Теорема 1. *Объединение произвольного семейства открытых множеств является открытым множеством. Пересечение любой конечной системы открытых множеств является открытым множеством.*

Объединение любой конечной системы замкнутых множеств — замкнуто. Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнуто.

Доказательство. Пусть G_α, $\alpha \in A$ — произвольное семейство открытых в метрическом пространстве X множеств. Возьмем произвольную точку $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$ по определению объединения множеств $\exists \alpha_0 \in A$, т.ч. $x \in G_{\alpha_0}$. Так как G_{α_0} открыто, то $\exists B(x,r) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow B(x,r) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$ множество $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ открыто в метрическом пространстве X.

Пусть G_j, $j = 1, \ldots, m$, — произвольная система из m открытых в метрическом пространстве X множеств и $x \in \bigcap_{j=1}^m G_j$ (если $\bigcap_{j=1}^m G_j = \emptyset$, то утверждение теоремы истинно) $\Rightarrow$ по определению пересечения множеств $\forall j = 1, \ldots, m$: $x \in G_j$. В силу открытости G_j: $\forall j = 1, \ldots, m$ $\exists r_j > 0$, т.ч. $B(x,r_j) \subset G_j \Rightarrow$ при $r \doteq \min(r_1, \ldots, r_m)$ шар $B(x,r) \subset G_j$ $\forall j = 1, \ldots, m \Rightarrow B(x,r) \subset \bigcap_{j=1}^m G_j \Rightarrow$ множество $\bigcap_{j=1}^m G_j$ открыто.

Вторая часть леммы следует из первой части в силу определения замкнутых множеств и правил де Моргана. Пусть F_α, $\alpha \in A$, — произвольное семейство замкнутых в метрическом пространстве X множеств. Тогда согласно определению множества $X \setminus F_\alpha$ открыты, а по правилам де Моргана $X \setminus (\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha)$. Следовательно, по доказанному выше множество $\bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha)$ открыто как объединение открытых множеств $\Rightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha$ замкнуто в X.

Последнее утверждение доказывается аналогично.

Пример. Пересечение бесконечного семейства открытых множеств не обязано быть открытым множеством. Действительно, $\bigcap_{j=1}^{+\infty}(-1/j, 1/j) = \{0\}$ — замкнутое множество в метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d)$ с $d(x,y) = |x-y|$.

Определение 3. *Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $E \subset X$ в метрическом пространстве X, если всякий проколотый шар $\dot{B}(a,r)$ содержит по крайней мере одну точку множества E, т.е. $\forall r > 0$: $\dot{B}(a,r) \bigcap E \neq \emptyset$. Множество предельных точек множества E обозначают E'.*

Как и в одномерном случае доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Следующие утверждения равносильны*:

1) *$a \in X$ — предельная точка множества $E \subset X$;*

2) $\exists$ последовательность (a_k), $a_k \in E$, $a_k \neq a$ $(k \in \mathbb{N})$, *т.ч.* $a_k \xrightarrow{d} a$ $(k \to +\infty)$;

3) *любой шар $B(a,r)$ содержит бесконечно много точек множества E, т.е. $\forall r > 0$ множество $B(a,r) \bigcap E$ — бесконечно.*

Определение 4. *Точка $b \in X$ называется точкой прикосновения множества E в метрическом пространстве X, если произвольный шар с центром в точке b содержит по крайней мере одну точку множества E, т.е. $\forall r > 0$: $B(b,r) \bigcap E \neq \emptyset$.*

Имеет место лемма.

Лемма 4. *Точка $b \in X$ является точкой прикосновения множества E тогда и только тогда, когда существует последовательность $(b_k) \subset E$, т.ч. $b_k \xrightarrow{d} b$ $(k \to +\infty)$.*

Доказывается эта лемма аналогично одномерному случаю.

Определение 5. *Точка $c \in E$ называется изолированной точкой множества E в метрическом пространстве X, если можно указать шар с центром в точке c, не содержащий других точек множества E, т.е. $\exists r_0 > 0$: $B(c, r_0) \bigcap E = \{c\}$.*

Из определений следует, что множество точек прикосновения множества E совпадает с объединением множеств его предельных и изолированных точек (причем последние два множества не пересекаются).

Теорема 2. *Пусть $E \neq \emptyset$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *E замкнуто в метрическом пространстве;*

2) *E содержит все свои граничные точки: $\partial E \subset E$;*

3) *E содержит все свои предельные точки: $E' \subset E$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать теорему покажем, что 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть E замкнуто $\Rightarrow X \setminus E$ открыто $\Rightarrow$ все точки, не принадлежащие E, т.е. точки множества $X \setminus E$ являются внешними точками множества $E \Rightarrow E$ содержит все свои граничные точки.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a \in E' \Rightarrow$ в любом шаре $B(a,r)$ есть точки множества $E \Rightarrow$ либо $a \in \partial E$, либо $a \in \mathrm{int} E$. В обоих случаях $a \in E$, ибо по условию $\partial E \subset E \Rightarrow E' \subset E$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $E' \subset E \Rightarrow$ любая точка $a \in X \setminus E$ не является предельной точкой множества $E \Rightarrow \exists B(a, r_a)$, т.ч. $\dot{B}(a, r_a) \bigcap E = \emptyset$. Но $a \notin E \Rightarrow B(a, r_a) \bigcap E = \emptyset$, т.е. $B(a, r_a) \subset X \setminus E \Rightarrow$ множество $X \setminus E$ открыто, что согласно определению означает замкнутость множества E в метрическом пространстве X.

Определение 6. *Замыканием множества E в метрическом пространстве X называется множество $\overline{E} \doteq E \bigcup \partial E$.*

Легко показать, что $\overline{E}$ будет замкнутым множеством в метрическом пространстве X и что $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$.

Определение 7. *Множество E метрического пространства X называется ограниченным, если $\exists a \in X$ и $\exists r > 0$, т.ч. $E \subset B(a,r)$.*

Определение 8. *Последовательность (a_k) называется ограниченной в метрическом пространстве X, если $\exists a \in X$ и $\exists r > 0$, т.ч $\forall k \in \mathbb{R}$: $a_k \in B(a,r)$.*

Эти определения являются естественным обобщением на метрические пространства определений ограниченности, данных прежде для числовых множеств и последовательностей.

Лемма 5. *Множество E ограничено в метрическом пространстве X тогда и только тогда, когда $\forall b \in X$ $\exists r_b > 0$, т.ч. $E \subset B(b, r_b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть множество E ограничено в метрическом пространстве, т.е. $\exists a \in X$ и $\exists r > 0$, т.ч. $E \subset B(a,r)$. Возьмем произвольную точку $b \in X$ и покажем, что $E \subset B(b, r_b)$, если $r_b = d(b,a) + r$. В самом деле, $\forall y \in E$ в силу неравенства треугольника имеем $d(b,y) \le d(b,a) + d(a,y) < d(b,a) + r = r_b$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Это лемма говорит, что в определении ограничености множества в метрическом пространстве центр шара, который содержит множество E, можно выбирать произвольно. Например, в $\mathbb{R}^n$ удобно брать в качестве центра точку $0 = (0, \ldots, 0)$. В этом случае при $n = 1$ получаем данное ранее определение ограниченности числового множества (см. определение 4 лекции 3).

Лемма 6. *Если* $a_k \xrightarrow{d} a$ $(k \to +\infty)$, *то последовательность* (a_k) *ограничена в метрическом пространстве* X.

Доказательство. Действительно, для $\varepsilon = 1$ $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall k > k_1$: $d(a_k, a) < 1$. Обозначим через $r_1 \doteq \max\{d(a_k, a) | \ k = 1, \ldots, k_1\}$ и положим $r_0 \doteq \max\{r_1, 1\}$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$: $d(a_k, a) \le r_0$. Следовательно, последовательность (a_k) ограничена в метрическом пространстве X.

Замечания.

1. Подмножества метрических пространств, конечно, не исчерпываются открытыми и замкнутыми множествами. Полуинтервал $[0, 1)$ не является ни открытым, ни замкнутым множеством в метрическом пространстве $(\mathbb{R}, d)$, где $d(x, y) = |x - y|$.

2. Свойство множества быть открытым или замкнутым зависит от того, в каком метрическом пространстве это множество рассматривается. Пусть $M_1 = ([0, +\infty), d)$, $M_2 = ((-\infty, 1), d)$ и $M_3 = ([0, 1), d)$, где метрика $d(x, y) = |x - y|$ и дан полуинтервал $[0, 1)$. В МП M_1 полуинтервал будет открытым множеством, т.к. в этом МП $B(0, r) = [0, r)$. В МП M_2 полуинтервал замкнут, т.к. предельными точками множества могут быть точки только из МП, в котором это множество рассматривается. В МП M_3 полуинтервал будет и открытым и замкнутым множеством.

ЛЕКЦИЯ 34

Компакты в метрических пространствах

Определение 1. *Система множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется покрытием множества E, если $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, т.е. $\forall x \in E\ \exists \alpha_0 = \alpha_0(x) \in A$, т.ч. $x \in U_{\alpha_0}$.*

Определение 2. *Множество K метрического пространства X называется компактом, если из любого покрытия множества K открытыми в X множествами можно выделить конечное покрытие.*

Это определение труднопроверяемо. Но чтобы получить важнейшие свойства компактов, достаточно рассмотреть три простейших покрытий открытыми множествами (см. теоремы 1 и 2).

Теорема 1(свойства компактов).

1. *Всякий компакт K метрического пространства X является ограниченным и замкнутым множеством.*

2. *Всякое замкнутое в метрическом пространстве X подмножество F компакта K является компактом в X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую часть. Начнем с ограниченности. Зафиксируем какую–либо точку $a \in X$ и рассмотрим систему шаров $B(a, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\forall x \in K$: $d(a, x) < +\infty$, то $\exists n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$, т.ч. $x \in B(a, n_0) \Rightarrow K \subset \bigcup_n B(a, n)$. Так как K — компакт, то из покрытия K шарами $B(a, n)$, являющихся открытыми в X множествами, можно выделить конечное покрытие: $K \subset \bigcup_{k=1}^m B(a, n_k) = B(a, n_m)$, $n_1 < \ldots < n_m \Rightarrow$ множество K ограничено, ибо оно содержится в шаре радиуса n_m.

Докажем замкнутость K. Предположим противное, т.е., что $\exists a \in K'$ и $a \notin K$. Рассмотрим семейство открытых в метрическом пространстве X множеств $D(a, n) \doteq X \setminus \bar{B}(a, 1/n)$. Эти множества образуют открытое покрытие компакта K. Действительно, так как $a \notin K$, то $\forall x \in K$ расстояние $d(a, x) > 0 \Rightarrow x \in D(a, n)$, если $1/n < d(a, x)$. Выделим конечное покрытие K: $K \subset \bigcup_{k=1}^l D(a, n_k) = D(a, n_l) = X \setminus \bar{B}(a, 1/n_l)$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_l) \Rightarrow K \bigcap \bar{B}(a, 1/n_l) = \emptyset$, что противоречит тому, что $a \in K'$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть $F \neq \emptyset$, $F \subset K$ и F замкнуто в X. Возьмем произвольное открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ множества F. Добавив к этому семейству открытое в X множество $X \setminus F$, будем иметь открытое покрытие всего метрического пространства X, а следовательно, и компакта K. Выделим из этого покрытия конечное покрытие K. Полученная конечная система открытых множеств будет покрывать и F. Если в эту конечную систему не входит множество $X \setminus F$, то из открытого покрытия $\{G_\alpha\}$ выделено конечное покрытие F; если конечное покрытие K содержит множество $X \setminus F$, то, отбрасывая его, имеем конечное покрытие F множествами из системы $\{G_\alpha\}$. Следовательно, множество F является компактом. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть K — компакт метрического пространства X и E — бесконечное подмножество K. Тогда $E' \neq \emptyset$ и $E' \subset K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у множества E существуют предельные точки, то они являются предельными точками и для компакта K. А так как компакт замкнут, то все предельные точки множества E содержатся в K.

Осталось доказать, что $E' \neq \emptyset$. Предположим противное, т.е. что у множества E нет предельных точек. В частности любая точка компакта K не является предельной точкой множества $E \Rightarrow \forall x \in K$ $\exists r_x > 0$, т.ч. $\dot{B}(x, r_x) \cap E = \emptyset$, т.е. в проколотых шарах $\dot{B}(x, r_x)$ нет точек множества E. Система $\{B(x, r_x) |\ x \in K\}$ образует открытое покрытие K, поскольку каждая точка компакта попадает по крайней мере в шар с центром в этой точке. Выделим конечное покрытие: $K \subset \cup_{k=1}^{l} B(x_k, r_{x_k})$. Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{l} (B(x_k, r_{x_k}) \cap E) \subset \cup_{k=1}^{l} \{x_k\}$, так как $B(x_k, r_{x_k}) \cap E$ либо пусто, либо совпадает с точкой x_k. Значит, множество E конечно как подмножество конечного множества, а это противоречит предположению. Теорема доказана.

В качестве следствия приведем аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для компактов.

Следствие. *Из любой последовательности точек компакта K можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке компакта K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a_n) — произвольная последовательность точек компакта K. Возможны два случая:

1. Члены последовательности (a_n) принимают какое-то значение бесконечное число раз. Тогда члены последовательности, равные этому значению, образуют искомую сходящуюся подпоследовательность.

2. Не существует значения, которое члены последовательности принимают бесконечно много раз. В этом случае множество значений E последовательности (a_n) бесконечно. Поскольку очевидно, что любая точка множества E' является частичным пределом последо-

вательности (a_n), то утверждение следствия сразу же следует из теоремы.

Компакты в $\mathbb{R}^n$

Определение 3. *Множество* $I \doteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ *называется* n*–мерным брусом (параллелепипедом) в* $\mathbb{R}^n$.

Отрезки $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, называются *координатными* отрезками бруса I. Брус называется *невырожденным*, если все его координатные отрезки не вырождены.

Отметим, что $\forall B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ $\exists$ невырожденные брусы I_1 и I_2, т.ч. $I_1 \subset B(a, r) \subset I_2$. В качестве I_1 можно взять куб с центром в точке a и стороной $< 2r/\sqrt{n}$, а за I_2 — куб со стороной $\geq 2r$ с центром в той же точке.

Теорема 3. *Всякий* n*–мерный брус* ($n \geq 1$) *является компактом в* $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство от противного. Предположим, что существуют невырожденный брус I и его покрытие открытыми в $\mathbb{R}^n$ множествами, из которого нельзя выделить конечное покрытие. Разделим каждый из координатных отрезков $I_j = [a_j, b_j]$ бруса I пополам (если брус вырожден, то делим только невырожденные координатные отрезки). В результате получим 2^n n–мерных брусов, из которых по крайней мере один не допускает выделения конечного покрытия открытыми множествами данной системы (в противном случае из рассматриваемого покрытия можно было бы выделить конечное покрытие исходного бруса I). Обозначим этот брус $I^{(1)}$ и поступим с ним так же, как с исходным брусом I, т.е. поделим координатные отрезки $I_j^{(1)} = [a_j^{(1)}, b_j^{(1)}]$ пополам и из полученных 2^n брусов вновь выберем тот, для которого из рассматриваемого открытого покрытия нельзя выделить конечное покрытие. Обозначим этот брус $I^{(2)}$. Продолжая этот процесс деления, построим последовательность вложенных брусов $I \supset I^{(1)} \supset \ldots \supset I^{(k)} \supset \ldots$, ни один из которых не допускает выделения конечного покрытия из исходного покрытия.

Для каждого j кооординатные отрезки $I_j^{(k)}$ по построению образуют стягивающуюся СВО $\Rightarrow \forall j = 1, \ldots, n$ $\exists c_j \in \bigcap_k I_j^{(k)} \Rightarrow$ точка $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \bigcap_k I^{(k)}$. Поскольку $c \in I$, то существует открытое множество G из исходного покрытия, т.ч. $c \in G$. Тогда для некоторого $r > 0$: $B(c, r) \subset G$. Так как длины сторон брусов $I^{(k)}$ стремятся к нулю при $k \to +\infty$, то $\exists k_0$, т.ч. $I^{(k_0)} \subset B(c,r) \subset G$, что противоречит тому, что брус $I^{(k_0)}$ не допускает выделения конечного покрытия. Теорема доказана.

Следствие (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$). *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом тогда и только тогда, когда K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость была доказана ранее в общем случае. Докажем достаточность. Пусть K ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists$ n–мерный брус $I \supset K$. По доказанному I — компакт, а K — его замкнутое подмножество, следовательно, K компакт.

В общем случае из ограниченности и замкнутости множества в метрическом пространстве не следует его компактность (см. пример в следующем разделе).

В заключение приведем теорему Больцано–Вейерштрасса для $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(a^{(k)})$ ограничена в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists$ брус I, содержащий все члены последовательности. В силу компактности I утверждение теоремы следует из общей теоремы Больцано–Вейерштрасса.

Полные метрические пространства

Определение 4. *Последовательность (a_k) метрического пространства (X,d) называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \textit{т.ч.}\, \forall m,n > k_\varepsilon :\, d(a_m,a_n) < \varepsilon.$$

Определение 5. *Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел, называется полным.*

Если последовательность имеет предел в метрическом пространстве, то она фундаментальна (это доказывается так же, как для числовых последовательностей). Поэтому в полном метрическом пространстве множество фундаментальных последовательностей совпадает с множеством сходящихся последовательностей.

Примеры.

1. Метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$ полно (в этом заключается критерий Коши сходимости последовательностей).

2. Метрическое пространство (X, d), где $X = (0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ не будет полным, так как последовательность $(1/k)$ фундаментальна, но она не имеет предела в данном метрическом пространстве.

3. Рассмотрим единичную сферу $S \doteq \{f \in C[0,1] | \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = 1\}$ в метрическом пространстве $C[0, 1]$ с расстоянием $d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$. Это множество ограничено, ибо содержится, например, в шаре радиуса 2 с центром в $h(x) = 0$, и замкнуто как граница шара радиуса 1 с центром в той же точке. Покажем, что множество S не является компактом в метрическом пространстве $C[0, 1]$. Для этого достаточно (см. теоерему Больцано–Вейерштрасса для компактов) предъявить последовательность функций $f_n(x) \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, т.ч. из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Положим $f_n(x) = 0$, если $x \in [0, 2^{-(n+1)}] \bigcup [2^{-(n-1)}, 1]$, $f_n(x) = 2^{n+1}x - 1$, если $x \in [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ и $f(x) = -2^n x + 2$, если $x \in [2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$. Тогда для всех $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$ имеем $d(f_n, f_m) = 1$, ибо $f_n(2^{-n}) = 1$, а $f_m(2^{-n}) = 0$. Следовательно, любая подпоследовательность последовательности $(f_n(x))$ не может быть фундаментальной последовательностью, а значит, не может сходиться.

Покажем, что метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ является полным.

