И.Х. Сабитов

Добавление к теме "Теорема Стокса"

Мы представим тему "Теорема Стокса" с использованием более современных обозначений, позволяющих записать ее в виде одной единой форме во всех размерностях. Сначала рассмотрим ее известные классические варианты.

Криволинейные интегралы 2-го рода

Постараемся работать с известными определениями интегралов как пределов интегральных сумм. Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана гладкая кривая L с выбранной ориентацией, т.е. с указанным направлением обхода, параметризованная некоторым параметром t; изменяющимся на некотором отрезке $[a, b]$. Считаем, что при изменении параметра от a к b точка $M(t) \in L$ с координатами $x_i(t), 1 \leq i \leq 3$ двигается по L в указанном направлении. В таком случае говорят, что ориентация и параметризация кривой **согласованы** между собой. Их согласования взаимо-связаны. Если ориентация дана, тогда подбирают такую параметризацию, чтобы она порождала движение движение вдоль кривой в данном направлении (например, предполагая, что параметр изменяется не от a к b, а от b к a), и, наоборот если параметризация дана заранее, то порожденное ею направление обхода кривой и берется за ее ориентацию.

Пусть на кривой задана некоторая функция $P(M)$. Разбиваем кривую на маленькие дуги точками $M_1, M_2, ..., M_n$ и выбрав в каждой дуге произвольную точку M'_i составим сумму

$$\sum_i P(M'_i)\Delta_i,$$

где Δ_i - числа, равные длине проекции на ось Ox дуги M_iM_{i+1}, взятой со знаком $+$, если спроектированная дуга идет в направлении оси Ox, и со знаком - , если направление проекции противоположно направлению оси Ox. Таким образом, $\Delta x_i = \Delta s_i \cos\alpha_i$, где Δs_i - длина дуги M_iM_{i+1}, а α_i - угол между вектором касательной к кривой и осью Ox. Предел этой суммы при бесконечном измельчении разбиения кривой называется криволинейным интегралом 2-го рода от функции $P(M)$ по ориентированной кривой L и обозначается он как

$$\int_{L^+} P(M)dx,$$

где знак $+$ указывает, что кривая L имеет заранее заданную ориентацию. Аналогично составляются интегралы

$$\int_{L^+} Q(M)dy \text{ и} \int_{L^+} R(M)dz.$$

и приходим к интегралу от линейной формы $\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$:

$$\int_(L^+)\omega = \int_{L^+} P(M)dx + Qdy + Rdz$$

Для его вычисления используем знание отображения $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

переводящего область параметризации в кривую, и **по определению** полагаем

$$\int_{L^+} \omega^1 = \int_{L^+} P(M)dx + Qdy + Rdz \stackrel{def}{=}$$

$$\int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt. \quad (1)$$

Отображение $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, переводящее область параметризации в кривую с согласованием ее ориентации, называют **правой картой** кривой.

Частный случай. Формула Ньютона-Лейбница-Стокса В частности, если форма была задана на отрезке $L = [a, b]$ оси Ox и обход отрезка был согласован с ориентацией оси, тогда отображение φ является тождественным $x = t$ и

$$\int\limits_{L^+} \omega^1 = \int\limits_{L^+} P(M)dx \overset{def}{=} \int\limits_a^b P(x)dx = \int\limits_a^b P(t)dt,$$

т.е. изученный на 1-м курсе интеграл является частным случаем криволинейного интеграла 2-го рода. Этой формуле можно придать другой вид, который дальше будет распространен на более общий случай. Назовем заданную на отрезке $[a.b], a < b$, дифференцируемую функцию $F(x)$ формой нулевого порядка ω^0 и назовем интегралом от нее на границе отрезка $\partial[a, b]$ разность $F(b) - F(a)$. Назовем дифференциал $dF = f(x)dx$ формой ω^1 первого порядка. Тогда формулу Ньютона-Лейбница можно .переписать в виде

$$\int\limits_{[a,b]} d\omega^0 = \int\limits_{\partial[a,b]} \omega^0 \tag{2}$$

и назвать это равенство формулой Ньютона-Лейбница-Стокса для формы нулевого порядка.

Если параметризация не согласована с ориентацией, тогда перед правой частью в (1) надо ставить знак (-) или же поменять порядок пределов в правой части (так как тогда параметризация станет согласованной с ориентацией).

Подынтегральное выражение в правой части формулы (1) тоже можно рассматривать как форму на отрезке $[a, b]$; ее обозначают $\varphi * \omega$ и называют формой,**перенесенной** из кривой L на отрезок $[a, b]$ отображением φ. В терминах форм полученное выше равенство можно переписать в виде

$$\int\limits_{\varphi[a,b]} \omega^1 = \int\limits_a^b \varphi * \omega^1. \tag{3}$$

Поскольку форма $\varphi*\omega^1$ задана на отрезке оси Ox и обход отрезка был согласован с ориентацией кривой L^+, в итоге получаем, что криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле (2) как обычный определенный интеграл по отрезку $[a, b]$ от функции, порожденной коэффициентами формы и параметрическим представлением кривой.

Если в качестве параметра t выбрана длина s дуги, которая отсчитывается от начальной точки в направлении обхода кривой, тогда кривая имеет представление $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ и криволинейный интеграл 2-го рода превращается в криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L F(s)ds$, где

$$F(s) = P(x(s), y(s), z(s))x'(s) + Q(x(s), y(s), z(s))y'(s) + R(x(s), y(s), z(s))z'(s),$$

который в некоторых учебниках высшей математики принимается за **определение** интеграла 2-го рода.

На примере криволинейного интеграла от форм 1-го порядка мы встретились со всеми понятиями и приемами, необходимыми также для вычислениям интегралов от форм более высокого порядка. Напомним, что нам понадобилось: 1) знание ориентации области интегрирования; 2) знание ее параметрического представления, согласованного с ее ориентацией. Если мы имеем для некоторой открытой дуги $l \subset L$ ее параметрическое представление $\varphi : (a, b) \to l$, согласованное с ее ориентацией, то говорят, что для (или на) l задана ее **правая карта**. В многомерном варианте появляется еще необходимость знания параметризации границы области и ее согласованности с ориентацией самой области. Это мы выясним в дальнейших рассмотрениях.

Поверхностные интегралы

Аналогичные построения для ориентированной поверхности S в пространстве и функции R(x, y, z) на ней приведут нас к интегральной сумме

$$\sum R(M_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i \Delta y_j$ – площади проекции на плоскость Oxy элементов разбиения поверхности, взятые со знаком $+$, если направления выбранных нормалей составляют острый угол с положительным направлением оси Oz , и со знаком -, если этот угол тупой. Это значит, что площадь проекции равна площади рассматриваемой ячейки разбиения поверхности, умноженной на косинус угла α между нормалью и положительным направлением оси Oz, что дает такую связь между элементом площади dS на поверхности и элементом площади $dxdy$ на плоскости Oxy :

$$dxdy = \cos \alpha dS \tag{4}$$

(видим, знак выражения $dxdy$ автоматически совпадает с требуемым по построению знаком). Предел такой интегральной суммы обозначается как

$$\iint\limits_{S^+} R(x, y, z) dx \wedge dy$$

и называется поверхностным интегралом 2-го рода. Знак S^+ означает, что интегрирование проводится с учетом выбранных направлений нормалей. Запись $dx \wedge dy$ под знаком интеграла означает, что имеется в виду площади проекции элементов разбиения поверхности, взятые с соответствующим знаком.