Теорема 5. *Пусть дана последовательность* $(a^{(k)})$ *точек* $\mathbb{R}^n$ $(a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}))$. *Для того, чтобы* $a^{(k)} \xrightarrow{d} a$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$: $a_j^{(k)} \to a_j$ *при* $k \to +\infty$, *т.е. сходимость в* $\mathbb{R}^n$ *эквивалентна покоординатной сходимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу известных неравенств для метрики в $\mathbb{R}^n$ (см. лекцию 30), имеем:

$$|a_j^{(k)} - a_j| \leq d(a^{(k)}, a) = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} |a_m^{(k)} - a_m|^2} \leq \sqrt{n} \max_{m=1,\ldots,n} |a_m^{(k)} - a_m|,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 6. *Последовательность* $(a^{(k)})$ *фундаментальна в* $\mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда все координатные последовательности* $(a_j^{(k)})$, $j = 1, \ldots, n$, *фундаментальны.*

Справедливость теоремы 6 следует из неравенств для метрики из лекции 30, примененных к $d(a^{(k)}, a^{(l)})$.

Следствие. *Метрическое пространство* $\mathbb{R}^n$ *является полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $(a^{(k)})$ фундаментальна в $\mathbb{R}^n$. Тогда координатные последовательности $(a_j^{(k)})$, $j = 1, \ldots, n$, являются последовательностями Коши, следовательно, они сходятся (теорема 2 лекции 8). Значит, по теореме 5 имеет предел и последовательность $(a^{(k)})$. Следствие доказано.

Чтобы дальнейшее изложение было независимо от теории компактов в метрических пространствах, приведем другое доказательство теоремы Больцано–Вейерштрасса для последовательностей в $\mathbb{R}^n$. В случае использования этой теоремы в последующих формулировках необходимо заменить словосочетание "компакт в $\mathbb{R}^n$" на словосочетание "ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$".

Теорема 7. *Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости записи ограничимся случаем $n = 2$. Пусть $(x^{(l)})$ произвольная ограниченная последовательность точек в $\mathbb{R}^2$. Тогда существует брус $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, содержащий все точки $x^{(l)} = (x_1^{(l)}, x_2^{(l)})$ рассматриваемой последовательности, следовательно, числовая последовательность $(x_1^{(l)})$ ограничена (все ее члены принадлежат отрезку $[a_1, b_1]$). Поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса для числовых последовательностей из $(x_1^{(l)})$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(x_1^{(l_p)})$. Рассмотрим теперь подпоследовательность $(x_2^{(l_p)})$ числовой последовательности $(x_2^{(l)})$. Последовательность $(x_2^{(l_p)})$ ограничена (все ее члены принадлежат отрезку $[a_2, b_2]$), поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(x_2^{(l_{p_m})})$. Покажем, что подпоследовательность $(x^{(l_{p_m})})$ сходится в $\mathbb{R}^2$. Действительно, по построению последовательность $(x_2^{(l_{p_m})})$ имеет предел, а $(x_1^{(l_{p_m})})$ сходится как подпоследовательность сходящейся последовательности $(x_1^{(l_p)})$. Следовательно, по теореме 5 последовательность $(x^{(l_{p_m})})$ имеет предел в $\mathbb{R}^2$. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет доказать следующее свойство ограниченных и замкнутых в $\mathbb{R}^n$ множеств.

Следствие. *Из всякой последовательности ограниченного и замкнутого в $\mathbb{R}^n$ множества K можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая последовательность, принадлежащая множеству K, ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что предел этой подпоследовательности принадлежит множеству K. Действительно, либо эта подпоследовательность стабилизируется, т.е. начиная с некоторого номера принимает одно и то же значение, которое принадлежит множеству K и совпадает с ее пределом, либо существует бесконечно много членов последовательности, отличных от ее предела. В последнем случае предел подпоследовательности будет предельной точкой множества K, следовательно, будет принадлежать K в силу его замкнутости.

Сходимость в $\mathbb{C}$

Напомним, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) действительных чисел, т.е. множество $\mathbb{R}^2$.

Пусть задана последовательность (z_k) комплексных чисел.

Определение 6. *Число $z \in \mathbb{C}$ называется пределом последовательности (z_k) ($\lim_{k\to+\infty} z_k = z$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall k > k_\varepsilon$: $|z_k - z| < \varepsilon$.*

Последовательность (z_k) сходится к бесконечности ($\lim_{k\to+\infty} z_k = \infty$), если $\lim_{k\to+\infty} |z_k| = +\infty$.

Если $z_k = x_k + iy_k$, $z = x + iy$, то $|z_k - z| = ((x_k - x)^2 + (y_k - y)^2)^{1/2} = d(z_k, z)$, поэтому сходимость последовательности в $\mathbb{C}$ является сходимостью в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$. Следовательно, для последовательностей комплексных чисел справедливы утверждения:

1) $z_k \to z$ $(k \to +\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re} z_k = x_k \to x = \mathrm{Re} z$ и $\mathrm{Im} z_k = y_k \to y = \mathrm{Im} z_k$ при $k \to +\infty$;

2) последовательность (z_k) сходится $\Leftrightarrow$ (z_k) фундаментальна $\Leftrightarrow$ последовательности $(\mathrm{Re} z_k)$ и $(\mathrm{Im} z_k)$ фундаментальны;

3) из всякой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

ЛЕКЦИЯ 35

Введем в множестве $\mathbb{R}^n$ операции сложения его элементов и умножения элементов на действительные числа: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,то

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x \doteq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Относительно этих операций $\mathbb{R}^n$ превращается в векторное пространство.

Замечание. В части литературы вместо словосочетания "векторное пространство" используют словосочетание "линейное пространство".

В этом векторном пространстве можно ввести норму и скалярное произведение:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |x| \doteq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : xy \doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n$$

Отметим, что если $u, v \in \mathbb{R}^n$, то

$$|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

совпадает с введенной ранее в $\mathbb{R}^n$ метрикой $d(u, v)$. Таким образом, векторное нормированное пространство $\mathbb{R}^n$ естественно расматривать и как метрическое пространство с метрикой $d(u, v) = |u - v|$. Это позволяет определить в нормированном пространстве $\mathbb{R}^n$ сходимость последовательностей, шары и замкнутые шары, открытые и замкнутые множества, компакты как в метрическом пространстве $\mathbb{R}^n$ с указанной метрикой. Так,

$$x^{(k)} \to x \text{ при } k \to +\infty \text{ в нормированном пространстве } \mathbb{R}^n \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$d(x^{(k)}, x) = |x_k - x| \to 0 \text{ при } k \to +\infty \ (x, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n);$$

$$B(a, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ d(x, a) = |x - a| < r\} \ (r > 0);$$

$$\bar{B}(a, \rho) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ d(x, a) = |x - a| \leq \rho\} \ (\rho \geq 0).$$

Замечание. Вообще, норма в любом нормированном пространстве X индуцирует метрику $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ на X. Сходимость по этой метрике называется сходимостью по норме пространства X.

Далее под окрестностями точек $\mathbb{R}^n$, если не оговорено противное, будем понимать шары с центрами в рассматриваемых точках.

Дополним пространство $\mathbb{R}^n$ элементом, называемым "бесконечно удаленной точкой", или "бесконечностью", и обозначаемым ∞. Множества вида

$$U(\infty,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n|\, d(x,0)=|x|>1/\varepsilon\},\ \varepsilon>0,$$

назовем ε–окрестностями бесконечности.

Пусть задано отображение (функция) g: $E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$. Так как $g(x)\in\mathbb{R}^m$, то $g(x)=(g_1(x),\dots,g_m(x))$. Функции g_j: $E\to\mathbb{R}$ ($j=1,\dots,m$) называются *координатными функциями* данного отображения g.

Поскольку $x=(x_1,\dots,x_n)$, то $g(x)=g(x_1,\dots,x_n)$ и поэтому функция g называется функцией от n переменных $x_1,\dots,x_n$. Таким образом, $g(x)=(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$, т.е. задание отображения g: $E\to\mathbb{R}^m$, где $E\subset\mathbb{R}^n$, равносильно заданию m числовых функций $g_j(x_1,\dots,x_n)$ от n переменных.

Предел и непрерывность отображений в точке

Пусть f: $E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$, a — точка прикосновения множества E (она может быть как конечной, так и бесконечно удаленной точкой). Определение предела в смысле Коши дается, как и в одномерном случае.

Определение 1. *Точка $b\in\mathbb{R}^m\bigcup\{\infty\}$ называется пределом отображения f при $x\to a$ и при этом пишут $b=\lim_{x\to a}f(x)$, если для любой окрестности $V(b,\varepsilon)$ существует окрестность $U(a,\delta)$, т.ч. $\forall x\in U(a,\delta)\bigcap E$: $f(x)\in V(b,\varepsilon)$.*

Например, если a и b — конечные точки, то определение предела можно записать следующим образом:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \text{т.ч. } \forall x\in E,\ d_n(x,a)<\delta:\ d_m(f(x),b)<\varepsilon \qquad (9)$$

(d_n и d_m — метрики в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно). Другими словами,

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ \lim_{x\to a}d_m(f(x),b)=0$$

А если рассматривать $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ как нормированные пространства, то (9) примет вид

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \text{т.ч. } \forall x\in E,\ |x-a|<\delta:\ |f(x)-b|<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to a} |f(x)-b| = 0 \Leftrightarrow f(x) = b+\alpha(x), \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0.$$

Как и для функций одной переменной $\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}|\alpha(x)| = 0$.

Из определения предела (как и в одномерном случае) следует, что если $a \in E$ и $\exists \lim_{x\to a} f(x)$, то $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Для отображений можно дать другое определение предела — предела в смысле Гейне.

Определение 2. *Элемент* $b = \lim_{x\to a} f(x)$ $(b \in \mathbb{R}^m \bigcup\{\infty\})$, *если* $\forall (x^{(k)})_{k=1}^{+\infty} \subset E$, $x^{(k)} \overset{d_n}{\to} a$ $(k \to +\infty)$: $f(x^{(k)}) \overset{d_m}{\to} b$ *при* $k \to +\infty$.

Теорема 1. *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство ничем не отличается от того, что приводилось для функций одной переменной.

Пример 1. Если $g(x) = x$, $a \in \mathbb{R}^n$, то $\lim_{x\to a} g(x) = a$, т.е. $\lim_{x\to a} x = a$. Действительно, для любой последовательности $x^{(l)} \to a$ при $l \to +\infty$ имеем $g(x^{(l)}) = x^{(l)} \to a$, что и требовалось показать.

Определение 3. *Функция* $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ *имеет предел при* $x \to a$, *если* $\exists b \in \mathbb{R}^m$, *т.ч.* $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Определение 4. *Функция* $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ *называется непрерывной в точке* $a \in E$, *если* $\exists \lim_{x\to a} f(x)$.

Множество всех непрерывных в точке a функций обозначается $C(a)$. Запись $g \in C(a)$ означает, что функция g непрерывна в точке a.

Поскольку в определении непрерывности $a \in E$, то $f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Таким образом, функция $f \in C(a) \Leftrightarrow$

$$\forall V(f(a))\, \exists U(a), \text{ т.ч. } \forall x \in U(a) \bigcap E:\ f(x) \in V(f(a)).$$

Так как $V(f(a))$ и $U(a)$ являются шарами, то определение непрерывности можно записать на $\varepsilon - \delta$ языке: $f \in C(a) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ т.ч. } \forall x \in E,\ d_n(x,a) < \delta:\ d_m(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Если a — изолированная точка множества E, то $f \in C(a)$, т.е. функция непрерывна во всех изолированных точках своей области определения (доказывается так же, как и для функций одной переменной.)

Определения предела и непрерывности функций многих переменных дословно совпадают с соответствующими определениями для функций одной переменной. Поэтому все свойства пределов и функций, непрерывных в точке, доказанные в одномерном случае, в которых не использовались упорядоченность точек числовой прямой и арифметические операции, сохраняются для функций многих переменных. Если рассматривать $\mathbb{R}^m$ как векторное пространство, то сохраняются и свойства, связанные с операциями сложения отображений и умножения их на числа.

Остановимся на некоторых свойствах функций многих переменных, связанных с многомерностью. Ряд дополнительных свойств предела, в которых $\mathbb{R}^m$ рассматривается как векторное нормированное пространство будет приведено позже (см. лекцию 42).

Теорема 2. $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$, *где* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$, *т.е. отображение имеет предел тогда и только тогда, когда все координатные функции имеют пределы.*

Доказательство вытекает из неравенств

$$|f_j(x) - b_j| \le d_m(f(x), b) \le m^{1/2} \max_{i=1,\ldots,m} |f_i(x) - b_i|.$$

Следствие. $f \in C(a) \Leftrightarrow f_j \in C(a)$, $j = 1, \ldots, m$, *т.е. непрерывность отображения эквивалентна непрерывности всех ее координатных функций.*

Пример 2. Снова рассмотрим функцию $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Из примера 1 следует, что функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, что равносильно непрерывности всех ее координатных функций $g_j(x) = x_j$ — функций, сопоставляющих точке $x \in \mathbb{R}^n$ ее j–ую координату x_j.

Теорема 3. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, a *— точка прикосновения множества* E, b *— точка прикосновения множества* D, $f\colon E \to D$, $g\colon D \to \mathbb{R}^k$.

Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = p$, *то отображение* $g \circ f\colon E \to \mathbb{R}^k$ *имеет предел при* $x \to a$ *и* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = p$.

Доказательство аналогично данному в случае функций одной переменной.

Замечание. Как и в одномерном случае, теорему о пределе композиции можно интерпретировать следующим образом: если функция $g(y)$ имеет в точке b предел, равный p, то при любом способе стремления аргумента функции к b функция g будет стремиться к p.

Следствие. *Пусть* $f\colon E \to D$, $a \in E$, $b = f(a)$, $g\colon D \to \mathbb{R}^k$. *Если* $f \in C(a)$, $g \in C(b)$, *то* $g \circ f \in C(a)$.

Элементарной функцией многих переменных называется функция, полученная из основных элементарных функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, с помощью четырех арифметических действий и композиций, взятых в конечном числе раз. Все эти операции не выводят за пределы класса непрерывных функций. Поэтому любая элементарная функция многих переменных непрерывна на множестве своего определения.

Пример 3. Иллюстрациями элементарных функций двух переменных служат, например, следующие функции $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy$, $\sin(xy)$, $\cos(x^k + y^m)$, $e^x \ln y$.

Повторные пределы

У функций многих переменных наряду с пределом, определенным выше (кратный предел), можно рассматривать пределы другого вида, связанные с последовательным переходом к пределу по разным координатам:

$$\lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} \dots \lim_{x_{i_n} \to a_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n),$$

где $i_1, \dots, i_n$ — некоторая перестановка натуральных чисел $1, \dots, n$. Такие пределы называются повторными.

Нетрудно показать (для простоты рассматривается 2–мерный случай), что если $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ (конечный или бесконечный), $a, b \in \mathbb{R}$ и при фиксированных y $\exists$ конечные $\lim_{x\to a} f(x,y) = \varphi(y)$, то $\exists$ повторный предел $\lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, т.е. повторный предел равен кратному.

Примеры. У функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ повторные пределы в точке $(0,0)$ совпадают и равны, но кратного предела в $(0,0)$ не существует. Функция $g(x,y) = x \sin \dfrac{1}{y}$ имеет кратный предел в точке $(0,0)$ и повторный $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x,y)$. А другой повторный предел $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x,y)$ не существует. Наконец, у сужения функции $h(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ на множество $\{(x,y) | xy \neq 0\}$ повторные пределы в точке $(0,0)$ существуют, но различны (тогда из сказанного выше кратный предел в этой точке не существует).

ЛЕКЦИЯ 36

Свойства отображений, непрерывных на компактах и линейно связных множествах

Определение 1. *Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на множестве E ($f \in C(E)$), если $\forall a \in E$: $f \in C(a)$.*

Определение 2. *Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ равномерно непрерывно на E, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \textit{т.ч.}$$

$$\forall x', x'' \in E,\ d_n(x', x'') < \delta:\ d_m(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Определение 3. *Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ называется ограниченным на множестве E, если $\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in E$ выполняется неравенство $d(f(x), 0) \le M$.*

Ограниченность данного отображения означает ограниченность множества его значений.

Если $\mathbb{R}^m$ рассматривать как нормированное пространство, то определение ограниченности отображения примет вид

$$\exists M > 0,\ \text{т.ч.}\ \forall x \in E\ \text{выполняется неравенство}\ |f(x)| \le M,$$

что по форме записи совпадет с определением ограниченности числовой функции, данным в лекции 10.

Теорема 1. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ и $f \in C(K)$. Тогда*

1) *$f(K)$ — компакт в $\mathbb{R}^m$, т.е. непрерывный образ компакта является компактом.*

2) *Отображение f равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. Начнем с утверждения 1. Ограниченность множества $f(K)$ доказывается так же, как и в первой теореме Вейерштрасса для функций одной переменной (теорема 2 лекции 12). Докажем замкнутость $f(K)$. Пусть $b \in (f(K))' \Rightarrow \exists y^{(l)} \ne b$, $y^{(l)} \in f(K)$ (т.е. $y^{(l)} = f(x^{(l)})$, $x^{(l)} \in K$), т.ч. $y^{(l)} \xrightarrow{d_m} b$ при $l \to +\infty$. Из последовательности $(x^{(l)})$ точек компакта K выделим сходящуюся подпоследовательность $(x^{(l_p)})$. Пусть $x^{(l_p)} \xrightarrow{d_n} a \in K$ при $p \to +\infty$. Вследствие непрерывности f: $f(x^{(l_p)}) \xrightarrow{d_m} f(a)$. В то же время, $f(x^{(l_p)}) = y^{(l_p)} \xrightarrow{d_m} b$

как подпоследовательность сходящейся последовательности $(y^{(l)})$[2] $\Rightarrow$ в силу единственности предела $b = f(a) \in f(K)$. Следовательно, $f(K)$ замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ множество $f(K)$ компакт в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство пункта 2 проводится с использованием теоремы Больцано–Вейерштрасса аналогично тому, как это было сделано в теореме Кантора в одномерном случае.

Теорема 2. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $f\colon K \to \mathbb{R}$ и $f \in C(K)$. Тогда функция f принимает наибольшее и наименьшее значение на K, т.е. $\exists x^{(1)}, x^{(2)} \in K$, т.ч. $\forall x \in K\colon f(x^{(1)}) \leq f(x) \leq f(x^{(2)})$.*

Доказательство аналогично доказательству 2–ой теоремы Вейерштрасса (см. лекцию 13).

Для дальнейших целей потребуется еще одно определение, которое и приводится ниже.

Определение 4. *Путем Γ в $\mathbb{R}^n$, называется непрерывное отображение $t \to x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ некоторого отрезка $[t_0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$. При этом пишут $\Gamma = \{x(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$.*

Определение 5. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить путем, лежащим в E.*

Определение 6. *Открытое в $\mathbb{R}^n$ линейно связное множество называется областью в $\mathbb{R}^n$.*

Определение 7. *Множество называется замкнутой областью в $\mathbb{R}^n$, если оно является замыканием области в $\mathbb{R}^n$.*

Не всякое замкнутое в $\mathbb{R}^n$ множество является замкнутой областью: отрезок не будет замкнутой областью в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$.

Следующая теорема является аналогом теоремы теоремы Больцано–Коши.