Аналогичным образом строятся интегралы от функций $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ соответственно с проекцией на плоскости координат Oyz и Ozx. В итоге приходим к интегралу вида

$$\iint\limits_{S^+} P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy.$$

Под знаком интеграла получили то, что называется формой 2-го порядка. Символ $\wedge$ (читается *wedge*, а по-русски "клин") означает проведение операции внешнего умножения. В геометрических задачах смысл этой операции по отношению к пространственным переменным в одночленном случае заключается в том, что ищется "элемент" площади бесконечно малого параллелограмма (или объема параллелепипеда, если речь идет о трехмерных областях), построенного на дифференциалах участвующих в записи одночлена переменных с учетом их нумерации в установлении ориентации; в частности, важно знать, с какими переменными мы имеем дело - с независимыми или зависимыми). На самом деле для правильного проведения вычислений (но не для теоретических рассмотрений!) достаточно знать несколько основных правил. Приведем некоторые из них.

1) ассоциативность внешнего умножения $(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k = dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$.

2) дистрибутивность внешнего умножения $(dx_i + dx_j) \wedge dx_k = dx_i \wedge dx_k + dx_j \wedge dx_k$.

3) антикоммутативность (при перестановке любых двух линейных форм $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$). Важны также **Следствие 1** из свойства 3) : если во внешнем произведении участвуют два одинаковых сомножителя, тогда оно равно нулю и **Следствие 2**: если сомножители переставляются четное число раз, то внешнее произведение остается равным исходному (как и в определителях). Например, $dz \wedge dx \wedge dy = -dx \wedge dz \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$ или $dz \wedge dx \wedge dy = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

Замечание 1. *При работе с сомножителями в виде форм тоже надо быть аккуратными в применении свойства 3). Например, рассмотрим формы $\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2$ и $\omega_2 = dx_3$ и их внешнее произведение $\omega_1 \wedge \omega_2$. Переставим множители, получим, два раза применяя 3):*

$\omega_2 \wedge \omega_1 = dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \omega_1 \wedge \omega_2$ *- сомножители поменялись местами, а внешнее произведение не изменилось!. Общее правило такое: если меняются местами сомножители в виде форм* ω_1 *и* ω_2 *соответственно порядков* p *и* q*, тогда* $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1$.

4) добавим еще правило дифференцирования внешнего произведения ω со скалярным коэффициентом, т.е. ω вида $f(x)\omega_0$, где ω_0 состоит только из внешнего произведения дифференциалов некоторых переменных:

$$d(f\omega_0) = df \wedge \omega_0,$$

где $f(x)$ - дифференцируемая функция от переменных, совокупность которых обозначена буквой x, а df - дифференциал, понимаемый как линейная дифференциальная форма относительно дифференциалов переменных. Так как после df есть знак внешнего произведения, то в правой части стоит внешнее произведение на единицу большего порядка чем у дифференцируемой формы ω. Таким образом, согласно Следствию 1, от дифференциала df в результате не будут участвовать слагаемые, в которых есть дифференциалы тех переменных, которые уже встречаются в ω_0. Например, в случае трех переменных для $\omega = f(x,y,z)dx \wedge dz + 2dy \wedge dx$ имеем $d\omega = (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dx \wedge dz + 0 \wedge dy \wedge dx = f_y dy \wedge dx \wedge dz$. В частности. для всякого внешнего произведения ω имеем $d(d(\omega)) = d^2\omega = 0$. Если не уточнять вид формы ω, тогда общее правило такое

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$$

и все равно надо отдельно уточнять, как понимать $d\omega$.

Теперь продемонстрируем, как в конечном счете все сводится к вычислению обыкновенного кратного интеграла. По условию, поверхность S ориентируема. Сначала нужно ввести для поверхности карту или параметризацию, т.е. отображение на поверхность из области каким-то образом введенных внутренних координат. Производные радиус-вектора поверхности по этим координатам составляют базис касательных векторов на поверхности и пронумерованный их порядок задает ориентацию поверхности. Добавляем к ним нормаль к поверхности. Выбрали направление нормали, и считаем его первым. Вместе с касательными векторами по порядку их нумерации они составляют базис пространства. Если этот базис имеет такую же ориентацию, как все пространство (т.е. переход от введенного базиса к стандартном базису пространства имеет матрицу перехода с положительным определителем), тогда говорят, что выбранная ориентация поверхности согласована с ориентацией пространства и выбранная карта называется **правой**. Пусть в трехмерном случае правая карта дается отображением $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, где точка (u,v) из некоторой области $U \subset R^3$. Затем на основании формул $dx = x'_u du + x'_v dv, dy = y'_u du + y'_v dv$ и $dz = z'_u du + z'_v dv$ вычисляют форму $dy \wedge dz$ и остальные формы, учитывая при этом свойства внешнего произведения. Получим

$$dy \wedge dz = (y'_u z'_v - y'_v z'_u) du \wedge dv,\ dz \wedge dx = (z'_u x'_v - z'_v x'_u) du \wedge dv,\ dx \wedge dy = (x'_u y'_v - x'_v y'_u) du \wedge dv. \quad (5)$$

Собирая все вместе и переходя в коэффициентах P, Q, R к независимым переменным (u,v), **переносим** тем самым все эти формы в область U к простому виду $F(u,v)du \wedge dv$, и если пара (u,v) была **правой** на $\mathbb{R}^2$, то полученный интеграл **по определению** будет равен обыкновенному двойному интегралу от функции $F(u,v)$ по области U. По формулам в **??** видим, что выписанные равенства как раз совпадают с правилами замены переменных с (u,v) на переменные в соответствующей координатной плоскости. Запомнить расположение "элементарных" внешних произведений очень легко - добавьте впереди к участвующим дифференциалам дифференциал от отсутствующей переменной как новый внешний сомножитель и должна получиться тройка дифференциалов в правильном (правом) порядке $dx \wedge dy \wedge dz$ или в эквивалентном порядке ($dy \wedge dz \wedge dx$ или $dz \wedge dx \wedge dy$ - вспомните правило перестановки порядка сомножителей по Следствию 2). Далее, было сказано, что значение внешнего произведения дифференциалов двух переменных в правильном порядке равно площади, с соответствующим знаком, проекции элементарной ячейки поверхности на плоскость этих переменных, а она равна площади dS элементарной ячейки поверхности, умноженной на косинус угла между направлением выбранной нормали к поверхности и соответствующей оси координат. Значит, если единичная нормвль имеет направляющие косинусы $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, тогда

$$dy \wedge dz = \cos\alpha\ dS,\ dz \wedge dx = \cos\beta\ dS,\ dx \wedge dy = \cos\gamma\ dS.$$

Если поверхность имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$ с $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in U$, тогда

$$\iint\limits_{S^+} P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy =$$

$$\iint\limits_{S^+} (P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cos\alpha(u, v) + Q(x(u, v), ...) \cos\beta(u, v) + R(x(u, v), ...) \cos\gamma(u, v))dS. \quad (6)$$

Известно, что нормаль к поверхности параллельна векторному произведению касательных векторов

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v] = \{(y'_u z'_v - y'_v z'_u),\ (z'_u x'_v - z'_v x'_u), (x'_u y'_v - x'_v y'_u)\}$$

Единичная нормаль

$$\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\{(y'_u z'_v - y'_v z'_u),\ (z'_u x'_v - z'_v x'_u), (x'_u y'_v - x'_v y'_u)\}.$$

С другой стороны, $dS = |\mathbf{N}|dudv$, поэтому выписанный по формуле (6) интеграл совпадает с двойным интегралом, выписанным с использованием равенства (5), т.е. с

$$\iint\limits_{U} (P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + Q(x(u, v), ...)(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + R(x(u, v)(x'_u y'_v - x'_v y'_u)\})dudv,$$