Теорема 3. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — линейно связное множество, $f\colon E \to \mathbb{R}$ и $f \in C(E)$. Если в некоторых точках $a, b \in E$ функция f принимает значения $f(a)$ и $f(b)$, то $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in E$, т.ч. $f(c) = \gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma = \{x(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$ — путь, лежащий в E и соединяющий точки a и b. Тогда функция одной переменной $(f \circ x)(t) = f(x(t)) \in C[t_0, t_1]$ как композиция непрерывных функций. Следовательно, к этой функции применима теорема

[2] очевидно, что это свойство подпоследовательностей сходящихся последовательностей сохраняется в метрических пространствах.

о промежуточных значениях для непрерывных функций одной переменной: $\exists t^* \in [t_0, t_1]$, т.ч. $f(x(t^*)) = \gamma$. Так как $c = x(t^*) \in E$, то теорема доказана.

Следствие. *Если K — линейно–связный компакт в $\mathbb{R}^n$, $f \colon K \to \mathbb{R}$ и $f \in C(K)$, то f принимает все значения из отрезка $[\min_{x\in K} f(x), \max_{x\in K} f(x)]$ (т.е. образом $f(K)$ линейно связного компакта K является отрезок $[\min_{x\in K} f(x), \max_{x\in K} f(x)]$).*

Доказательство сразу следует из теорем 2 и 3.

Теорема 4. *Непрерывный образ линейно связного множества линейно связен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \colon E \to \mathbb{R}^m$, E — линейно связно и $A, B \in f(E)$ — произвольны. Тогда $\exists a, b \in E$, т.ч. $f(a) = A$, $f(b) = B$ и в силу линейной связности E существует путь $\{x(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$, лежащий в E, т.ч. $x(t_0) = a$, $x(t_1) = b$. Поскольку $f \in C(E)$, то функция $y(t) \doteq f(x(t)) \in C[t_0, t_1]$ как композиция непрерывных функций. При этом $y(t_0) = f(x(t_0)) = f(a) = A$, а $y(t_1) = f(x(t_1)) = f(b) = B \Rightarrow \{y(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$ является путем, лежащим в $f(E)$ и соединяющим точки A и B. Теорема доказана.

Будем считать $\mathbb{R}^n$ нормированным пространством. Отрезком в $\mathbb{R}^n$ с началом в точке a и концом в b называется множество точек $[a, b] = \{x |\ x = a + t(b - a),\ t \in [0, 1]\}$. Таким образом, отрезок является множеством значений отображение $t \in [0, 1] \to a + t(b - a) \in \mathbb{R}^n$. Нетрудно убедиться, что это отображение непрерывно. Действительно, пусть $t,\ t_0 \in [0, 1]$ и дано $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство

$$|x(t) - x(t_0)| = |t - t_0||b - a| < \varepsilon$$

выполнено $\forall t \in [0, 1]$, т.ч. $|t - t_0| < \delta$, где $\delta = \varepsilon/|b - a|$, если $b \neq a$, и δ любое положительное число, если $b = a$.

Ломаной L с вершинами в точках $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(l)} \in \mathbb{R}^n$ называется упорядоченный набор $\{[a^{(j-1)}, a^{(j)}],\ \ j = 1, \ldots, l\}$ отрезков. Отрезки $[a^{(j-1)}, a^{(j)}]$ называются *звеньями* ломаной. Ломаная L является множеством значений отображения $t \in [0, lt] \to \mathbb{R}^n$, где $x(t) = a^{(j-1)} + (t - j + 1)(a^{(j)} - a^{(j-1)})$, если $t \in [(j-1)t, jt], j = 1, \ldots, l$. Указанное отображение непрерывно (доказывается это так же, как и для отрезка). Следовательно, это отображение является путем. Такой путь также будем называть ломаной.

Для открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств мы получим эквивалентное определение линейной связности, если потребуем, чтобы любые две несовпадающие точки множества можно было соединить ломаной с конечным числом звеньев, целиком лежащей в нем. При этом ломаную всегда можно взять без точек самопересечения. Не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения[3].

[3]см., например, с. 59 в книге Маркушевича А.И. Теория аналитических функций. Начала теории. Изд. 2-е. М.: Наука. 1967

ЛЕКЦИЯ 37

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Ниже $\mathbb{R}^n$ рассматривается как векторное нормированное пространство. Пусть $U(a) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность точки $a \in \mathbb{R}^n$, f: $U(a) \to \mathbb{R}$, $\Delta f(a) \doteq f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ — приращение функции f в точке a, $\Delta x = x - a$ — приращение аргумента. Через $|\Delta x|$ обозначим норму (длину) вектора $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$: $|\Delta x| \doteq \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Иногда $|\Delta x|$ будем обозначать через ρ.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке a ($f \in D(a)$), если существует n действительных чисел $A_1, \ldots, A_n$, т.ч. для приращения функции f в точке a имеет место представление*

$$f(a + \Delta x) - f(a) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|, \qquad (10)$$

где $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Короче,

$$f \in D(a) \;\Leftrightarrow\; \exists\, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}:$$

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} A_k \Delta x_k + o(|\Delta x|),\ \Delta x \to 0.$$

В равенстве (10) приращение Δx можно брать равным нулю. Значит, функция $\varepsilon(\Delta x)$ определена в нуле. Так как $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, то функция $\varepsilon(\Delta x)$ в определении дифференцируемости непрерывна в нуле и $\varepsilon(0) = 0$. Это будет использовано позднее.

Заметим, что если равенство

$$f(a + \Delta x) - f(a) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|$$

имеет место при $|\Delta x| \neq 0$, где $\lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta x \neq 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, то $f \in D(a)$. Действительно, доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x)$ в нуле нулем. Тогда $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ и, следовательно, для функции f выполнено определение дифференцируемости в точке a.

Определение 2. *Линейная функция $L(\Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$ приращения Δx называется дифференциалом функции f в* *точке $x = a$ и обозначается $df(x)|_{x=a}$, $df(a)$, $df(a, \Delta x)$ или просто df.*

Итак, $df(a, \Delta x) \doteq A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$.

Приведенные определение дифференцируемости и дифференциала являются естественным обобщением на n–мерный случай определений, данных ранее для функций одной переменной: при $n = 1$, получаем прежние определения.

Если $f(x) = x_k$, $1 \leq k \leq n$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$), то $\Delta f = \Delta x_k \Rightarrow dx_k = df = \Delta x_k$. Поэтому дифференциал принято записывать в виде

$$df(a, dx) = A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n.$$

Замечание. Условие дифференцируемости функции f в точке a можно записать в бескоординатной форме: $f \in D(a)$, если существует линейный оператор (=линейное отображение) B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, т.ч.

$$f(a + \Delta x) - f(a) = B\Delta x + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{11}$$

Действительно, разложим Δx по стандартному базису $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)$: $\Delta x = \sum_{k=1}^n \Delta x_k e_k$. Тогда в силу линейности $B\Delta x = B(\sum_{k=1}^n \Delta x_k e_k) = \sum_{k=1}^n B(\Delta x_k e_k) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k B e_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k A_k$, где $A_k \doteq Be_k$, т.е. числа A_k являются элементами матрицы $(A_1, \ldots, A_n)$ линейного оператора B в стандартном базисе. Отметим, что определение дифференцируемости в виде (11) при $n = 1$ совпадает с определением дифференцируемости функции одной переменной.

Теорема 1. *Если $f \in D(a)$, то $f \in C(a)$.*

Доказательство. Так как $f \in D(a)$, то $f(a + \Delta x) = f(a) + A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(|\Delta x|)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x_j = 0$ (см. пример 2 из лекции 35), получаем, что $\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = f(a) \Rightarrow f \in C(a)$.

Определение 3. *Вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ называется направлением, если его норма $|\omega| = 1$.*

Определение 4. *Предел*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\omega) - f(a)}{t},$$

если он существует, называется производной функции f по направлению ω в точке a и обозначается $f'_\omega(a)$ или $\frac{\partial f}{\partial \omega}(a)$.

Другими словами, производная по направлению ω функции f в точке a — это производная функции одной переменной $g(t) \doteq$

$f(a + t\omega)$ в точке $t = 0$. Действительно,

$$g(t) - g(0) = f(a + t\omega) - f(a).$$

Поэтому

$$f'_\omega(a) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = (f(a + t\omega))'_t|_{t=0}.$$

Определение 5. *Если $\omega = e_k$, где e_k — k–й единичный вектор стандартного базиса, то $f'_{e_k}(a)$ называется частной производной функции f по k–му аргументу (или по переменной x_k) в точке a и обозначается одним из символов $f'_k(a)$, $f'_{x_k}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $D^1_k f(a)$ или $D^1_{x_k} f(a)$.*

Итак,

$$f'_k(a) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{t}.$$

Следовательно, частная производная $f'_k(a_1, \ldots, a_n)$ — это производная функции одной переменной $(f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n))'|_{x_k = a_k}$.

Теорема 2. *Если $f \in D(a)$, то для любого направления $\omega \in \mathbb{R}^n$ существует $f'_\omega(a)$ и $f'_\omega(a) = A_1\omega_1 + \ldots + A_n\omega_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу дифференцируемости f:

$$f(a + t\omega) - f(a) = A_1 t\omega_1 + \ldots + A_n t\omega_n + |t\omega|\varepsilon(t\omega),$$

где $\lim_{t\omega\to 0} \varepsilon(t\omega) = 0$. Так как ω фиксированный вектор, то функция $\varepsilon(t\omega)$ является функцией переменной t: $\varepsilon(t\omega) = \alpha(t)$, причем $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$. Учитывая, что $|t\omega| = |t|$, имеем $|t\omega|\varepsilon(t\omega) = |t|\alpha(t) = t\mathrm{sgn} t\alpha(t) = o(t)$ при $t \to 0$, ибо $\alpha(t)\mathrm{sgn} t \to 0$ при $t \to 0$ как произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию. Тогда

$$f(a + t\omega) - f(a) = (A_1\omega_1 + \ldots + A_n\omega_n)t + o(t) \text{ при } t \to 0.$$

Следовательно, $f(a + t\omega) \in D(0)$ (как функция одной переменной t) и $f'_\omega(a) = A_1\omega_1 + \ldots + A_n\omega_n$.

Следствие (необходимое условие дифференцируемости). *Если $f \in D(a)$, то у функции f существуют все частные производные $f'_1(a), \ldots, f'_n(a)$ в точке a и $A_k = f'_k(a)$ $(k = 1, \ldots, n)$, т.е. $df(a, dx) = f'_1(a)dx_1 + \ldots + f'_n(a)dx_n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы и определения частных производных.

Примеры.

1. Исследуем на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Для этого надо выяснить существуют ли частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ и в случае их существования проверить, является ли бесконечно малой при $(x,y) \to (0,0)$ функция $\alpha(x,y)$ из представления

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

Имеем

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

Аналогично $f'_y(0,0) = 1$.

Таким образом, задача сводится к проверке будет ли 0 пределом функции

$$\alpha(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

когда $(x,y) \to (0,0)$ и $(x,y) \neq 0$. Посмотрим на поведение функции $\alpha(x,y)$ на прямой $y = x$ при $x \to 0$:

$$\alpha(x,x) = \frac{\sqrt[3]{2}x - 2x}{\sqrt{2}|x|} = \frac{x(\sqrt[3]{2}-2)}{|x|\sqrt{2}}$$

не стремится к нулю при $x \to 0$, ибо ее предел справа отличен от нуля. Следовательно, функция $\alpha(x,y)$ не является бесконечно малой при $(x,y) \to (0,0)$, и, стало быть, $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

2. Приведем еще совсем простой пример функции, имеющей все частные производные в точке, но не дифференцируемой в ней. Положим

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

Найдем ее частные производные в точке $(0,0)$: $f'_1(0,0) = \lim_{x\to 0}(f(x,0) - f(0,0))/x = 0$ и аналогично $f'_2(0,0) = 0$. Но $f \notin D(0,0)$, так как она даже не непрерывна в точке $(0,0)$: $\lim_{x\to 0,\ x\neq 0} f(x,x) = 1 \neq f(0,0) = 0$.

Определение 6. *Если функция f обладает всеми частными производными в точке a, то вектор* $\mathrm{grad} f(a) \doteq (f'_1(a),\ldots,f'_n(a))$ *называется градиентом функции f в точке a.*

Из теоремы 2 и ее следствия вытекает следующая лемма:

Лемма. *Если* $f \in D(a)$, *то для произвольного направления* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *имеет место формула*

$$f'_\omega(a) = \mathrm{grad} f(a) \cdot \omega.$$

Следствие. *Если* $f \in D(a)$ *и* $\mathrm{grad} f(a) = 0$, *то производная* $f'_\omega(a)$ *по любому направлению* ω *равна нулю.*

Теорема 3(свойства производной по направлению). *Пусть* $f \in D(a)$ *и* $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$. *Тогда*

1) *максимальное значение производной функции* f *по направлению в точке* a *достигается при* $\omega = \mathrm{grad} f(a)/|\mathrm{grad} f(a)|$ *и оно равно* $|\mathrm{grad} f(a)|$;

2) *минимальное значение производной функции* f *по направлению в точке* a *достигается при* $\omega = -\mathrm{grad} f(a)/|\mathrm{grad} f(a)|$ *и оно равно* $-|\mathrm{grad} f(a)|$;

3) *если* $\omega \perp \mathrm{grad} f(a)$, *то* $f'_\omega(a) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эти свойства производной по направлению следуют из формулы $f'_\omega = \mathrm{grad} f(a) \cdot \omega$ и неравенства Коши–Буняковского, которое в данном случае имеет следующий вид: $|f'_\omega| \leq |\mathrm{grad} f(a)||\omega| = |\mathrm{grad} f(a)|$, или $-|\mathrm{grad} f(a)| \leq f'_\omega \leq |\mathrm{grad} f(a)|$, причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда координаты ω пропорциональны координатам $\mathrm{grad} f(a)$, т.е. когда $\omega = \pm \dfrac{\mathrm{grad} f(a)}{|\mathrm{grad} f(a)|}$.

Пример. Функция может иметь производную по любому направлению в данной точке, но быть не дифференцируемой в ней: у функции

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2,\ x \neq 0 \\ 0, & y \neq x^2 \text{ или } y = x = 0 \end{cases}$$

производная по любому направлению $g'_\omega(0, 0) = 0$, но она также не будет непрерывной в точке $(0, 0)$, а следовательно, и дифференцируемой.

ЛЕКЦИЯ 38

Теорема 1(достаточное условие дифференцируемости). *Пусть функция $f(x)$ и все ее частные производные $f'_k(x)$, $k = 1,\dots,n$, определены в некоторой окрестности точки a. Если $f'_k \in C(a)$, $k = 1,\dots,n$, то $f \in D(a)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ради краткости записи проведем доказательство для функций двух переменных. Представим приращение Δf в точке (a_1, a_2) в следующем виде:

$$\Delta f(a_1,a_2) = f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2) - f(a_1,a_2) =$$
$$(f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2) - f(a_1, a_2+\Delta x_2)) + (f(a_1, a_2+\Delta x_2) - f(a_1,a_2)).$$

В каждой из скобок стоит приращение функции одной переменной: в первой скобке — функции $f(u, a_2+\Delta x_2)$, а во второй — функции $f(a_1, v)$. Для этих функций выполнены условия теоремы Лагранжа, следовательно,

$$\Delta f(a_1,a_2) = f'_1(c_1, a_2+\Delta x_2)\Delta x_1 + f'_2(a_1,c_2)\Delta x_2,$$

где точки c_i лежат на интервалах с концами a_i и $a_i+\Delta x_i$ $(i=1,2)$.

Так как $c_i \to a_i$ при $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности в точке (a_1,a_2) частных производных при $\Delta x \to 0$ имеют место соотношения:

$$f'_1(c_1, a_2+\Delta x_2) = f'_1(a_1,a_2) + o(1), f'_2(a_1,c_2) = f'_2(a_1,a_2) + o(1).$$

Поэтому

$$\Delta f(a_1,a_2) = f'_1(a_1,a_2)\Delta x_1 + \Delta x_1 o(1) + f'_2(a_1,a_2)\Delta x_2 + \Delta x_2 o(1).$$

Поскольку $|\Delta x_i| \le |\Delta x| = (|\Delta x_1|^2 + |\Delta x_2|^2)^{1/2}$, то при $\Delta x \neq 0$: $\left|\frac{\Delta x_i}{|\Delta x|}\right| \le 1$, $i=1,2$ и, следовательно,

$$\Delta x_i o(1) = |\Delta x| \frac{\Delta x_i}{|\Delta x|} o(1) = o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\Delta f(a_1,a_2) = f'_1(a_1,a_2)\Delta x_1 + f'_2(a_1,a_2)\Delta x_2 + o(|\Delta x|),$$

откуда вытекает, что $f \in D(a)$.

Геометрический смысл дифференциала

Нам понадобится понятие поверхности в $\mathbb{R}^3$. Будем отталкиваться от геометрического образа поверхности как множества в $\mathbb{R}^3$, являющегося графиком некоторой функции двух переменных.

Определение 1. *Множество S называется непрерывной поверхностью в $\mathbb{R}^3$, если существует область $G \subset \mathbb{R}^2$ и функция $f\colon G \to \mathbb{R}$, т.ч. $f \in C(G)$ и $S = \{(x, y, z) |\ (x, y) \in G,\ z = f(x, y)\}$.*

В этом случае говорят, что поверхность S задана функцией $f(x, y)$ или уравнением $z = f(x, y)$.

Пусть непрерывная функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $U((x_0, y_0))$, дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда

$$f(x, y) - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho),\ \rho \to 0.$$

Определение 2. *Плоскость, задаваемая уравнением*

$$z = z_0 + f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0),$$

называется касательной плоскостью в точке (x_0, y_0, z_0) к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

Для касательной плоскости приращение аппликаты $z - z_0 = df((x_0, y_0), (\Delta x, \Delta y))$ совпадает с дифференциалом функции f в точке (x_0, y_0). В этом заключается геометрический смысл дифференциала.

Из определения касательной плоскости следует, что $f(x, y) - z = o(\rho)$ при $\rho \to 0$, т.е. разность аппликат точек поверхности и касательной плоскости является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\rho = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$.

Дифференцирование сложной функции

Теорема 2(цепное правило). *Пусть $f \in D(a)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\psi_i \in D(\alpha)$, где $a_i = \psi_i(\alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. Тогда функция $g(t_1, \ldots, t_k) \doteq f(\psi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \psi_n(t_1, \ldots, t_k)) \in D(\alpha)$ и при этом*

$$g_j'(\alpha) = (f(\psi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \psi_n(t_1, \ldots, t_k)))'_{t_j}|_{t=\alpha} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_i(\alpha)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \frac{\partial \psi_i(\alpha)}{\partial t_j}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся случаем, когда все функции $\psi_i = \psi_i(t)$ являются функциями одной переменной $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$. По условию $f \in D(a)$, т.е.