причем эта формула верна, если пара (u, v) правая в области $U \subset \mathbb{R}^2$ и при выборе нормали поверхности по векторному произведению $[\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]$, т.е. тройка $\mathbf{N}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ или, что то же самое, тройка $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}$ имеет ту же ориентацию, что и стандартный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Как пример, рассмотрим значения произведения $dx \wedge dy$ для верхней и нижней полусфер сферы $S : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Пусть на верхней полусфере $S_1^+ : z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и нижней полусфере $S_2^+ : z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ выделены маленькие части, проектирующиеся на одну и ту же область на плоскости Oxy. Нормль к сфере внешняя, поэтому на верхней полусфере угол α между нормалью и осью Oz острый, а на нижней полусфере он тупой и равен $\pi - \alpha$. Следовательно, значения внешнего произведения $dx \wedge dy$ на S_1^+ и S_2^+ равны по модулю и противоположны по знаку. Значит, интеграл от $dx \wedge dy$ по всей сфере равен нулю. Желающие могут это проверить прямым вычислением по предложенному выше методу. А понимание быстрого доказательства равенства нулю такого интеграла на любой замкнутой поверхности будет наградой за прочтение текста до этого места.

Интегральные формулы

Теперь приведем записи известных интегральных формул в терминах интегралов от форм.
1) Для формулы Грина

$$\iint\limits_{U} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_{\partial U^+} Pdx + Qdy$$

введем форму 1-го порядка $\omega^1 = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ и ее внешний дифференциал

$$d\omega^1 = d(Pdx + Qdy) = (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy) \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy) \wedge dy =$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy). \qquad .$$

Тогда формула Грина может быть представлена в виде

$$\iint\limits_U d\omega^1 = \oint\limits_{\partial U^+} \omega^1. \tag{7}$$

Для ее справедливости нужна следующая проверка. 1) Область U считается ориентированной как вся плоскость $\mathbb{R}^2$ (т.е. параметризация области параметрами (x,y) согласована с ее ориентацией. 2) Ориентация границы области согласована с ориентацией области - это значит, что базис из внешней нормали к границе, как первый вектор, и касательная к границе в направлении ее обхода имеет такую же ориентацию как вся область, т.е. как стандартный базис из векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. Это условие накладывает требование на параметризацию границы: изменение параметра t в представлении границы $x = x(t), y = y(t)$ должно быть таким, чтобы вектор касательной шел в требуемом направлении. В двумерном случае это условие проверяется наглядно - кратчайший поворот от внешней нормали к касательной должен быть против часовой стрелки. И, конечно, должны существовать и быть непрерывными все участвующие в формуле функции.

Доказательство формулы (7) идейно не отличается от классического доказательства - оно проводится отдельно для каждого коэффициента P и Q разбиением области на стандартные простые подобласти с применением к ним повторного интегрирования в левой части.

2) Для формулы Стокса

$$\iint\limits_{S^+} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz$$

вводим форму $\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$ и вычисляем ее внешний дифференциал

$$d\omega^1 = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz =$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz =$$
$$(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy.$$

Тогда кратко эта формула запишется так:

$$\iint\limits_{S^+} d\omega^1 = \oint\limits_{\partial S^+} \omega^1. \tag{8}$$

Для справедливости этой формулы достаточно провести следующую проверку. 1) Поверхность S гладкая и ориентированная согласованно с ориентацией пространства и ее параметризация согласована с ее ориентацией. Это значит, что касательные векторы, т.е. производные радиус-вектора по нумерованным внутренним координатам, и их векторное производение составляют базис, ориентированный одинаково с пространством. 2) Граница поверхности - гладкая и ее ориентация согласована с ориентацией поверхности. Это значит, что нормаль к границе области, лежащая на касательной плоскости поверхности внешне по отношению к самой области, составляет базис на поверхности, согласованный с ориентацией поверхности. А нахождение направления внешней нормали делается так: пусть поверхность параметризоана правой картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ с внутренними координатами $(u,v) \in U$, Обычно граница области $U \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ задается, хотя бы локально, некоторым уравнением $f(u, v) = 0$, а область U определяется неравенством, скажем, $f(u, v) > 0$. Тогда нормаль $\mathbf{n}^+$ к границе поверхности, внешняя по отношению к самой области поверхности, задается образом вектора, противоположного $gradf$ из U. Теперь ориентация касательной $\mathbf{T}$ к границе поверхности должна быть выбрана так, чтобы пара векторов $(\mathbf{n}^+; \mathbf{T})$ имела ориентацию, совпадающую с ориентацией поверхности.