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f_1'(a)\Delta x_1 + \ldots + f_n'(a)\Delta x_n + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|, \quad (12)$$

где $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Так как равенство (12) имеет место и при $\Delta x = 0$, то в нем можно заменить приращение Δx на приращение $\Delta\psi = \psi(\alpha + \Delta t) - \psi(\alpha) = (\Delta\psi_1, \ldots, \Delta\psi_n)$. Поскольку $\psi(\alpha) = a$, то

$$f(a + \Delta\psi) - f(a) = f(\psi(\alpha + \Delta t)) - f(\psi(\alpha)) = \Delta g,$$

и мы приходим к равенству

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)\Delta\psi_i + \varepsilon(\Delta\psi)|\Delta\psi|, \quad (13)$$

Разделим обе части равенства (13) на Δt:

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)\frac{\Delta\psi_i}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta\psi)\frac{|\Delta\psi|}{\Delta t} \quad (14)$$

Из неравенства

$$|\Delta\psi| = \sqrt{(\Delta\psi_1)^2 + \ldots + (\Delta\psi_n)^2} \le \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |\Delta\psi_i|,$$

следует оценка

$$\left|\frac{|\Delta\psi|}{\Delta t}\right| \le \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} \left|\frac{\Delta\psi_i}{\Delta t}\right|.$$

По условию функции $\psi_i(t)$ дифференцируемы в точке $t = \alpha \Rightarrow$ функции $\Delta\psi_i/\Delta t$ ограничены при $\Delta t \to 0$ как функции, имеющие предел. Стало быть, и функция $|\Delta\psi|/\Delta t$ ограничена при $\Delta t \to 0$. Далее, поскольку $\psi_i(t)$ непрерывны в точке $t = \alpha$, то $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\psi_i = 0$. Тогда в силу непрерывности функции $\varepsilon(\Delta x)$ в нуле согласно утверждению о пределе композиции $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta\psi) = 0$. Значит,

$$\varepsilon(\Delta\psi)\frac{|\Delta\psi|}{\Delta t} \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0$$

(как произведение бесконечно малой на ограниченную функцию).

Поэтому переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в (14), получаем, что

$$g'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \frac{d\psi_i}{dt}(\alpha).$$

В общем случае доказательство аналогично.

Следствие (инвариантность дифференциала). *Если при выполнении условий теоремы в выражении для дифференциала*

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) dx_i$$

вместо приращений dx_i независимых переменных подставить дифференциалы $d\psi_i(\alpha)$, то полученное выражение будет дифференциалом в точке α сложной функции $f(\psi(t)) = f(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$.

Доказательство. В силу определения дифференциала функции $g(t) = f(\psi(t))$ и цепного правила

$$dg = \sum_{j=1}^{k} g_j'(\alpha) dt_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}(\alpha) \right) dt_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}(\alpha) dt_j \right) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) d\psi_i(\alpha).$$

Следующее утверждение является обобщением на n–мерный случай следствия из теоремы Лагранжа (см. лекцию 20) о постоянстве функции с нулевой производной.

Теорема 3. *Если в области $D \subset \mathbb{R}^n$ у функция f все частные производные $f_1'(x) = f_2'(x) = \ldots = f_n'(x) = 0$, то f постоянна на D.*

Доказательство. Сначала заметим, что функция f дифференцируема в каждой точке области D, ибо ее частные производные непрерывны в D (см. теорему 2). Теперь зафиксируем точку $x^{(0)} \in D$. На первом шаге покажем, что $f(x) = f(x^{(0)})$ во всякой точке x области D, для которой отрезок, соединяющий точки $x^{(0)}$ и x, целиком принадлежит D. Для этого введем вспомогательную функцию

$$\psi(t) \doteq f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)}))$$

одной переменной t. Эта функция определена на отрезке $[0, 1]$ и

$$\psi(0) = f(x^{(0)}),\ \psi(1) = f(x).$$

Кроме того, $\psi \in D[0,1]$ как композиция дифференцируемых функций, ибо функции $\alpha_j(t) = x_j^{(0)} + t(x_j - x_j^{(0)})$, $j = 1, 2 \ldots, n$ дифференцируемы. Поэтому по теореме Лагранжа и цепному правилу

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta) = \sum_{j=1}^{n} f_j'(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}))(x_j - x_j^{(0)}) = 0.$$

Значит, $f(x) = f(x^{(0)})$.

На втором шаге покажем, что равенство $f(x) = f(x^{(0)})$ имеет место для любой точки $x \in D$. Так как D является областью, то любую точку $x \in D$ можно соединить с точкой $x^{(0)}$ ломаной с конечным числом звеньев, целиком лежащей в D. Пусть точки $x^{(0)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)} = x$ являются концами звеньев такой ломаной. В силу доказанного на первом шаге имеем

$$f(x^{(1)}) = f(x^{(0)}),\ f(x^{(2)}) = f(x^{(1)}), \ldots, f(x^{(N)}) = f(x^{(N-1)}).$$

Таким образом, $f(x) = f(x^{(0)})$ для $\forall x \in D$, т.е. функция f постоянна на D.

Свойства дифференцируемых функций и дифференциалов

Пусть $f, g \in D(a)$. Тогда:

1) $f \pm g \in D(a)$ и $d(f \pm g) = df \pm dg$;

2) $fg \in D(a)$ и $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$;

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ функция $\lambda f \in D(a)$ и $d(\lambda f) = \lambda df$;

4) если $g(a) \neq 0$, то $f/g \in D(a)$ и $d(f/g) = (df \cdot g - f \cdot dg)/g^2$ (значения функций и их дифференциалов берутся в точке a).

Эти утверждения достаточно проверить для функций $f(x) = x_1$ и $g(x) = x_2$. В самом деле, подставив вместо x_1 и x_2 произвольные дифференцируемые функции, с одной стороны, получим на основании теоремы о дифференцировании композиции дифференцируемую функцию, а с другой стороны, в силу инвариантности 1–го дифференциала — требуемые формулы.

Докажем, например, п. 4. Для этого достаточно показать, что функция $\dfrac{x_1}{x_2}$ дифференцируема при $x_2 \neq 0$. Имеем: $(x_1/x_2)_1' = 1/x_2$, $(x_1/x_2)_2' = -x_1/x_2^2$. Так как частные производные непрерывны при $x_2 \neq 0$, то функция x_1/x_2 дифференцируема в любой точке своей области определения и по определению дифференциала

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{1}{x_2}dx_1 - \frac{x_1}{x_2^2}dx_2 = \frac{dx_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot dx_2}{x_2^2}.$$

ЛЕКЦИЯ 39

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция f такова, что ее частная производная f'_i определена в некоторой окрестности $U(a)$ точки a. Тогда можно говорить о частных производных функции $f'_i(x)$, если они существуют:

частную производная $(f'_i(x))'_j|_{x=a}$ называют частной производной функции f второго порядка по аргументам i и j в точке a и обозначают символами $f''_{ij}(a)$ или $f''_{x_ix_j}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $(D^2_{ij}f)(a)$, $(D^2_{x_ix_j}f)(a)$.

Если $j \neq i$, то такая производная называется смешанной частной производной второго порядка; если $j = i$, то полученная частная производная называется частной производной второго порядка по i–й переменной, и для нее используются следующие обозначения: $f''_{ii}(a)$, $f''_{i^2}(a)$, $f''_{x_ix_i}(a)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, $(D^2_{ii}f)(a)$, $(D^2_{x_ix_i}f)(a)$.

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков: $f^{(m)}_{i_1\ldots i_m}(a) \doteq (f^{(m-1)}_{i_1\ldots i_{m-1}}(x))'_{i_m}|_{x=a}$, $1 \le i_1, \ldots, i_m \le n$ (в предположении, что $f^{(m-1)}_{i_1\ldots i_{m-1}}(x)$ определена в некоторой окрестности точки a).

Теорема 1(Шварц). *Пусть* $f, f'_i, f'_j, f''_{ij}, f''_{ji}$*:* $U(a) \to \mathbb{R}$ *(*$i \neq j$*) и* $f''_{ij}, f''_{ji} \in C(a)$*. Тогда* $f''_{ij}(a) = f''_{ji}(a)$*.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением функций двух переменных (в общем случае доказательство аналогично). Зафиксируем Δx_1 и Δx_2, и пусть

$$\Delta^2 f \doteq f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2 + \Delta x_2) -$$

$$- f(a_1 + \Delta x_1, a_2) + f(a_1, a_2) =$$

$$(f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2 + \Delta x_2)) - (f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)).$$

Введем функцию одной переменной $\varphi(t) = f(a_1 + \Delta x_1, t) - f(a_1, t)$. Тогда

$$\Delta^2 f = \varphi(a_2 + \Delta x_2) - \varphi(a_2).$$

Применяя теорему Лагранжа (теорема 1 лекции 20) к приращению функции $\varphi(t)$ (что законно в силу существования f'_2 в $U(a)$), получаем, что

$$\Delta^2 f = \varphi'(c_2)\Delta x_2 = (f'_2(a_1 + \Delta x_1, c_2) - f'_2(a_1, c_2))\Delta x_2 =$$

(вновь используем теорему Лагранжа)

$$(f_2')_1'(c_1, c_2)\Delta x_1 \Delta x_2 = f_{21}''(c_1, c_2)\Delta x_1 \Delta x_2.$$

Поскольку $f_{21}'' \in C(a)$, то $f_{21}''(c_1, c_2) = f_{21}''(a_1, a_2) + o(1)$ при $\Delta x \to 0$ и, следовательно,

$$\Delta^2 f = (f_{21}''(a_1, a_2) + o(1))\Delta x_1 \Delta x_2.$$

В то же время

$$\Delta^2 f = (f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1 + \Delta x_1, a_2)) -$$

$$-(f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)) = \psi(a_1 + \Delta x_1) - \psi(a_1),$$

где $\psi(t) = f(s, a_2 + \Delta x_2) - f(s, a_2)$.

Применим, как и выше, дважды теорему Лагранжа:

$$\Delta^2 f = f_{12}''(c_1', c_2')\Delta x_1 \Delta x_2.$$

Так как $f_{12}'' \in C(a)$, то $f_{12}''(c_1', c_2') = f_{12}''(a_1, a_2) + o(1)$ при $\Delta x \to 0$ и, следовательно,

$$\Delta^2 f = (f_{12}''(a_1, a_2) + o(1))\Delta x_1 \Delta x_2.$$

Таким образом,

$$f_{21}''(a_1, a_2) + o(1) = f_{12}''(a_1, a_2) + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $f_{21}''(a_1, a_2) = f_{12}''(a_1, a_2)$. Теорема доказана.

Теорема 2(Юнг). *Пусть f, f_i', f_j': $U(a) \to \mathbb{R}$ и f_i', $f_j' \in D(a)$. Тогда $f_{ij}''(a) = f_{ji}''(a)$.*

Не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы.

Определение 1. *Функция f называется дважды дифференцируемой в точке a ($f \in D^2(a)$), если все частные производные $f_1', \dots, f_n' \in D(a)$. Функция f называется k раз дифференцируемой в точке a ($f \in D^k(a)$), если все частные производные порядка $k-1$ (смешанные и несмешанные) являются дифференцируемыми в точке a функциями.*

Определение 2. *Функция f называется k раз непрерывно дифференцируемой в точке a ($f \in C^k(a)$), если все частные производные порядка k непрерывны в точке a.*

Стандартным образом определяется (непрерывная) дифференцируемость k раз в окрестности данной точки.

Определение 3. *Функция $f \in D^k(U(a))$ (соответственно $f \in C^k(U(a))$), если $\forall x \in U(a)$: $f \in D^k(x)$ ($f \in C^k(x)$).*

Если $f \in C^k(a)$, то $f \in D^k(a)$, т.е. $C^k(a) \subset D^k(a)$ (действительно, возьмем произвольную частную производную $f^{(k-1)}_{i_1\ldots i_{k-1}}$; по предположению все ее частные производные первого порядка непрерывны в точке $a \Rightarrow f^{(k-1)}_{i_1\ldots i_{k-1}} \in D(a)$ в силу достаточного условия дифференцируемости функции).

Если $f \in D^k(a)$, то $f \in C^{k-1}(a)$, т.е. $D^k(a) \subset C^{k-1}(a)$ (в самом деле, согласно определению все частные производные $f^{(k-1)}_{i_1\ldots i_{k-1}} \in D(a)$ $\Rightarrow$ они непрерывны в точке $a \Rightarrow f \in C^{k-1}(a)$).

Теорема 3. *Если $f \in D^k(a)$ или $f \in C^k(a)$, то частные производные функции f до порядка k включительно не зависят от порядка дифференцирования.*

Доказательство. В обоих случаях рассуждения проводятся индукцией по порядку дифференцирования. В силу включения $C^k(a) \subset D^k(a)$ достаточно проверить справедливость утверждения для k раз дифференцируемых функций.

Для $k = 2$ утверждение истинно в силу теоремы Юнга. Пусть утверждение справедливо для $f \in D^k(a)$ ($k \geq 3$), т.е. значения частных производных до k–го порядка включительно не зависят от порядка их взятия. Покажем, что тогда это верно и для частных производных, порядки которых не превосходят $k+1$, если $f \in D^{k+1}(a)$. В силу предположения индукции достаточно показать, что

$$(f^{(k)}_{i_1\ldots i_{k-1}i_k})'_{i_{k+1}}(a) = (f^{(k)}_{i_1\ldots i_{k-1}i_{k+1}})'_{i_k}(a), \tag{15}$$

т.е. перестановочность последнего дифференцирование по переменной i_{k+1} с предпоследним по переменной i_k. Действительно, пусть $\varphi = f^{(k-1)}_{i_1\ldots i_{k-1}}$. Так как $f \in D^{k+1}(a)$, то $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n \in D(a)$. Следовательно (для $i \neq j$ согласно теореме Юнга), $\varphi''_{ij}(a) = \varphi''_{ji}(a)$. В частности для $i = i_k$, $j = i_{k+1}$ это означает, что $(f^{(k-1)}_{i_1\ldots i_{k-1}})''_{i_k i_{k+1}}(a) = (f^{(k-1)}_{i_1\ldots i_{k-1}})''_{i_{k+1} i_k}(a)$, т.е. справедливость равенства (15).

Пусть $f \in D^2(a)$. Зафиксируем приращение $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$ и рассмотрим функцию

$$g(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)dx_i = df(x, dx).$$

Эта функция дифференцируема в точке a как линейная комбинация дифференцируемых функций f_i' и ее дифференциал, соответствующий приращению $\delta x = (\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, равен

$$dg(a, \delta x) = \sum_{i=1}^{n} dx_i df_i'(a, \delta x) = \sum_{i=1}^{n} dx_i \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(a)\delta x_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(a) dx_i \delta x_j$$

(сначала воспользовались линейностью дифференциала, а затем определением дифференциалов $df_i(a, \delta x)$). Положим теперь $\delta x_j = dx_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда полученная (квадратичная) форма

$$d^2 f(a, dx) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(a) dx_i dx_j$$

называется *вторым дифференциалом* функции f в точке a.

Для $f \in D^k(a)$ аналогично вводится k–й дифференциал: $d^k f(a, dx) \doteq d(d^{k-1} f((a, dx), \delta x)|_{\delta x = dx}$, откуда следует, что

$$d^k f(a, dx) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} f_{i_1 \ldots i_k}^{(k)}(a) dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Вообще, k–й дифференциал $d^k f(a, dx)$ можно представить как формальное произведение

$$\left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(a),$$

где k–я степень выражения в скобках раскрывается по обычным арифметическим правилам (как если бы в скобках стояла сумма n слагаемых, являющихся произведениями действительных чисел), а получающиеся произведения $dx_{i_1} \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdot \ldots \cdot dx_{i_k} \dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(a)$ понимаются как $dx_{i_1} \cdot \ldots \cdot dx_{i_k} f^{(k)}_{i_1 \ldots i_k}(a)$.

Как и для функций одной переменной, дифференциалы высших порядков функций многих переменных не обладают свойством инвариантности.

ЛЕКЦИЯ 40

Формулы Тейлора

Лемма 1. *Пусть $f \in D^l(U(a))$, задан ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$ и $g(t) \doteq f(a+th) = f(a_1+th_1, \ldots, a_n+th_n)$ функция одной переменной t. Тогда*

$$g^{(j)}(0) = d^j f(a,h),\ j = 1, 2, \ldots, l.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле дифференцирования сложной функции (функции $\psi_i(t) = a_i + th_i$ дифференцируемы) имеем

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a+th)h_i = df(a+th, h),$$

в частности, $g'(0) = df(a,h)$. Далее,

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(f_i'(a+th))_t' = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(a+th)h_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(a+th)h_i h_j = d^2 f(a+th, h),$$

в частности, $g''(0) = d^2 f(a,h)$. Продолжая вычисления производных функции $g(t)$, получим, что $g^{(l)}(t) = d^l f(a+th,h)$, в частности, $g^{(l)}(0) = d^l f(a,h)$.

Теорема 1(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть $f \in D^{k+1}(U(a))$. Тогда $\forall x \in U(a)\ \exists \theta \in (0,1)$, т.ч.*

$$f(x) = f(a) + df(a, x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a, x-a) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{k!}d^k f(a, x-a) + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f((a+\theta(x-a)), x-a),$$

$$\text{где}\ \ d^j f(a, x-a) = ((x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n})^j f(a) =$$

$$\sum_{l_1=1}^{n} \cdots \sum_{l_j=1}^{n} \frac{\partial^j f(a)}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_j}}(x_{l_1} - a_{l_1}) \cdots (x_{l_j} - a_{l_j}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $x \in U(a)$ и рассмотрим функцию $g(t) = f(a + (x - a)t)$ на $[0, 1]$. Из условий теоремы следует, что $g \in D^{k+1}[0, 1]$. Следовательно, для функции $g(t)$ на отрезке $[0, 1]$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (теорема 3 лекции 21):

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \dots + \frac{1}{k!}g^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\theta).$$

Поскольку $g(0) = f(a)$, а $g(1) = f(a + (x - a)) = f(x)$, то, учитывая найденные в лемме выражения для производных функции g, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Для $k = 1$ доказанная формула принимает вид

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} f'_j(a + \theta(x - a))(x_j - a_j),$$

что является обобщением формулы Лагранжа (см. теорему 1 из лекции 20) на функции многих переменных.

Теорема 2(формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $f \in C^k(U(a))$. Тогда*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(a, x - a)}{i!} + o(|x - a|^k) \text{ при } x \to a.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предыдущей теореме

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d^i f(a, x - a)}{i!} + \frac{d^k f(a + \theta(x - a), x - a)}{k!}.$$

По определению k–го дифференциала $d^k f(a + \theta(x - a), x - a)$ есть конечная сумма слагаемых вида

$$f^{(k)}_{i_1 \dots i_k}(a + \theta(x - a))\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k}, \ (\Delta x_{i_j} = x_{i_j} - a_{i_j}, \ j = 1, \dots, k).$$

Вследствие непрерывности частных производных

$$f^{(k)}_{i_1 \dots i_k}(a + \theta(x - a))\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k} = (f^{(k)}_{i_1 \dots i_k}(a) + o(1))\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k} =$$

$$= f^{(k)}_{i_1 \dots i_k}(a)\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k} + o(1)\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k} =$$

$$= f^{(k)}_{i_1\dots i_k}(a)\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_k} + o(1)|\Delta x|^k \Delta x_{i_1}/|\Delta x|\cdot\ldots\cdot\Delta x_{i_k}/|\Delta x| =$$

$$f^{(k)}_{i_1\dots i_k}(a)\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_k} + o(|\Delta x|^k) \text{ при } \Delta x\to 0$$

(воспользовались тем, что $\left|\dfrac{\Delta x_{i_j}}{|\Delta x|}\right| \le 1$ при $\Delta x \ne 0$ и, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция). Значит,

$$d^k f(a+\theta(x-a), x-a) = d^k f(a, x-a) + o(|\Delta x|^k),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Как и в одномерном случае, можно доказать единственность многочлена, удовлетворяющего доказанному равенству.