Пример. Пусть S^+ - верхняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ с локальным параметрическим представлением $x = \cos\varphi \cos\psi, y = \sin\varphi / cos\psi, z = \sin\psi$. Ориентация поверхности согласована с ориентацией пространства векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (проверьте!), Граница полусферы задана уравнением $f(\varphi, \psi) = \psi = 0$, а само́й поверхности соответствует прямоугольник $U : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \psi \geq 0$ с $f(\varphi, \psi) > 0$. Имеем $gradf = \{0, 1\}$, значит, образом $-gradf$ будет вектор $\{0, 0, -1\}$. Рассмотрим точку $M(1, 0, 0)$. В ней касательные векторы к полусфере имеют координаты $\{0, 1, 0\}$ и $\{0, 0, 1\}$, значит, для того, чтобы внешняя нормаль $\{0, 0, -1\}$. имела вместе с касательным к границе вектором ту же ориентацию, что и поверхность, нужно, чтобы касательный вектор к границе шел в направлении $\{0, 1, 0\}$ (подтвердите вычислениями с использоанием матриц, а не подбором!). Видим, что это направление обхода действительно оставляет выбранную (верхнюю) сторону полусферы слева. Но такое наглядное объяснение работает только в трехмерном случае, а мы хотели показать этим простым примером, что нужную ориентацию границы можно и вычислить, и это единственный способ для работы в многомерном случае, так как там нет возможности ссылаться на наглядное представление. Именно это и будет продемонстрировано дальше в примере из 4-х мерного пространства.

Замечание 2. *Формулу (9) иногда используют для вычисления криволинейного интеграла по замкнутому контуру. Но любую данную замкнутую кривую L можно считать границей бесчисленного множества поверхностей, поэтому получается, что интеграл по замкнутому контуру можно вычислять бесчисленным количеством способов, и искусство исследователя состоит в том, чтобы выбрать поверхность, для которой левая часть вычисляется наиболее легким образом. При этом может быть, что в интеграле по поверхности могут появиться выражения, непрерывным образом обращающиеся в нуль на ее границе, т.е. на рассматриваемой кривой. Рассмотрите задачу № 4367 из задачника Б.П. Демидовича и вычислите интеграл по окружности C, считая ее 1) краем круга; 2) краем правой полусферы; 3) краем левой полусферы; 4) краем боковой поверхности прямого кругового конуса с вершиной в точке (b, b, b) (но всегда сохраняя данную ориентацию окружности C)..Конечно, должен, получиться один и тот ж ответ.*

Вопрос. Почему формулу Грина можно считать частным случаем формулы Стокса?

3) Для формулы Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{\partial D^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

вводим форму 2-го порядка $\omega^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Вычисляя

$$d\omega^2 = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz$$

эту формулу можно представить в виде

$$\iiint\limits_{D^+} d\omega^2 = \iint\limits_{\partial D^+} \omega^2 \tag{9}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия: 1) для тела D есть правая карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$;;; 2) ориентация поверхности ∂D согласована с ориентацией тела. Доказательство получается рассмотрением формулы отдельно для слагаемых для P, Q и R разбитием тела D на части. ккоторым применима теорема Фубини.

Замечание 3. *При вычислении поверхностного интеграла по замкнутой поверхности сведением его к трехмерному интегралу с использованием формулы Гаусса-Остроградскоoу верны замечания, аналогичные приведенным в Замечании 2 о применении формулы Стокса для вычисления криволинейного интеграла по замкнутой кривой.*

Пример из 4-х мерного пространства

Рассмотрим следующую задачу из книги Ю.Г. Решетняка "Сборник задач по курсу математического анализа" (Новосибирск, 1973)

Пусть поверхность F в пространстве R^4 с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) определена системой уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 \; . \end{cases}$$

Показать, что F топологически является двумерным тором. Далее, пусть $\sum$ - часть трехмерной сферы $S^3(\sqrt{2})$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$, в которой $x_1^2 + x_2^2 > x_3^2 + x_4^2$. Доказать, что $\sum$ есть трехмерное многообразие с краем $F = \partial \sum$. Ориентируем $\sum$, выбирая в качестве положительной внешнюю нормаль шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 2$.. Определить индуцированную ориентацию поверхности F как края таким образом ориентированного многообразия $\sum$ (т..е. указать на F хотя бы одну правую карту). Построить касательные плоскости многообразий $\sum$ и F в их точке $M(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ и указать в M правые реперы этих многообразий.