Экстремумы функций многих переменных

Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Точка $a\in E$ называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если $\exists U(a)$, т.ч. $\forall x\in \dot{U}(a)\cap E$: $f(x)\le f(a)$ (соответственно $f(x)\ge f(a)$). Если неравенства строгие, то точка a называется точкой строго* locmax *(*locmin*).*

Определение 2. *Точки* locmax *и* locmin *функции f называются точками локального экстремума* (locextr).

Итак, если a — точка locextr функции f, то $\exists U(a)$, т.ч. $\forall x\in \dot{U}(a)\bigcap E$: разность $f(x)-f(a)$ не меняет знак.

Теорема 3(необходимое условие locextr). *Пусть f определена в некоторой окрестности $U(a)$ и a является точкой* locextr *функции f. Тогда все частные производные $f'_i(a)$, которые существуют, равны нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию одной переменной $g(t)\doteq f(a+te_i)$, где e_i — i–й координатный орт стандартного базиса. Она имеет locextr при $t=0 \Rightarrow g'(0)=0$, если эта производная существует. Так как $g'(0)=f'_i(a)$, то теорема доказана.

Следствие. *Если $f\in D(a)$ и a — точка* locextr*, то* $\mathrm{grad} f(a)=0$ *и, следовательно, $df(a,dx)=0$.*

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные данной функции, называются *стационарными*, или *критическими*, точками функции.

Если $f \in C^2(U(a))$ и a — стационарная точка, то

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a, x-a) + o(|x-a|^2) \text{ при } x \to a.$$

Поэтому естественно выяснить связь знаков приращения функции f и и второго дифференциала $d^2 f(a, x-a)$, являющегося квадратичной формой.

Определение 3. *Квадратичная форма*

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \ x = (x_1, \dots, x_n), \ a_{ij} = a_{ji},$$

называется положительно (отрицательно) определенной, если $\forall x \neq 0$: $A(x) > 0$ *(соответственно* $A(x) < 0$*). Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются знакоопределенными.*

Определение 4. *Квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются знакопеременными.*

Примеры. Квадратичная форма $A_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ является положительно определенной, а квадратичная форма $A_2(x) = x_1^2 - x_2^2$ является знакопеременной ($x \in \mathbb{R}^2$).

Лемма 2. *Если* $A(x)$ *— положительно определенная квадратичная форма, то нижняя грань функции* $A(x)$ *на сфере* $S^{n-1} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ *строго больше нуля.*

Если $A(x)$ *— отрицательно определенная квадратичная форма, то верхняя грань функции* $A(x)$ *на сфере* S^{n-1} *строго меньше нуля.*

Доказательство. Множество S^{n-1} ограничено (это очевидно) и замкнуто в $\mathbb{R}^n$ (как множество граничных точек единичного шара) $\Rightarrow$ S^{n-1} компакт в $\mathbb{R}^n$. Функция $A(x)$, являясь многочленом, непрерывна на $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ непрерывна и на компакте S^{n-1} $\Rightarrow$ $A(x)$ достигает минимума и максимума на сфере S^{n-1} (теорема 2 лекции 33). Это значит, что $\exists x^{(1)}, \ x^{(2)} \in S^{n-1}$, т.ч. $\forall x \in S^{n-1}$: $A(x^{(1)}) \leq A(x) \leq A(x^{(2)})$. Так как $x^{(k)} \in S^{n-1}$, то $x^{(k)} \neq 0$ и, стало быть, $A(x^{(k)}) \neq 0$ $(k = 1, 2)$.

Если квадратичная форма $A(x)$ знакоположительна (знакоотрицательна), то $\forall x \in S^{n-1}$: $A(x) \geq A(x^{(1)}) > 0$ (соответственно $A(x) \leq A(x^{(2)}) < 0$). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $f \in C^2(U(a))$ и a — критическая точка функции f.*

1) *Если второй дифференциал*

$$d^2 f(a, \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(a) \Delta x_i \Delta x_j$$

функции f в точке a является знакоопределенной квадратичной формой, то точка a — точка строго locextr*, а именно:*

если 2-й дифференциал $d^2 f(a, \Delta x)$ положительно определен, то точка a — точка строго locmin*;*

если 2-й дифференциал $d^2 f(a, \Delta x)$ отрицательно определен, то точка a — точка строго locmax.

2) *Если $d^2 f(a, \Delta x)$ — знакопеременная квадратичная форма, то точка a не является точкой* locextr*.*

Доказательство. По условию

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(a) \Delta x_i \Delta x_j + o(|\Delta x|^2)$$

при $\Delta x \to 0$. Преобразуем правую часть этого равенства при $\Delta x \neq 0$:

$$\Delta f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(a) \frac{\Delta x_i}{|\Delta x|} \cdot \frac{\Delta x_j}{|\Delta x|} \cdot |\Delta x|^2 + |\Delta x|^2 o(1) =$$

$$= \frac{|\Delta x|^2}{2} \left(A\left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|} \right) + o(1) \right),$$

где $A(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(a) \Delta x_i \Delta x_j$.

Пусть $A(\Delta x)$ — знакоположительная квадратичная форма. Поскольку $\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|} \in S^{n-1}$, то $A\left(\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}\right) \geq \inf\limits_{S^{n-1}} A(y) = \mu > 0$. Так как $o(1) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists V(0)$, т.ч. $\forall \Delta x \in \dot{V}(0)$: $|o(1)| < \mu/2 \Rightarrow \forall \Delta x \in \dot{V}(0)$, т.ч. $a + \Delta x \in U(a)$:

$$\Delta f(a) > \frac{|\Delta x|^2}{2} \left(\mu - \frac{\mu}{2} \right) > \frac{|\Delta x|^2}{4} \mu > 0,$$

следовательно, a — точка строго locmin.

Аналогично разбирается случай знакоотрицательной квадратичной формы.

Если A — знакопеременная квадратичная форма, то $\exists \Delta x'$ и $\exists \Delta x''$, т.ч. $A(\Delta x') < 0$, $A(\Delta x'') > 0$. При всех достаточно малых $t \neq 0$: $a + t\Delta x'$, $a + t\Delta x'' \in U(a)$. При этом

$$f(a + t\Delta x') - f(a) = \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(a) \Delta x'_i \Delta x'_j + o(t^2 |\Delta x'|) =$$

$$= \frac{t^2}{2} \left(A(\Delta x') + o(1) \right)$$

(воспользовались тем, что при фиксированном $\Delta x'$ $o(t^2|\Delta x'|) = o(t^2)$). Далее, по лемме о знаке $A(\Delta x') + o(t) < 0$ для малых t, следовательно, $f(a + t\Delta x') - f(a) < 0$ при всех достаточно малых t.

Аналогично

$$f(a + t\Delta x'') - f(a) = \frac{t^2}{2} (A(\Delta x'') + o(1)) > 0$$

при всех достаточно малых t. Следовательно, в произвольной окрестности точки a приращения функции принимают как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому точка a не является точкой locextr функции f. Теорема доказана.

Для установления знакоопределенности квадратичной формы применяется критерий Сильвестра: квадратичная форма $A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$ положительны:

$$a_{11} > 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Очевидно, что квадратичная форма $A(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_i x_j$ положительно определена. Поэтому в силу свойств определителей критерий знакоотрицательности квадратичной формы имеет вид

$$-a_{11} > 0, \ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Отдельно рассмотрим случай функции 2–х переменных $f(x, y)$, где $f \in C^2(U(x_0, y_0))$. Матрица коэффициентов второго дифференциала $d^2 f$ в точке (x_0, y_0) будет следующей

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

($f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ поскольку они непрерывны).

Предположим, что (x_0, y_0) является стационарной точкой функции f и $|\Delta(x_0, y_0)| = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy})^2(x_0, y_0)$ — определитель матрицы $\Delta(x_0, y_0)$. Если $|\Delta(x_0, y_0)| > 0$, то точка (x_0, y_0) является точкой locetr функции $f(x, y)$. Действительно, в этом случае $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, ибо в противном имели бы, что $|\Delta(x_0, y_0)| < 0$.

Таким образом, если

$$|\Delta(x_0, y_0)| > 0 \text{ и } f''_{xx}(x_0, y_0) < 0,$$

то (x_0, y_0) — точка строго locmax;

если

$$|\Delta(x_0, y_0)| > 0 \text{ и } f''_{xx}(x_0, y_0) > 0,$$

то (x_0, y_0) — точка строго locmin.

Если $|\Delta(x_0, y_0)| < 0$, то точка (x_0, y_0) не является точкой locextr, ибо в этом случае квадратичная форма будет знакопеременной, что непосредственно проверяется. Действительно, пусть $A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ и $\Delta = ac - b^2 < 0$. Рассмотрим два случая: 1) $a^2 + c^2 \neq 0$ и 2) $a^2 + c^2 = 0$.

Первый случай. Пусть для определенности $a \neq 0$. Преобразуем $A(x, y)$, выделив полный квадрат:

$$A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2\right) =$$

$$a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + y^2\frac{ca - b^2}{a^2}\right) = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{y^2\Delta}{a^2}\right).$$

Поскольку $A(x, 0) = ax^2$, а $A(-(b/a)y, y) = (1/a)y^2\Delta$, то учитывая, что $\Delta < 0$, получаем знакопеременность квадратичной формы $A(x)$.

Второй случай. Так как $a = c = 0$, то $A(x, y) = 2bxy \Rightarrow A(x, x) = -A(x, -x)$, т.е. квадратичная форма знакопеременная.

Наконец, если $|\Delta(x_0, y_0)| = 0$, то в рассматриваемой стационарной точке locextr может как быть, так и отсутствовать. Это показывают следующие примеры:

1. Исследуем на экстремумы функцию $f(x, y) = x^3$. Найдем ее стационарные точки. Так как $f'_x(x, y) = 3x^2$, $f'_y(x, y) = (x^3)'_y = 0$, то стационарными будут точки вида $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Далее, $f''_{xx}(x, y) = 6x$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0$, $f''_{yy}(x, y) = 0 \Rightarrow |\Delta(0, y)| = 0$. Приращение функции $f(x, y)$ в стационарных точках $\Delta f(0, y) = f(\Delta x, y + \Delta y) - f(0, y) = (\Delta x)^3$. Оно знакопеременно в любой окрестности стационарных точек, следовательно, эти точки не являются точками locextr.

2. Функция $f(x, y) = x^4 + y^4$ имеет единственную стационарную точку $(0, 0)$, так как $f'_x(x, y) = 4x^3$, а $f'_y(x, y) = 4y^3$. Вторые частные производные $f''_{xx} = 12x^2$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx} = 0$, $f''_{yy}(x, y) = 12y^2$ обращаются в нуль в этой точке, а приращение в точке $(0, 0)$ равно $\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 \geq 0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ является точкой locmin.

ЛЕКЦИЯ 41

Неявная функция

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, а функция $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = \Phi(x, y)$ задана на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если функция $f(x)$: $D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, т.ч.

$$\forall x \in D: \ (x, f(x)) \in E \text{ и } \Phi(x, f(x)) = 0,$$

то функция f назывется *неявной функцией*, задаваемой уравнением $\Phi(x, y) = 0$.

Пусть $G = \{(x, y) |\ \Phi(x, y) = 0\}$ — множество решений уравнения $\Phi(x, y) = 0$. Если функция f задается неявно этим уравнением, то ее график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) |\ x \in D\}$ является подмножеством множества G. Предположим, что множество G корней (x, y) уравнения $\Phi(x, y) = 0$ совпадает с графиком некоторой функции g (в этом случае говорят, что уравнение $\Phi(x, y) = 0$ можно *однозначно* разрешить относительно переменной y). Это означает, что существует множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и функция g: $A \to \mathbb{R}$, т.ч. имеет место равенство $\{(x, y) |\ \Phi(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) |\ x \in A\}$. Поскольку рассматриваются только однозначные функции, то можно сказать, что $\Phi(x, y) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ множество A, т.ч. $\forall x \in A\ \exists!\ y = y(x)$ (это $y(x)$ и есть значение функции $g(x)$), т.ч. $(x, y(x)) \in E$ и $\Phi(x, y(x)) = 0$.

Как показывают простейшие примеры, рассчитывать на то, что все множество G является графиком некоторой функции не приходится.

Пример. Пусть $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$ задает окружность $x^2 + y^2 = 1$. Пусть $A \subset [-1, 1]$ — произвольное подмножество. Тогда

$$f_A(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in A; \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus A \end{cases}$$

будет неявной функцией, определенной на отрезке $[-1, 1]$ и задаваемой уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Таким образом, данному уравнению удовлетворяет бесконечно много различных функций. Если ограничиться рассмотрением только непрерывных на $[-1, 1]$ функций, то получим уже две функции $\pm\sqrt{1 - x^2}$, задаваемые уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Очевидно, что множество $\Phi(x, y) = 0$ не проектируется ортогонально и взаимно однозначно ни на одну из координатных осей, т.е. окружность не является графиком никакой функции.

Если же взять достаточно малую окрестность любой точки (x_0, y_0), лежащей на окружности, то точки окружности, попадающие в эту окрестность, можно будет взаимно однозначно спроектировать хотя бы на одну из осей. Таким образом, рассматриваемое уравнение можно однозначно разрешить относительно одной из переменных в достаточно малой окрестности любого нуля этого уравнения.

Распишем подробнее, что это значит. Пусть $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ и $\Phi(x_0, y_0) = 0$. Тогда $\exists$ прямоугольная окрестность $P(x_0, y_0) = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ $\exists!$ $y = y(x) \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ $(\Leftrightarrow\ (x, y(x)) \in P(x_0, y_0))$, т.ч. $\Phi(x, y(x)) = 0$. Другими словами, $\exists$ функция $y(x) : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \to (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, т.ч. $P(x_0, y_0) \cap \{(x, y) |\ \Phi(x, y) = 0\} = \{(x, y(x)) |\ x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\}$.

Приводимая ниже теорема о неявной функции описывает ситуацию, когда часть множества G, содержащаяся в некоторой окрестности точки, удовлетворяющей уравнению $\Phi(x, y) = 0$, является графиком некоторой непрерывной функции переменной x.

Теорема 1(о неявной функции). *Пусть*

1) $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$,

2) $\Phi \in C(O(x^{(0)}, y^{(0)}))$,

3) *частная производная* Φ'_y *существует в некоторой окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *и* $\Phi'_y \in C((x^{(0)}, y^{(0)}))$,

4) $\Phi'_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

Тогда $\exists U(x^{(0)})$ *и* $V(y^{(0)})$, *т.ч.* $U(x^{(0)}) \times V(y^{(0)}) \subset O((x^{(0)}, y^{(0)}))$ *и* $\forall x \in U(x^{(0)})$ $\exists!$ $y = y(x) \in V(y^{(0)})$, *т.ч.* $\Phi(x, y) = 0$. *При этом функция* $y(x)$ *непрерывна в* $U(x^{(0)})$ *и* $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты будем считать, что $x \in \mathbb{R}$. Пусть для определенности $\Phi'_y(x^{(0)}, y^{(0)}) > 0$.

Шаг 1. Так как $\Phi'_y \in C((x^{(0)}, y^{(0)}))$, то по лемме о знаке существует прямоугольник $P \equiv P(x^{(0)}, y^{0)}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x - x^{0)}| \leq s,\ |y - y^{(0)}| \leq t\} \subset O((x^{(0)}, y^{(0)}))$, $s > 0$, $t > 0$, т.ч. $\forall (x, y) \in P(x^{(0)}, y^{(0)})$: $\Phi'_y(x, y) > 0$.

Шаг 2. Поскольку $\Phi'_y > 0$ в P, то для каждого фиксированного $x \in (x^{(0)} - s, x^{(0)} + s)$ функция $\Phi(x, y)$ как функция переменной y строго возрастает. Так как $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ и $\Phi(x^{(0)}, y) \uparrow\uparrow$, то $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)} - t) < 0$, а $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)} + t) > 0$. Стало быть, и $\forall \varepsilon \in (0, t)$: $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)} - \varepsilon) < 0$, а $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)} + \varepsilon) > 0$.

Шаг 3. Так как функция $\Phi \in C(P)$, то $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$–окрестности точек $(x^{(0)}, y^{(0)} - \varepsilon)$ и $(x^{(0)}, y^{(0)} + \varepsilon)$, лежащие в P, в которых функция

$\Phi(x,y)$ имеет тот же знак, что и в точках $(x^{(0)}, y^{(0)} \pm \varepsilon)$. В частности, $\forall x \in (x^{(0)} - \delta, x^{(0)} + \delta)$: $\Phi(x, y^{(0)} - \varepsilon) < 0$ и $\Phi(x, y^{(0)} + \varepsilon) > 0$.

Шаг 4. Зафиксируем произвольное $x \in (x^{(0)} - \delta, x^{(0)} + \delta)$. Функция $\Phi(x,y) \uparrow\uparrow$ как функция переменной y, непрерывна на $[y^{(0)} - \varepsilon, y^{(0)} + \varepsilon]$ и принимает значения разных знаков на концах этого отрезка $\Rightarrow$ по теореме Больцано–Коши (см. лекцию 13) $\exists!\ y = y(x) \in (y^{(0)} - \varepsilon, y^{(0)} + \varepsilon)$ (единственность следует из строгой монотонности $\Phi(x,y)$ как функции переменной y), т.ч. $\Phi(x, y(x)) = 0$. Итак, на $(x^{(0)} - \delta, x^{(0)} + \delta)$ определена единственная функция, $y(x)$, т.ч. $\forall x \in (x^{(0)} - \delta, x^{(0)} + \delta)$: $\Phi(x, y(x)) = 0$.

Шаг 5. Проверим, что для $y(x)$ выполняются условия теоремы. Единственность доказана. Так как $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, то из единственности функции следует, что $y^{(0)} = y(x^{(0)})$. То, что $y(x) \in C(x^{(0)})$ следует из приведенных выше рассуждений, ибо $\forall \varepsilon \in (0,t)$ указано $\delta > 0$, т.ч. $\forall x \in U(x^{(0)}, \delta)$: $y(x) \in V(y^{(0)}, \varepsilon)$.