Вычислить по поверхности F интеграл

$$\boldsymbol{\omega = x_3x_4dx_1 \wedge dx_2 - x_2x_4dx_1 \wedge dx_3 + x_2x_3dx_1 \wedge dx_4 +}$$
$$\boldsymbol{x_1x_4dx_2 \wedge dx_3 - x_1x_3dx_2 \wedge dx_4 + x_1x_2dx_3 \wedge dx_4}.$$

Решение задачи. Сначала установим топологический тип поверхности F Из ее уравнения имеем равенства $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1$, т.е. F описывается как декартово произведение двух окружностей $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3^2 + x_4^2 = 1$, значит, F действительно является тором (он называется тором Клиффорда). Тогда для координат точек F имеем представление

$$x_1 = \cos\alpha, x_2 = \sin\alpha; \;\; x_3 = \cos\beta, x_4 = \sin\beta, \alpha, \beta \in [0, 2\pi].. \tag{10}$$

Теперь надо выяснить вопрос с ориентацией F в окрестности точки M..

Сначала установим геометрическое содержание задачи. Вспомним, что при работе с интегралами на поверхностях важно установить связи между ориентацией и параметризацией объекта - они должны быть согласованы. Бывает два варианта согласования. 1) Дана ориентация, надо подобрать параметризацию таким образом, чтобы порожденная ею ориентация совпадала с уже данной ориентацией. В этом случае ориентация первична, а параметризация вторична. 2). Дана параметризация, тогда за ориентацию берем ту, которая порождена этой данной параметризацией. В этом случае параметризация первична, а ориентация вторична. Локальное параметрическое представление поверхности, для которого параметризация согласована с ориентацией, называется *правой* картой поверхности.

Согласование ориентации и параметризации происходит, обычно, путем выбора нумерации параметров. Как правило, считается, что есть базис пространства с такой нумерацией базисных векторов, что составленный из координат каждого из них определитель является положительным. Различные базисы считаются ориентированными одинаково, если определитель матрицы перехода между этими базисами имеет положительный знак, и считается, что эти базисы имеют противоположные ориентации, если определитель матрицы перехода является отрицательным. Значит, если в данном базисе изменить местами любые два вектора, ориентация базиса изменится на противоположную. Когда речь идет о *локальной* ориентации поверхности коразмерности 1 (т.е. о поверхности размерности $n-1$ в пространстве размерности n), тогда одно из направлений нормали к поверхности в некоторой ее рассматриваемой точке M объявляют направлением *внешней* нормали[1], и ориентацию поверхности (или ориентацию касательной плоскости к поверхности) задают так: касательные к поверхности векторы в M нумеруют таким образом, чтобы они вместе с выбранным направлением внешней нормали, принятым за первый вектор базиса, составляли базис, ориентированный одинаково базисом пространства. Если же речь идет об ориентации поверхности в целом, то, во-первых, нужно заранее предполагать, что поверхность ориентируема, во-вторых, часто бывает, что поверхность замкнута (не имеет границы) и тогда направление внешней нормали определяется однозначно естественным образом.