Покажем, что $y(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Для этого зафиксируем $\varepsilon_0 \in (0,t)$, например, положим $\varepsilon_0 = t/2$ и выберем δ_0 в соответствии с пунктом 3. Пусть $V(y^{(0)}) \doteq V(y^{(0)}, \varepsilon_0)$ и $U(x^{(0)}) \doteq U(x^{(0)}, \delta_0)$. Если $x^* \in U(x^{(0)})$ — произвольна, а $y^* = y(x^*) \in V(y^{(0)})$, т.е. $\Phi(x^*, y^*) = 0$, то точка (x^*, y^*) является внутренней точкой прямоугольника P. А это значит, что для точки (x^*, y^*) выполнены условия теоремы, использованные в пунктах 2-4. Следовательно, функция $y(x) \in C(x^*)$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы. Если, кроме того, частные производные* $\Phi'_{x_1},\ \Phi'_{x_2}, \ldots, \Phi'_{x_n}$ *существуют в некоторой окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *и*

$$\Phi'_{x_1},\ \Phi'_{x_2}, \ldots, \Phi'_{x_n} \in C((x^{(0)}, y^{(0)})),$$

то неявная функция $y(x) \in D(x^{(0)})$ *и*

$$y'_{x_1}(x^{(0)}) = -\frac{\Phi'_{x_1}(x^{(0)}, y^{(0)})}{\Phi'_y(x^{(0)}, y^{(0)})}, \ldots, y'_{x_n}(x^{(0)}) = -\frac{\Phi'_{x_n}(x^{(0)}, y^{(0)})}{\Phi'_y(x^{(0)}, y^{(0)})}.$$

Доказательство. Снова предполагаем, что $x \in \mathbb{R}$. Пусть $\Phi'_x \in C((x^{(0)}, y^{(0)}))$. Докажем дифференцируемость неявной функции $y(x)$ в точке $x^{(0)}$. В силу достаточного условия дифференцируемости функций многих переменных (теорема 4 лекции 34) $\Phi \in D((x^{(0)}, y^{(0)}))$. При $\Delta y = y(x^{(0)} + \Delta x) - y(x^{(0)})$ на основании определения функции $y(x)$:

$$\Phi(x^{(0)} + \Delta x, y^{(0)} + \Delta y) = \Phi(x^{(0)} + \Delta x, y(x^{(0)} + \Delta x)) = 0.$$

А так как и $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, то ввиду дифференцируемости функции $\Phi(x, y)$

$$0 = \Phi(x^{(0)} + \Delta x, y^{(0)} + \Delta y) - \Phi(x^{(0)}, y^{(0)}) =$$

$$\Phi'_x(x^{(0)}, y^{(0)})\Delta x + \Phi'_y(x^{(0)}, y^{(0)})\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\rho,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Поскольку

$$\frac{1}{2}(|\Delta x| + |\Delta y|) \le \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \le |\Delta x| + |\Delta y|,$$

то $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{\rho}{|\Delta x| + |\Delta y|} \le 1$ при $\Delta x^2 + \Delta y^2 \ne 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x, \Delta y)\rho = \alpha(\Delta x, \Delta y)\dfrac{\rho}{|\Delta x| + |\Delta y|}(|\Delta x|+|\Delta y|) = \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x+\gamma_2(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y$, где

$$\gamma_1(\Delta x, \Delta y) = \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\rho}{|\Delta x| + |\Delta y|}\mathrm{sgn}\Delta x,$$

$$\gamma_2(\Delta x, \Delta y) = \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\rho}{|\Delta x| + |\Delta y|}\mathrm{sgn}\Delta y$$

— бмф при $\rho \to 0$ как произведения бмф на ограниченные функции. Следовательно,

$$0 = (\Phi'_x + \gamma_1)\Delta x + (\Phi'_y + \gamma_2)\Delta y,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Phi'_x + \gamma_1}{\Phi'_y + \gamma_2}.$$

Учитывая, что $y(x) \in C(x^{(0)})$, т.е. что $\Delta y = y(x^{(0)}+\Delta x)-y(x^{(0)}) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, заключаем, что $\rho \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, γ_1, $\gamma_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому устремляя Δx к нулю, получаем, что $y' = -\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$. Теорема доказана.

Замечание. Если в дополнение к условиям теоремы потребовать, чтобы $\Phi \in C^1(O(x^{(0)}, y^{(0)}))$, то неявная функция $y(x)$ окажется непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и для ее частных производных будут иметь место формулы

$$y'_{x_1}(x) = -\frac{\Phi'_{x_1}(x, y(x))}{\Phi'_y(x, y(x))}, \ldots, y'_{x_n}(x) = -\frac{\Phi'_{x_n}(x, y(x))}{\Phi'_y(x, y(x))}.$$

Справедливость формул для частных производных неявной функции сразу следует из теоремы. А поскольку функция $y(x)$ непрерывна, то правые части этих формул непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ как композиции непрерывных функций. Стало быть, все частные производные неявной функции $y(x)$ непрерывны в этой окрестности.

Более того, из этих же формул и цепного правила следует k раз непрерывная дифференцируемость неявной функции, если $\Phi \in C^k(O(x^{(0)}, y^{(0)}))$.

Примеры.

1. Пусть функция $\Phi(x, y) = x - g(y)$ ($(x, y) \in O(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset \mathbb{R}^2$, где $g(y^{(0)}) = x^{(0)}$) удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Тогда $\exists$ окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ и существует единственная непрерывная в указанной окрестности $U(x^{(0)})$ функция $y(x)$, т.ч. $\forall x \in U(x^{(0)})$: $\Phi(x, y(x)) = x - g(y(x)) = 0 \Leftrightarrow g(y(x)) \equiv x$.

Далее, при доказательстве теоремы было показано, что функция $\Phi(x, y) = x - g(y)$ при каждом фиксированном $x \in U(x^{(0)})$ строго монотонна и непрерывна по переменной y на некотором отрезке $[y^{(0)} - \varepsilon, y^{(0)} + \varepsilon]$, что равносильно строгой монотонности и непрерывности функции $g(y)$ на нем. А это гарантирует обратимость $g(y)$ на этом отрезке и непрерывность обратной функции (впрочем, строгая монотонность сразу же следует из того, что $\Phi'_y(x, y) = -g'(y)$). Тогда с учетом вышесказанного это означает, что неявная функция $y(x)$ совпадает с обратной к $g(y)$ функцией.

2. Пусть дано уравнение

$$\Phi(x, y, z) = 0 \text{ причем } \Phi \in C^1((x_0, y_0, z_0)),\ \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$$

и функция Φ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Тогда для некоторых окрестностей $U((x_0, y_0))$ и $V(z_0)$:

$$U((x_0, y_0)) \times V(z_0) \cap \{(x, y, z) |\ \Phi(x, y, z) = 0\} =$$

$$\{(x, y, f(x, y)) |\ (x, y) \in U((x_0, y_0))\},$$

т.е. данное уравнение в цилиндрической окрестности $U((x_0, y_0)) \times V(z_0)$ точки (x_0, y_0, z_0) задает неявно поверхность $z = f(x, y)$. Напишем уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) к этой поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \text{ где } z_0 = f(x_0, y_0).$$

Так как $f'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{\Phi'_x(x_0, y_0, z_0)}{\Phi'_z(x_0, y_0, z_0)}$, $f'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{\Phi'_y(x_0, y_0, z_0)}{\Phi'_z(x_0, y_0, z_0)}$, то уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной неявно уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, примет вид

$$\Phi'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \Phi'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \Phi'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{grad}\Phi|_{(x_0, y_0, z_0)}$ перпендикулярен касательной плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0).

Определение 1. *Ненулевой вектор, перпендикулярный касательной плоскости (касательной прямой), проведенной к поверхности в точке* (x_0, y_0, z_0) *(к кривой в точке* (x_0, y_0)*), называется нормалью к поверхности (кривой) в этой точке.*

Таким образом, вектор $\mathrm{grad}\Phi(x_0, y_0, z_0)$ является вектором нормали к поверхности, заданной неявно уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0), т.ч. $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Пусть дана функция $\Psi(x, y, z)$ (или $\Psi(x, y)$). Множество точек (оно может быть пустым), в которых $\Psi(x, y, z) = c$ ($\Psi(x, y) = c$), где c некоторая постоянная, называется *поверхностью* (или *линией*) уровня функции Ψ. Если для функции $\Psi_1 = \Psi - c$ выполняются условия теоремы о неявной функции, то уравнение $\Psi(x, y, z) = c$ ($\Psi(x, y) = c$) в окрестности соответствующей точки действительно задает поверхность (соответственно кривую). При этом $\mathrm{grad}\Psi$ будет вектором нормали к поверхности (соответственно линии) уровня в рассматриваемой точке.

Неявные функции, заданные системой уравнений

Пусть дана система m уравнений от $n + m$ переменных:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \Phi_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = 0 \end{cases} \tag{16}$$

или, короче, $\Phi_j(x, y) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Возникает вопрос, когда множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, удовлетворяющих системе (16) (или часть этого множества, лежащая в некоторой окрестности), представимо в виде $\{(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)),\ x \in D\}$, где $f_j(x)$ некоторые функции. В этом случае говорят, что систему уравнений (16) можно разрешить относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ и, что функции $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ задаются неявно этой системой. Приведем без доказательства теорему о разрешимости системы уравнений.

Теорема 2(о неявном отображении). *Пусть:*
1) $\Phi_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $j = 1, \ldots, m$;
2) $\Phi_j \in C^1(O((x^{(0)}, y^{(0)})))$, $j = 1, \ldots, m$;

$$3)\ \left.\frac{D(\Phi_1 \ldots \Phi_m)}{D(y_1 \ldots y_m)}\right|_{(x^{(0)},y^{(0)})} = \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_m} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\right|_{(x^{(0)},y^{(0)})} \neq 0.$$

Тогда

1) *существуют окрестности* $U(x^{(0)}) \subset \mathbb{R}^n$ *и* $V(y^{(0)}) \subset \mathbb{R}^m$, *т.ч.* $U(x^{(0)}) \times V(y^{(0)}) \subset O((x^{(0)}, y^{(0)}))$ *и* $\forall x \in U(x^{(0)})\ \exists! y = y(x) \in V(y^{(0)})$, *для которых* $\Phi_j(x, y(x)) = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

2) *это отображение* $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))$ *таково, что* $y_j(x) \in C^1(U(x^{(0)}))$ *и* $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$.

Матрица $(\partial \Phi_j / \partial y_k)|_{j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots m}$ называется *матрицей Якоби* системы функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ по переменным $y_1, \ldots, y_m$, а ее определитель — *якобианом.*

Итак, если выполнены условия теоремы, то неявные функции, определяемые данной системой уравнений, непрерывно дифференцируемы. Естественно возникает вопрос, как найти частные производные этих функций? Поскольку $\forall x \in U(x^{(0)})$ (здесь неявные функции обозначены через $f_j(x_1, \ldots, x_n)$)

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = & 0 \end{cases}$$

то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_l} = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_l} = & 0. \end{cases}$$

Так как определитель полученной системы линейных уравнений $\dfrac{D(\Phi_1 \ldots \Phi_m)}{D(y_1 \ldots y_m)} \neq 0$, то из нее однозначно определяются $\partial f_j / \partial x_l$ ($j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$).

ЛЕКЦИЯ 42

Предел и непрерывность вектор–функций

Перейдем к более подробному изучению отображений $E \to \mathbb{R}^m$, где $m \geq 2$ и множество $E \subset \mathbb{R}^n$, а $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ рассматриваются как нормированные пространства. Для таких отображений будем использовать векторные обозначения, например, $\bar{f}\colon E \to \mathbb{R}^m$, и станем называть их *вектор–функциями*, чтобы отличать от скалярных функций (т.е. функций, принимающих числовые значения).

В лекции 35 рассматривался предел и непрерывность указанных отображений. В частности, было показано, что если $\bar{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, a — точка прикосновения множества E, то справедливы утверждения

$$\lim_{x\to a} \bar{f}(x) = \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \forall j = 1, \ldots, m\; \exists \lim_{x\to a} f_j(x) = b_j,$$

$$\lim_{x\to a} \bar{f}(x) = \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{f}(x) = \bar{b} + \bar{\alpha}(x),\; \lim_{x\to a} \bar{\alpha}(x) = \bar{0}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\lim_{x\to a} \bar{f}(x) = \bar{b}$, $\lim_{x\to a} \bar{g}(x) = \bar{d}$, $\lim_{x\to a} \psi(x) = \lambda$, $\bar{f}, \bar{g} : E \to \mathbb{R}^m$, $\psi : E \to \mathbb{R}$, $\bar{b}, \bar{d} \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1) $\lim_{x\to a} |\bar{f}(x)| = |\bar{b}|$,
2) $\lim_{x\to a} \psi(x)\bar{f}(x) = \lambda\bar{b}$,
3) $\lim_{x\to a} \bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{b}\bar{d}$,
4) $\lim_{x\to a} \bar{f}(x) \times \bar{g}(x) = \bar{b} \times \bar{d}$, $m = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. После записи этих утверждений через координатные функции видно, что их справедливость следует из свойств предела функций многих переменных.

Следствие. *Пусть* $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$, $\psi \in C(a)$. *Тогда* $|\bar{f}(x)|$, $\psi(x)\bar{f}(x)$, $\bar{f}(x)\bar{g}(x)$, $\bar{f}(x) \times \bar{g}(x) \in C(a)$.

Доказательство сразу следует из теоремы и определения непрерывности.

Производная и дифференциал вектор–функции одной переменной

Рассмотрим сначала вектор–функции одной переменной. Пусть $\bar{f}(t)$ задана в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, $a \in \mathbb{R}$ и принимает значения в $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. *Предел* $\lim_{t\to a}(\bar f(t)-\bar f(a))/(t-a)$, *если он существует, называется производной вектор–функции в точке* a *и обозначается* $\bar f'(a)$ *или* $\dot{\bar f}(a)$.

Так как

$$\frac{\bar f(t)-\bar f(a)}{t-a}=\left(\frac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a},\ldots,\frac{f_m(t)-f_m(a)}{t-a}\right),$$

то существование $\bar f'(a)$ равносильно существованию производных $f_1'(a),\ldots,f_m'(a)$ координатных функций и при этом $\bar f'(a)=(f_1'(a),\ldots,f_m'(a))$.

Определение 2. *Через* $\bar o(\beta(t))$ *при* $t\to a$, *где функция* $\beta(t)\colon U(a)\to\mathbb{R}$, *обозначается множество всех вектор–функций, имеющих вид* $\bar\gamma(t)\beta(t)$, *где в качестве* $\bar\gamma(t)$ *берутся всевозможные вектор–функции, определенные в* $U(a)$ *и такие, что* $\lim_{t\to a}\bar\gamma(t)=\bar 0$.

Символом $\bar o(\beta(t))$ $(t\to a)$ также будем обозначать элементы этого множества.

Определение 3. *Вектор–функция* $\bar f(t)$ *дифференцируема в точке* a $(\bar f\in D(a))$, *если*

$$\exists\bar b\in\mathbb{R}^m,\ \text{т.ч. } \Delta\bar f(a)=\bar f(a+\Delta t)-\bar f(a)=\bar b\Delta t+\bar o(\Delta t)\ \text{при } \Delta t\to 0.$$

Линейная вектор–функция $\bar b\Delta t$ аргумента Δt называется *дифференциалом* функции $\bar f(t)$ в точке a и обозначается $d\bar f(a,\Delta t)$, $d\bar f|_{t=a}$, т.е. $d\bar f(a,\Delta t)=\bar b\Delta t$. По аналогии со скалярным случаем вместо Δt обычно пишут dt.

Очевидно, что условие

$$\Delta\bar f(a)=\bar f(a+\Delta t)-\bar f(a)=\bar b\Delta t+\bar o(\Delta t)$$

равносильно тому, что приращения координатных функций

$$\Delta f_j(a)=b_j\Delta t+o(\Delta t),\ \bar b=(b_1,\ldots,b_m),$$

т.е.

$$\bar f\in D(a)\Leftrightarrow \text{ все координатные функции } f_j\in D(a),\ j=1,\ldots,m.$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*
1) $\bar f\in D(a)\Leftrightarrow\exists\bar f'(a)$ и $\bar f'(a)=\bar b$;
2) $\bar f\in D(a)\Rightarrow\bar f\in C(a)$;

3) *если* $\bar f \in D(a)$, $t(s) \in D(s_0)$, где $t\colon V(s_0) \to \mathbb{R}$ и $a = t(s_0)$, то $\bar f(t(s)) \in D(s_0)$ и $(\bar f(t(s)))'|_{s=s_0} = \bar f'(a)t'(s_0)$.

Доказательство. Переходя к координатным функциям видим, что утверждения теоремы следуют из свойств скалярных дифференцируемых функций (см. лекции 16 и 17).

Теорема 3. *Если* $\exists \bar f_1'(a)$, $\bar f_2'(a)$, $\psi'(a)$ *(ψ скалярная функция), то*

1) $(\bar f_1 + \bar f_2)' = \bar f_1' + \bar f_2'$;
2) $(\bar f_1 \cdot \bar f_2)' = \bar f_1' \cdot \bar f_2 + \bar f_1 \cdot \bar f_2'$;
3) $(\bar f_1 \times \bar f_2)' = \bar f_1' \times \bar f_2 + \bar f_1 \times \bar f_2'$, $m = 3$;
4) $(\psi \bar f_1)' = \psi' \bar f_1 + \psi \bar f_1'$

(значения всех функций и их производных берутся в точке a).

Доказательство. Утверждения теоремы 3 можно получить после перехода к координатным функциям непосредственно из свойств дифференцируемых функций одной переменной.

В заключение приведем аналог формулы Лагранжа для приращения вектор–функций.

Теорема 4. *Если* $\bar f \in C[a,b] \bigcap D(a,b)$, *то найдется точка* $c \in (a,b)$ *такая, что*

$$|\bar f(b) - \bar f(a)| \le |\bar f'(c)|(b-a).$$

Доказательство. Если $\bar f(a) = \bar f(b)$, то справедливость неравенства очевидна. Пусть $\bar f(a) \ne \bar f(b)$. Положим $\bar r = \bar f(b) - \bar f(a)$ и рассмотрим числовую функцию $\psi(t) = \bar r \cdot \bar f(t)$. Для нее выполнены все условия теоремы Лагранжа $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$, т.ч.

$$\psi(b) - \psi(a) = \psi'(c)(b-a) = \bar r \cdot \bar f'(c)(b-a) = \bar f'(c)(\bar f(b) - \bar f(a))(b-a).$$

Поскольку $\psi(b) - \psi(a) = \bar r \cdot (\bar f(b) - \bar f(a)) = |\bar f(b) - \bar f(a)|^2$, то

$$|\bar f(b) - \bar f(a)|^2 = \bar f'(c) \cdot (\bar f(b) - \bar f(a))(b-a).$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского

$$\bar f'(c) \cdot (\bar f(b) - \bar f(a)) \le |\bar f'(c)||\bar f(b) - \bar f(a)|,$$

получаем неравенство

$$|\bar f(b) - \bar f(a)|^2 \le |\bar f'(c)||\bar f(b) - \bar f(a)|(b-a),$$

Так как $\bar f(a) \ne \bar f(b)$, то

$$|\bar f(b) - \bar f(a)| \le |\bar f'(c)|(b-a).$$

Теорема доказана.

Замечание. В отличие от скалярного случая, формула конечных приращений для вектор–функций записывается в виде неравенства. Как показывает следующий пример, эта формула для вектор–функций не может быть записана в виде равенства. У функции $\bar{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ приращение на отрезке $[0, 2\pi]$ — нулевой вектор, а ее производная $\bar{f}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ нигде в нуль не обращается, т.к. $|\bar{f}'(t)| = 1$.