Это, кстати, так в нашей задаче. Внешняя нормаль к сфере $S^3(\sqrt{2})$ идет по продолжению ее радиуса, поэтому в точке M она представляется вектором $\mathbf{n} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$. Найдем для многообразия $\sum$ в окрестности точки M правую карту. Введем следующую параметризацию точек этого многообразия

$$\begin{gathered} x_1 = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cos\alpha,\ 0 \le \alpha \le 2\pi \\ x_2 = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\gamma)\sin\alpha \\ x_3 = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+\gamma)\cos\beta,\ 0 \le \beta \le 2\pi \\ x_4 = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+\gamma)\sin\beta, \end{gathered} \tag{11}$$

Имеем $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = \sin 2\gamma$. Поверхности F соответствует значение $f = 0$, т.е. $\gamma = 0$; всему многообразию $\sum$ соответствуют значения параметра γ между 0 и $\frac{\pi}{4}$, что достигается при $f = 1$. Значит, многообразию $\sum$ соответствует карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^4$, где отображение $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ дано в области $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{4})$ как радиус-вектор bfr с компонентами (11). Находим касательные векторы на трехмерной поверхности $\sum$ в точке M. Получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}(M) = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}(M) = \{0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}(M) = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}. \end{gathered}$$

Базис на трехмерной поверхности $\sum$, согласован с базисом в пространстве, если матрица размером 4×4 из векторов базиса и с первой строкой из компонент внешней нормали $\{1, 1, 1, 1\}$ имеет положительный определитель, что легко проверяется. Значит, правая карта на многообразии $\sum$ дается отображением (11) в $\mathbb{R}^4$ из указанной выше области $U \subset^3$.

Правая карта для F, края $\sum$, подбирается следующим образом. Так как на $\sum$ функция $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ положительна, ее градиент направлен внутрь $\sum$, значит, внешняя нормаль$\mathbf{n}^+$ к F направлена противоположно градиенту, значит,

$$\mathbf{n}^+(M) = \{-x_1, -x_2, x_3, x_4\} = \{-1, -1, 1, 1\}.$$

Выписываем базис поверхности $\sum$, в котором первым вектором будет внешняя нормаль к границе. Далее, из трех известных векторов базиса подбираем два вектора, таких, чтобы вместе с внешней нормалью они составляли базис на $\sum$, согласованный с базисом пространства. В нашем случае это будут векторы

$$\mathbf{r}_\alpha = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\}, \mathbf{r}_\beta = \{0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

[1]Вообще-то внешнюю нормаль связывают с определением края многообразия, например, внешняя нормаль сферы связывается с ней как с краем шара.

Они вместе с нормалью $\{1,1,1,1\}$ к сфере и $\mathbf{n}^+(M)$ составят матрицу, определитель которой положителен (проверьте). Значит, правая карта поверхности F дается отображением (10), в котором α считается первой переменной.

Теперь можем вычислить предложенный интеграл. Область параметров - это квадрат $\Pi : [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, а компоненты x_1, x_2, x_3, x_4 даны отображением (10). Выписываем подынтегральное выражение

$$\omega = (0 + \sin\alpha\sin\beta\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\alpha\sin\beta + 0 + 0)d\alpha \wedge d\beta = (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta)d\alpha \wedge d\beta.$$

Вычисляя этот интеграл как двойной интеграл по квадрату Π, находим

$$\iint\limits_{\Pi} \omega = \pi^2.$$

Замечание 4. *Чтобы проверить формулу Стокса, надо вычислить сначала внешний дифференциал* $d\omega$*, а затем от него интеграл по параллелепипеду* $U_{\alpha\times\beta\times\gamma} = (0,2\pi) \times (0,2\pi) \times (0,\frac{\pi}{4})$*. Поверхности* F *соответствует часть плоскости* $\gamma = 0$*. Обратите внимание, что внутри области* U *внешнее произведение* $dx_1 \wedge dx_2$ *уже не равно нулю, а равно* $\cos 2\gamma d\gamma \wedge d\alpha$ *(но* $d(dx_1 \wedge dx_2) = 0$ *как по общему правилу: действие* d^2 *дает нуль, так и по конкретному его вычислению в примере). В связи с этим вспомните Замечания 2 и 3. Так как число слагаемых довольно большое, то можно ограничиться двумя слагаемыми и для них вычислить интеграл по* F *и убедиться в равенстве ответа с интегралом по* U *от суммы внешних дифференциалов выбранных слагаемых.*

.