Дифференцируемость вектор–функций многих переменных

Рассмотрим теперь вектор–функции от n переменных: $\bar{f} = \bar{f}(x) = \bar{f}(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\bar{f}$: $U(a) \to \mathbb{R}^m$, $U(a) \subset \mathbb{R}^n$ (здесь и $\mathbb{R}^n$, и $\mathbb{R}^m$ рассматриваются как векторные нормированные пространства).

Определение 4. *Вектор–функция $\bar{f}(x)$ дифференцируема в точке a ($\bar{f} \in D(a)$), если $\exists \bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_n \in \mathbb{R}^m$, т.ч.*

$$\Delta\bar{f}(a) = \bar{f}(a + \Delta x) - \bar{f}(a) = \bar{B}_1\Delta x_1 + \cdots \bar{B}_n\Delta x_n + \bar{o}(\rho), \tag{17}$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots \Delta x_n^2} = |\Delta x| \to 0.$$

Пусть $\bar{B}_j = (b_{1j}, \ldots, b_{mj})$. Тогда если ввести матрицу $B = \|b_{ij}\|_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$, по столбцам которой стоят координаты векторов $\bar{B}_j$, то правая часть (17)

$$\bar{B}_1\Delta x_1 + \cdots + \bar{B}_n\Delta x_n =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \Delta x_1 + \begin{pmatrix} b_{12} \\ \ldots \\ b_{m2} \end{pmatrix} \Delta x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \ldots. \\ b_{mn} \end{pmatrix} \Delta x_n =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}\Delta x_1 + b_{12}\Delta x_2 + \ldots + b_{1n}\Delta x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}\Delta x_1 + b_{m2}\Delta x_2 + \ldots + b_{mn}\Delta x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \ldots. \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = B\Delta x.$$

Дифференциалом дифференцируемой вектор–функции $\bar{f}$ в точке a называется линейное отображение $B\Delta x$: $d\bar{f}(a, \Delta x) \doteq B\Delta x$.

Поскольку

$$\bar{o}(\rho) = \bar{\gamma}(\Delta x)|\Delta x| = (\gamma_1(\Delta x)|\Delta x|, \ldots, \gamma_m(\Delta x)|\Delta x|) = (o(\rho), \ldots, o(\rho)),$$

то записывая (17) через координатные функции, видим, что

$$\Delta \bar{f}(a) = (\Delta f_1(a), \ldots, \Delta f_m(a)) =$$

$$(b_{11}\Delta x_1 + \ldots + b_{1n}\Delta x_n + o(\rho), \ldots, b_{m1}\Delta x_1 + \ldots + b_{mn}\Delta x_n + o(\rho)), \quad (18)$$

т.е. $\bar{f} \in D(a)$ тогда и только тогда, когда все координатные функции $f_i \in D(a)$, $i = 1, \ldots, m$.

Далее, из (18) следует (см. следствие теоремы 2 из лекции 37), что $b_{ij} = \dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$, а

$$\bar{B}_j = \left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_j} \right).$$

Таким образом, введенная матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и называется *матрицей Якоби* отображения $\bar{f}$ (или системы функций $f_1, \ldots, f_m$). Матрицу Якоби отображения $\bar{f}$ обозначают $J_{\bar{f}}$.

Замечание. Определение дифференцируемости вектор–функции можно записать в "бескоординатной" форме:

$$\bar{f} \in D(a) \;\Leftrightarrow\; \exists \text{линейный оператор } \mathcal{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \text{ т.ч.}$$

$$\bar{f}(a + \Delta x) - \bar{f}(a) = \mathcal{B}\Delta x + \bar{o}(|\Delta x|), \ |\Delta x| \to 0.$$

Очевидно, что если $\bar{f} \in D(a)$, то $\bar{f} \in C(a)$.

Введем производную вектор–функции $\bar{f}$ в точке a по направлению ω ($t \in \mathbb{R}$).

Определение 5. *Предел*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\bar{f}(a + t\omega) - \bar{f}(a)}{t},$$

если он существует, называется производной вектор–функции $\bar{f}$ в точке a по направлению ω и обозначается через $\bar{f}'_\omega(a)$

Частной производной $\bar{f}'_i(a)$ вектор–функции $\bar{f}$ в точке a по i–й переменной называется производная по направлению $\omega = e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots 0)$ (единица стоит на i–м месте). Если положить $t = \Delta x_i$, то

$$\bar{f}'_i(a) = \bar{f}'_{x_i}(a) \doteq \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\bar{f}(a+\Delta x_i e_i) - \bar{f}(a)}{\Delta x_i}.$$

В координатах существование $\bar{f}'_{x_i}(a)$ равносильно существованию в точке a частных производных $\partial f_1/\partial x_i, \dots, \partial f_m/\partial x_i$ всех координатных функций. При этом

$$\bar{f}'_{x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_i}\right).$$

Следовательно, исходя из вышесказанного можно сделать следующее заключение:

если $\bar{f} \in D(a)$, то в точке a у вектор–функции $\bar{f}$ существуют все частные производные и $\bar{B}_1 = \bar{f}'_1(a), \dots, \bar{B}_n = \bar{f}'_n(a)$, т.е.

$$\Delta \bar{f}(a) = \bar{f}'_1(a)\Delta x_1 + \ldots + \bar{f}'_n(a)\Delta x_n + \bar{o}(\rho).$$

Как и в скалярном случае, доказывается, что если $\bar{f} \in D(a)$, то для произвольного направления $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ $\exists$ $\bar{f}'_\omega(a) = \omega_1 \bar{B}_1 + \ldots + \omega_n \bar{B}_n = \omega_1 \bar{f}'_1(a) + \ldots + \omega_n \bar{f}'_n(a)$.

ЛЕКЦИЯ 43

Пусть $\bar{f}$: $E \to \mathbb{R}^m$, E открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Вектор–функция $\bar{f}$ называется дифференцируемой на множестве E ($\bar{f} \in D(E)$), если $\bar{f}$ дифференцируема в каждой точке множества E.*

Как было отмечено в предыдущей лекции, дифференцируемость вектор–функции в точке эквивалентна дифференцируемости в этой точке ее координатных функций. Поэтому вектор–функцию $\bar{f}$ дифференцируема на множестве E тогда и только тогда, когда все координатные функции f_i, $i = 1, \dots, m$, дифференцируемы на E.

Определение 2. *Вектор–функцию $\bar{f}$ называется непрерывно дифференцируемой на множестве E ($\bar{f} \in C^1(E)$), если все ее частные производные $\bar{f}'_{x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) непрерывны на E.*

Непрерывность $\bar{f}'_{x_j}$ равносильна непрерывности ее координатных функций, т.е. частных производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$. Поэтому $\bar{f} \in C^1(E)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ непрерывны на E, что в свою очередь эквивалентно тому, что координатные функции $f_i \in C^1(E)$, $i = 1 \dots, m$.

Матрицы Якоби и их свойства

Ниже нам понадобится матрица Якоби тождественного отображения $\bar{id}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Поскольку $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\bar{id}(x) = x$, то координатные функции $id_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x_j} id_i = 1$, если $j = i$, и $\dfrac{\partial}{\partial x_j} id_i = 0$, если $j \neq i$. Следовательно, матрицей Якоби тождественного отображения будет единичная матрица.

Пусть $\bar{f}$: $E \to G$, $\bar{g}$: $G \to \mathbb{R}^k$, где E открыто в $\mathbb{R}^n$, а G открыто в $\mathbb{R}^m$ и $\bar{f} \in D(E)$ $\bar{g} \in D(G)$. Тогда имеет смысл композиция $\bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f}$: $E \to \mathbb{R}^k$, где

$$\bar{h}(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x)), \text{ а } h_i(x) = g_i(\bar{f}(x)) = g_i(f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

По теореме о дифференцировании композиции функции $h_i \in D(E)$, следовательно, вектор–функция $\bar{h} \in D(E)$.

Найдем матрицу Якоби композиции. В силу цепного правила

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_j},\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Равенства (19) означают, что матрица Якоби $J_{\bar{g}\circ\bar{f}}$ композиции равна произведению матриц Якоби $J_{\bar{g}}$ и $J_{\bar{f}}$:

$$J_{\bar{g}\circ\bar{f}} = J_{\bar{g}} J_{\bar{f}}.$$

Если $n = m = k$, то матрицы Якоби будут квадратными, и можно говорить об определителях этих матриц, которые называются *якобианами.* По свойствам определителей $|J_{\bar{g}} J_{\bar{f}}| = |J_{\bar{g}}||J_{\bar{f}}|$, поэтому

$$|J_{\bar{g}\circ\bar{f}}| = |J_{\bar{g}}||J_{\bar{f}}|.$$

Если у вектор–функции $\bar{f}$ существует обратное дифференцируемое отображение $\bar{f}^{-1}$, то $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(x)) = x$ и $\bar{f}(\bar{f}^{-1}(y)) = y$. Как было отмечено выше матрицей Якоби тождественного отображения $x \to x$ служит единичная матрица E. Поэтому

$$E = J_{\bar{f}^{-1}\circ\bar{f}} = J_{\bar{f}^{-1}} J_{\bar{f}} \text{ и } E = J_{\bar{f}\circ\bar{f}^{-1}} = J_{\bar{f}} J_{\bar{f}^{-1}}.$$

Значит,

$$J_{\bar{f}^{-1}} = J_{\bar{f}}^{-1},$$

т.е. матрицей Якоби обратного отображения будет матрица, обратная к матрице Якоби исходного отображения и

$$|J_{\bar{f}^{-1}}| = \frac{1}{|J_{\bar{f}}|}.$$

Для дифференцируемых функций одной переменной имеется простое достаточное условие их обратимости на интервале: положительность или отрицательность производной. Аналогом этого утверждения для функций многих переменных служит приводимая ниже теорема. Однако в ней идет речь о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения, т.е. об обратимости лишь в некоторой окрестности данной точки. Приведем эту утверждение и его следствия без доказательств.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{f}\colon E \to \mathbb{R}^n$, E *— открытое в* $\mathbb{R}^n$ *множество,* $\bar{f} \in C^1(E)$ *и* $a \in E$. *Если* $|J_{\bar{f}}| \neq 0$ *в точке* a, *то существует окрестность* $U(a)$ *точки* a, *т.ч.*

1) $\bar{f}\colon U(a) \to \bar{f}(U(a))$ *является биекцией,*

2) *множество* $V \doteq \bar{f}(U(a))$ *является открытым линейно связным множеством в* $\mathbb{R}^n$, *т.е. областью,*

3) *обратное отображение* $\bar{f}^{-1} \in C^1(V)$.

Следствие 1. *Непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом, отличным от нуля, переводит открытые множества в открытые.*

Следствие 2. *Образом области (открытого и линейно связного множества) при непрерывно дифференцируемом отображении с якобианом, отличным от нуля, является область.*

Пример. Рассмотрим отображение $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ в области $r > 0$, $\psi \in \mathbb{R}$. Якобиан этого отображения

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\psi & y'_\psi \end{vmatrix} = r\cos^2\psi + r\sin^2\psi = r \neq 0$$

всюду в рассматриваемой области, но отображение не является взаимно однозначным, так как при фиксированных r и ψ точки $(r, \psi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ отображаются в одну и ту же точку с координатами $(r\cos\psi, r\sin\psi)$. Таким образом, отличие от нуля якобиана отображения не гарантирует существования обратного отображения.

Условный экстремум

Изложим без доказательств теорию условного экстремума.

Пусть задано m уравнений ($m < n$):

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

где $f_i\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$. Уравнения, входящие в систему (20), будем называть *уравнениями связи.* Обозначим через D множество решений этой системы. Очевидно, что $D \subset E$.

Пусть дана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Определение 3. *Точка* $a \in D$ *называется точкой условного экстремума функции* f *при выполнении уравнений связи (20), если эта точка является точкой локального экстремума функции* f *на множестве* D.

Для отыскания точек условного экстремума применяется метод множителей Лагранжа. Он основывается на приводимом ниже утверждении. Будем считать, что $f,\ f_1,\ldots,f_m \in C^1(U(a))$.

Теорема 2. *Пусть a — точка условного экстремума функции f при выполнении уравнений связи (20) и $\mathrm{grad} f_1(a),\ldots,\mathrm{grad} f_m(a)$ линейно независимы. Тогда найдутся числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, не все равные нулю, т.ч.*

$$\mathrm{grad} f(a)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \mathrm{grad} f_j(a)=0,$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial f_j(a)}{\partial x_k}=0,\ k=1,\ldots,n.$$

Введем функцию, называемую *функцией Лагранжа*,

$$L(x,\lambda)\doteq f(x)+\lambda_1 f_1(x)+\ldots+\lambda_m f_m(x)$$

(числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ называются *множителями Лагранжа*). Очевидно, что на множестве D функции f и $L(x,\lambda)$ совпадают при любом выборе множителей Лагранжа. Следовательно, на D совпадают и точки локальных экстремумов этих функций.

Если a — точка условного экстремума функции f при выполнении уравнений связи (20) (что равносильно тому, что a — точка условного экстремума функции Лагранжа $L(x,\lambda)$), то согласно приведенной теореме можно указать такой набор $\lambda_1(a),\ldots,\lambda_m(a)$ множителей Лагранжа, что $dL(x,\lambda)|_{x=a,\ \lambda=\lambda(a)}=0$, т.е. при подходящем выборе множителей Лагранжа точка условного экстремума функции Лагранжа будет ее стационарной точкой.

Из вышесказанного следует, что точки условного экстремума функции f удовлетворяют системе из $n+m$ уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_k}=0, & k=1,\ldots,n\\ f_j(x)=0, & j=1,\ldots,m,\end{cases}$$

от $n+m$ неизвестных $x_1,\ldots,x_n$ и $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Но, вообще говоря, не все решения этой системы будут точками условного экстремума рассматриваемой функции. Поэтому после решения полученной системы требуется выяснить, в каких критических точках функции

Лагранжа будут условные экстремумы функции f. Можно доказать, что если $f,\ f_i \in C^2(U(a))$, где $a \in D$ — стационарная точка функции Лагранжа, а квадратичная форма

$$d^2L(a, \lambda(a)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L''_{ij}dx_i dx_j$$

положительно определена при условии, что $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны уравнениями

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n}dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n}dx_n = 0, \end{cases}$$

то a — точка строго условного минимума; если $d^2L(a, \lambda)$ отрицательно определенная квадратичная форма при условии, что $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны указанными соотношениями, то a — точка строго условного максимума.

Пример. Методом множителей Лагранжа исследуем на экстремумы функцию $f(x, y) = xy$, если $x^2 + y^2 = 1$. Составляем функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ и выписываем систему уравнений для нахождения ее стационарных точек, удовлетворяющих уравнению связи:

$$\begin{cases} y + 2\lambda x &= 0 \\ x + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y = -2\lambda x$ подставляем во второе:

$$x - 4\lambda^2 x = 0.$$

Тогда либо $x = 0$, но в этом случае $y = 0$ и полученная точка не удовлетворяет уравнению связи, либо $\lambda^2 = 1/4 \Rightarrow \lambda$ принимает значения $1/2$ или $-1/2$. Пусть $\lambda = -1/2 \Rightarrow y = x$, а из уравнения связи $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Нам остается выяснить, будут ли точки $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ точками условного экстремума данной функции. Для этого изучим

$$d^2L(x, y, -1/2) = 2dxdy - dx^2 - dy^2$$

при условии, что dx и dy связаны уравнением $xdx + ydy = 0$, где $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$. Из уравнений связи следует, что

$$dy = -dx \Rightarrow d^2L(x, y, -1/2) = -4dx^2$$

отрицательно определенная квадратичная форма, значит, исследуемые точки являются точками условного максимума функция $f(x, y) = xy$.

Случай $\lambda = 1/2$ рассматривается аналогично. В результате получим, что точки $y = -x = \pm 1/\sqrt{2}$ будут точками условного минимума функции $f(x, y) = xy$.

ЛЕКЦИЯ 44

Числовые ряды

Вновь вернемся к изучению сходимости числовых последовательностей. Пусть дана последовательность $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$, $a_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Образуем новую последовательность

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots .$$

Определение 1. *Рядом с членами* a_k $(k = 1, 2\ldots)$ *называется последовательность* $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$. *Члены последовательности* $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$ *называются частичными суммами ряда.*

Для ряда используется следующие обозначения

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Иногда бывает удобнее вести нумерацию членов ряда ряда с нуля или какого-то целого N: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, $\sum_{l=N}^{+\infty} a_l$.

Определение 2. *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *называется сходящимся, если существует конечный предел* $\lim_{n\to+\infty} S_n$; *в противном случае говорят, что ряд расходится.*

Определение 3. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится, то величина* $S \doteq \lim_{n\to+\infty} S_n$ *называется суммой ряда и при этом пишут* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S$.

Таким образом, символом $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ обозначается как сам ряд, так и его сумма, если ряд сходится.

Замечание. Любую последовательность $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ можно рассматривать как ряд с членами $\beta_1 = b_1$, $\beta_2 = b_2 - b_1, \ldots$, $\beta_k = b_k - b_{k-1}, \ldots$. Действительно,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k = b_1 + b_2 - b_1 + \ldots + b_n - b_{n-1} = b_n.$$

Ограничимся рассмотрением рядов с действительными членами.

Дальнейшая цель заключается в том, чтобы найти условия на последовательность (a_k), из которых следовала бы сходимость последовательности (S_n).

Теорема 1(необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится, то его общий член стремится к нулю:* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$S_n = a_1 + \ldots a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \;\Rightarrow\; a_n = S_n - S_{n-1},\; n = 2, 3, \ldots.$$

Тогда в силу свойств предела

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0.$$

Как показывают следующие примеры, стремление к нулю общего члена ряда не влечет сходимость ряда.

1. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Имеем

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, т.е. ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ расходится, хотя $\lim_{k\to+\infty} 1/\sqrt{k} = 0$.

2. Общий член гармонического ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ стремится к нулю, но ряд расходится, ибо последовательност $S_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ не является сходящейся (см. соответствующий пример из лекции 8).

Переформулируем для рядов некоторые известные свойства числовых последовательностей.

Теорема 2(линейность суммы ряда). *Пусть ряды $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходятся и $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S'$, $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = S''$.*

Тогда $\forall\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda\sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \mu\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \lambda S' + \mu S''.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$S_n \doteq \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k + \sum_{k=1}^{n} \mu b_k =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k = \lambda S'_n + \mu S''_n,$$

где S'_n и S''_n — частичные суммы n-го порядка первого и второго рядов сответственно. По свойству линейности предела последовательностей

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (\lambda S'_n + \mu S''_n) =$$

$$= \lambda \lim_{n\to+\infty} S'_n + \mu \lim_{n\to+\infty} S''_n = \lambda S' + \mu S''.$$

Теорема доказана.

Теорема 3(критерий Коши сходимости ряда). *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n > n_\varepsilon$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$*:*

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению сходимость ряда означает сходимость последовательности (S_n) частичных сумм ряда, что равносильно тому, что последовательность (S_n) является последовательностью Коши (теорема 1 лекции 8), т.е. что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N}$: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Так как $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}|$, то теорема доказана.

Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+k}$$

называется n–м *остатком* (*остатком порядка* n) *ряда* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ (n–й остаток можно также записать как $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$).

Известно (см. лекцию 6), что любое конечное число первых членов последовательности не влияет на ее сходимость или расходимость. А как скажется на сходимости (расходимости) ряда отбрасывание конечного числа его первых членов?

Лемма. *Ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ *и его произвольный остаток* $a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_0+m} + \ldots$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через (S_l) последовательность частичных сумм данного ряда. Тогда для m–й частичной суммы остатка порядка n_0 имеем

$$S_m^*(n_0) \doteq \sum_{k=n_0+1}^{n_0+m} a_k = a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+m} = S_{n_0+m} - S_{n_0}.$$

Так как члены последовательностей $(S_m^*(n_0))$ и (S_{n_0+m}) отличаются на постоянную, равную S_{n_0}, то последовательность $(S_m^*(n_0))_{m=1}^{+\infty}$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) последовательность частичных сумм $(S_{n_0+m})_{m=1}^{+\infty} = (S_{n_0+1}, S_{n_0+2}, \ldots)$ исходного ряда, что в свою очередь равносильно сходимости (расходимости) последовательности (S_n). Лемма доказана.

Пусть сходится ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ или, что равносильно, сходится его n–й остаток. Обозначим через r_n сумму n–го остатка, т.е. $r_n \doteq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Тогда

$$r_n = \lim_{m\to+\infty} S_m^*(n) = \lim_{m\to+\infty} (S_{n+m} - S_n) = S - S_n,$$

т.е. для суммы n–го остатка имеет место формула $r_n = S - S_n$, где $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Примеры.

1. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$. Так как $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, то

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$. Значит, рассматриваемый ряд сходится и $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$.

2. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$. При $|q| \geq 1$ ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. Пусть $0 < |q| < 1$ и $S_n = 1 + q + \ldots + q^n$. Заметим, что

$$qS_n = q + \ldots + q^n + q^{n+1} = 1 + q + \ldots + q^n - 1 + q^{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}.$$

Значит, $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Поскольку $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$, то в силу арифметических свойств предела $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$. Следовательно, при $0 < |q| < 1$ ряд сходится и $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

Знакопостоянные ряды

Для определенности будем рассматривать ряды с неотрицательными членами:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \quad a_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку сходимость (расходимость) ряда равносильна сходимости (расходимости) любого его остатка, то в приводимых далее утверждениях можно считать, что все условия выполняются, начиная с некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$.

Теорема 4(критерий сходимости ряда с неотрицательными членами). *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм* (S_n) *ограничена сверху.*

Доказательство. Так как $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ и $a_n \geq 0$, то $S_n \uparrow$. Возрастающая последовательность сходится (теорема 4 лекция 7) в том и только том случае, когда она ограничена сверху. Теорема доказана.

Теорема 5(признак сравнения). *Пусть* $0 \leq a_k \leq b_k$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

1) *если ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *сходится, то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *также сходится;*

2) *если ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится, то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *также расходится.*

Доказательство. По условию

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n''.$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится, то согласно теореме 4 $\exists C > 0$, т.ч. $\forall n \in \mathbb{N}$: $S_n'' \leq C \Rightarrow$ и $S_n' \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу той же теоремы 4 ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится .

Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится, то последовательность(S_n') не ограничена сверху, поэтому из неравенства $S_n' \leq S_n''$ будет следовать не ограниченность сверху последовательности (S_n''), следовательно, по теореме 4 ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ расходится.

Следствие. *Пусть* $\forall k \in \mathbb{N}$: a_k, $b_k > 0$ *и*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *сходится, то сходится ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$*. Если ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится, то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *также расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_1},$$

$$\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{k+1}}{b_1}.$$

Следовательно, в силу условий следствия $\dfrac{a_{k+1}}{a_1} \le \dfrac{b_{k+1}}{b_1}$, т.е. $a_{k+1} \le b_{k+1}\dfrac{a_1}{b_1}$.

Так как при $\lambda \ne 0$ ряды $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda u_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ сходятся или расходятся одновременно (это вытекает, например, из критерия Коши сходимости ряда), то утверждения следствия следуют из признака сравнения, примененного к рядам $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k+1}\dfrac{a_1}{b_1}$.

Применение признака сравнения и его следствия, когда в качестве ряда, с которым ведется сравнение, выступает геометрическая прогрессия, приводит к признакам сходимости Коши и Даламбера соответственно.

Теорема 6(признак Даламбера). *Пусть* $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. *Если* $\forall k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le \lambda < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится. Если* $\forall k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первом случае введем последовательность $b_k = \lambda^k$. Тогда $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le \lambda = \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k$ сходится, то, применяя следствие из теоремы 5, получаем первое утверждение теоремы.

Во втором случае $a_{k+1} \ge a_k \ \forall k \Rightarrow a_k \ge a_1 > 0 \ \forall k \Rightarrow$ ряд расходится, так как a_k не стремятся к нулю.

Следствие. *Пусть* $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *и* $\exists \lim_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \lambda$.

Тогда

1) *при* $\lambda < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) *при* $\lambda > 1$ *или* $\lambda = +\infty$ *ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится;*

3) *при* $\lambda = 1$ *ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda < 1 \Rightarrow$ число $\varepsilon_0 \doteq \dfrac{1-\lambda}{2} > 0$. По определению предела для ε_0 $\exists k_0$, т.ч. $\forall k > k_0$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \lambda + \varepsilon_0 = \lambda + \frac{1-\lambda}{2} = \frac{\lambda+1}{2} < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера сходится остаток ряда $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} a_k \Rightarrow$ сходится и сам ряд.

Пусть $\lambda > 1 \Rightarrow$ число $\varepsilon_1 \doteq \dfrac{\lambda-1}{2} > 0$. Снова по определению предела для ε_1 $\exists k_1$, т.ч. $\forall k > k_1$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > \lambda - \varepsilon_1 = \lambda - \frac{\lambda-1}{2} = \frac{\lambda+1}{2} > 1.$$

Следовательно, в силу признака Даламбера расходится остаток ряда $\sum_{k=k_1+1}^{+\infty} a_k \Rightarrow$ расходится и рассматриваемый ряд (или можно было воспользоваться тем, что полученное неравенство, как было отмечено при доказательстве признака Даламбера, влечет невыполнение необходимого условия сходимости ряда).

При $\lambda = +\infty$ по определению предела для $\varepsilon_2 = 1$ $\exists k_2$, т.ч. $\forall k > k_2$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1.$$

Отсюда следует расходимость ряда.

Если $\lambda = 1$, то примерами сходящегося и расходящегося рядов, удовлетворяющих данному условию, являются, например, ряды $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$.

Теорема 7(признак Коши). *Пусть* $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1) *если* $\forall k$: $\sqrt[k]{a_k} \leq \lambda < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) *если* $\forall k$: $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$, *то ряд расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \lambda \;\Leftrightarrow\; a_k \leq \lambda^k.$$

Так как $0 \leq \lambda < 1$, то на основании признака сравнения с рядом $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится.

Если $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ $\forall k$, то $a_k \geq 1$ $\forall k \Rightarrow$ ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю.

Следствие. *Пусть* $\exists \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lambda$. *Тогда*

1) *при* $\lambda < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) *при* $\lambda > 1$ *или* $\lambda = +\infty$ *ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится;*

3) *при* $\lambda = 1$ *ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Если $\lambda < 1$, то как и при доказательстве следствия из признака Даламбера $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall k > k_1$: $\sqrt[k]{a_k} < \dfrac{\lambda+1}{2} < 1 \Rightarrow$ согласно признаку Коши ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится.

Если $\lambda > 1$, то снова как и в следствии из признака Даламбера $\exists k_2 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall k > k_2$: $\sqrt[k]{a_k} > \dfrac{\lambda+1}{2} > 1$, что в силу признака Коши влечет расходимость рассматриваемого ряда.

При $\lambda = +\infty$ по определению предела для $\varepsilon_2 = 1$ $\exists k_2$, т.ч. $\forall k > k_2$:

$$\sqrt[k]{a_k} > 1,$$

откуда следует расходимость ряда.

В качестве примеров сходящегося и расходящегося рядов, удовлетворяющих условию $\lambda = 1$, можно взять ряды, приведенные в доказательстве следствия из признака Даламбера.

Замечание. Полученные теоремы дают новые признаки сходимости числовых последовательностей (S_n), сформулированные в терминах поведения разностей $S_k - S_{k-1} = a_k$ соседних членов последовательности.

ЛЕКЦИЯ 45

Теорема 1(метод выделения главной части). *Пусть* $a_k = b_k + o(b_k)$ *при* $k \to +\infty$, *причем* $b_k \geq 0$ $\forall k$. *Тогда ряды* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. По условию $a_k = b_k + o(b_k) = b_k(1 + o(1))$ при $k \to +\infty$. Так как $\lim_{k\to+\infty} o(1) = 0$, то для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall k > k_0$: $|o(1)| \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \forall k > k_0$ выполняются неравенства $\dfrac{1}{2} b_k \leq a_k \leq \dfrac{3}{2} b_k$, откуда в силу признака сравнения следует, что остатки порядка $k_0 + 1$ обоих рядов сходятся или расходятся одновременно. На основании леммы из лекции 44 утверждение доказано.

Теорема 2(интегральный признак Коши сходимости числового ряда). *Пусть* $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ *и* $f \downarrow$ *на* $[1, +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Так как $f \downarrow$ на $[1, +\infty)$, то по теореме 3 лекции 25 $f \in R[1, \eta]$ $\forall \eta \in [1, +\infty) \Rightarrow$ определен несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Так как f убывает, то $\forall x \in [k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

Проинтегрируем эти неравенства по $[k, k+1]$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx.$$

Поскольку $\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1)$, $\int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)$, то

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

Просуммируем эти неравенства по k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Тогда $\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + f(n+1) = S_{n+1} - f(1)$. Учитывая, что $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ (лемма 2 лекции 26), получаем неравенства

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n,\ n \in \mathbb{N} \tag{21}$$

Пусть сходится ряд, т.е. $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n \Rightarrow$ согласно критерию сходимости рядов с неотрицательными членами (теорема 4 лекции 44) последовательность (S_n) ограничена сверху, т.е. $\exists C > 0$, т.ч. $\forall n$: $S_n \leq C$. Теперь зафиксируем произвольное $\eta \geq 1$ и выберем $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\eta \in [m, m+1)$. Далее, в силу свойств интеграла Римана от неотрицательных функций (см. следствие из леммы 1 лекции 26)

$$\int_1^{\eta} f(x)\,dx \leq \int_1^{m+1} f(x)\,dx \leq S_m \leq C$$

Следовательно, по критерию сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции (см. лекцию 31) несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Если ряд расходится, то согласно критерию сходимости рядов с неотрицательными членами последовательность (S_n) не ограничена сверху, что вследствие неравенств (21) влечет неограниченность функции $\int_1^{\eta} f(x)\,dx$, а следовательно, и расходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если сходится несобственный интеграл, то ряд также сходится, ибо если бы ряд расходился, то по доказанному расходился бы и интеграл.

Если интеграл расходится, то расходится и ряд, т.к. если бы ряд сходился, то по доказанному сходился бы и несобственный интеграл. Теорема доказана.

Примеры.

1. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^p}$. Для $p \leq 0$ общий член ряда не стремится к нулю и поэтому ряд расходится. При $p > 0$ по интегральному признаку Коши этот ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$. Следовательно, при $p > 1$ рассматриваемый ряд сходится, а при $p \leq 1$ — расходится.

2. Условия сходимости ряда $\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{1}{k^p \ln^q k}$ совпадают в силу интегрального признака Коши с условиями сходимости несобственного интеграла

$\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p \ln^q x}\, dx$. Поэтому ряд сходится для $p > 1$ при любых q; при $p = 1$ ряд сходится только для $q > 1$; ряд расходится, для $p < 1$ и произвольных q.

3. Исследуем на сходимость $\sum_{k=1}^{+\infty}(1 - \cos(1/k))$. Выделим главную часть общего члена ряда

$$1 - \cos\frac{1}{k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ при } k \to +\infty.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый ряд сходится, поскольку сходится $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2k^2}$.

Знакопеременные ряды

Определение 1. *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$.

Определение 2. *Ряд сходится условно, если он сходится, но не абсолютно.*

Теорема 3. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ сходится, следовательно, для этого ряда выполняется критерий Коши сходимости, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > n_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > n_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N}$: $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow$ в силу критерия Коши ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится.

Теорема 4(признак Лейбница). *Пусть последовательность* (b_k) *такова, что* $b_k \downarrow 0$. *Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} b_k$ *сходится, причем* $|S_n - S| \le b_{n+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность частичных сумм четного порядка (S_{2n}). Из условия $b_k \downarrow$ следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$: $b_k - b_{k+1} \ge 0$. Поэтому

$$S_{2n} = b_1 - b_2 + \ldots + b_{2n-1} - b_{2n} = S_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \ge S_{2n-2} = S_{2(n-1)}.$$

Следовательно, $S_{2n} \uparrow$ и $S_{2n} \ge 0$.

В то же время,

$$S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - \ldots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \le b_1,$$

т.к. слагаемые в круглых скобках неотрицательны. Следовательно, по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности существует конечный $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$ и при этом $0 \le S_{2n} \le S \le b_1$.

Далее, $S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$. Поскольку $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, то $\exists \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} + b_{2n+1}) = S$. Из сходимости последовательностей (S_{2n}) и (S_{2n+1}) и равенства их пределов следует, что $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ (действительно, $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists m'_\varepsilon,\ m''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m > m'_\varepsilon$: $|S_{2m} - S| < \varepsilon$ и $\forall m > m''_\varepsilon$: $|S_{2m+1} - S| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > 2n_\varepsilon + 1$, где $n_\varepsilon \doteq \max(m'_\varepsilon, m''_\varepsilon)$: $|S_n - S| < \varepsilon) \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_k$ сходится и его сумма равна S.

Прежде, чем переходить к доказательству оценки $|S - S_n|$ заметим, что $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k = -\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_k$. Поэтому знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k$, первый член которого отрицателен, сходится, а его сумма $\sigma = -S$ удовлетворяет неравенству $-b_1 \le \sigma \le 0$.

Зафиксируем n. Поскольку разность $S - S_n$ является суммой ряда $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_k$, то в силу сказанного выше справедлива оценка: $-b_{n+1} \le S - S_n \le b_{n+1}$, т.е. $|S - S_n| \le b_{n+1}$. Теорема доказана.

Замечание. Схожими рассуждениями можно показать, что последовательность частичных сумм нечетного порядка $(S_{2n-1})_{n=1}^{+\infty}$ убывающая и $\forall n \in \mathbb{N}\ S_{2n-1} \ge S$.

Ряды вида $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_k$ (или $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k$), где $b_k \downarrow 0$ называются *рядами Лейбница.* Из доказанной теоремы следует, что существуют сходящиеся ряды (ряды Лейбница) со сколь угодно медленным стремлением к нулю общего члена ряда.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ сходится условно. Действительно, этот ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд из модулей $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится.

Теорема 5(признак Дирихле). *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ *сходится, если:*
1) $\exists M > 0$, *т.ч.* $\forall n$: $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \le M$;
2) *последовательность* (b_k) *монотонна;*
3) $b_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$.

Теорема 6(признак Абеля). *Ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ *сходится, если:*
1) *ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*
2) *последовательность* (b_k) *монотонна;*
3) $\exists L > 0$, *т.ч.* $\forall k$: $|b_k| \le L$.

Оставим без доказательств эти теоремы.

Замечание 1. Проанализируем условия в этих признаках. Начнем с признака Абеля. Предположим, что члены последовательности (a_k) сохраняют знак $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится абсолютно Тогда для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ достаточно лишь ограниченности (b_k). Это сразу вытекает из оценки $|a_k b_k| \le L|a_k|$ в силу теоремы 5 лекции 44. При этом требование монотонности последовательности (b_k), накладываемое в признаке Абеля, оказывается избыточным.

В случае знакопостоянства последовательности (a_k) условие 1) признака Дирихле равносильно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ (см. теорему 4 лекции 44). Поэтому в этом случае сделать заключение о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ можно, потребовав лишь ограниченнность (b_k) вместо условий 2) и 3), которые оказываются излишними.

Эти наблюдения говорят о том, что признаки Дирихле и Абеля содержательны, лишь когда рассматриваются знакопеременные ряды. При этом знакопеременной является последовательность (a_k), ибо члены всякой монотонной последовательности (b_k) имеют один знак, начиная с некоторого номера k_0.

Замечание 2. Как показывают следующие два примера, требование монотонности последовательности (b_k) в этих признаках существенно. Пусть $a_k = (-1)^k$, $b_k = \dfrac{(-1)^k}{k} \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n}(-1)^k| = |-1+1+\ldots+(-1)^k| \le 1$ и $\lim_{k\to+\infty}(-1)^k/k = 0$, но ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится.

Теперь положим $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$, $b_k = (-1)^k$. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ сходится по признаку Лейбница, последовательность $(-1)^k$ ограничена, а ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится.

Замечание 3. Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле. Действительно, если в признаке Дирихле взять $a_k = (-1)^k$, то получим признак Лейбница.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$ для $x \in [0, 2\pi]$. При $x = 0$ и $x = 2\pi$ ряд сходится, так как все его члены нулевые. Пусть $x \in (0, 2\pi)$. Докажем ограниченность конечных сумм $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx =$$

$$\frac{1}{2\sin(x/2)}\left(2\sin x \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin 2x \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + 2\sin nx \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(x/2)}\left(\cos\left(x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(2x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(2x + \frac{x}{2}\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + \cos\left(nx - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2\sin(x/2)}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)\right).$$

Следовательно, $\forall x \in (0, 2\pi)$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \dfrac{x}{2}\right)\right|}{2\sin(x/2)} \leq \frac{1}{\sin(x/2)}.$$

Поскольку последовательность $\left(\dfrac{1}{k}\right)$ убывает к нулю, то по признаку Дирихле ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$ сходится для любого $x \in (0, 2\pi)$.

Приведем без доказательства еще два утверждения, показывающие принципиальное различие абсолютно и условно сходящихся рядов.

Всякое взаимно–однозначное отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на себя называется *перестановкой* натуральных чисел. Стало быть, любая перестановка может быть записана как последовательность $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается один и только один раз.

Теорема 7. *Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ также абсолютно сходится к той же сумме.*

Эта теорема показывает, что сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых, т.е. ведет себя аналогично суммам конечного числа слагаемых.

Теорема 8(Риман). *Если ряд сходится условно, то для любого действительного числа можно указать такую перестановку его членов, что получившийся ряд сходится к этому числу.*

Литература

[1] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа. 2004.

[2] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 1. Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО. 2002.

[3] *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.

Учебное издание

Кудрявцев Николай Львович

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ЧАСТЬ I

Подписано в печать 21.05.2021
Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Тираж 120 экз. Заказ № 99122

Отпечатано в типографии Onebook.ru
ООО "Сам полиграфист"
109 316 г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, к. 5
Тел. +7 495 545-37-10
E-mail: info@onebook.ru
Сайт: www.onebook.ru