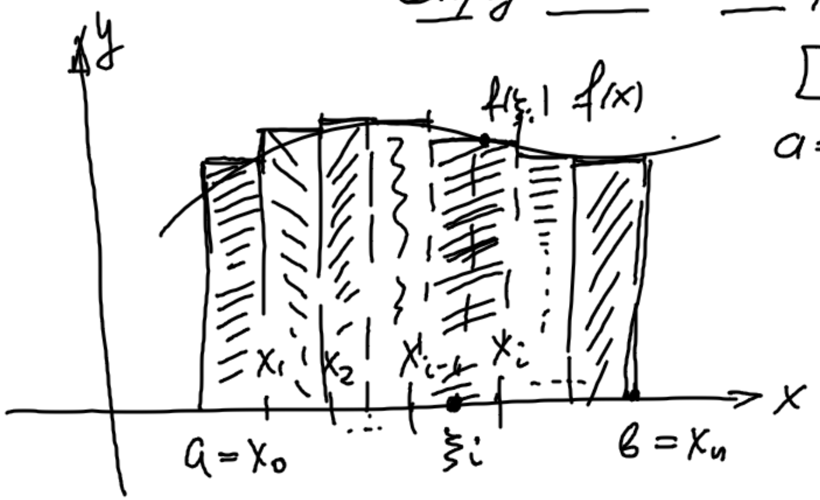
Лекция № III 03.03.2022.

## Определенный интеграл (Римана)




$[a; b]$ — отрезок

$a = x_0 < x_1 < \dots x_{i-1} < x_i < \dots x_n = b$

$\{x_i\}$ — разбиение отрезка

$\max\limits_{i=\overline{1,n}} |\Delta x_i| =: \lambda$ — диаметр разбиения.

$\xi_i$ — "метки"

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\{\xi_i; x_i\}$ — "размеченное разбиение"

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} = S_n(f; \xi_i; x_i)$$ — "интегральная сумма"

"площадь гребенки"

Идея 1.

"площадь гребенки" "примерно" равна площади под графиком функции.

Идея 2

Увеличить $n$ — количество "зубцов гребенки" и при этом $\lambda \to 0$ (не осталось "крупных кусков")

Определение Если существует предел при $n \to \infty$ и $\lambda \to 0$ $S_n(f; \xi_i; x_i)$ (не зависящий от выбора точек $x_i$ и $\xi_i$) то этот предел называется определенным интегралом (Римана) функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Он обозначается $\int_a^b f(x)dx$ и его геометрический смысл – площадь под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (эта фигура называется "криволинейной трапецией")

**Теорема (б/д)** (достаточное условие интегрируемости функции)

Если $f \in C[a;b]$ то $f \in R[a;b]$.
(Непрерывная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке)

Замечание 1. Функция $f(x)$ называется "интегрируемой по Риману" на отрезке $[a;b]$ и это записывают так: $f \in R[a;b]$.

Замечание 2 Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x\text{ – иррац. число} \\ 1, & x\text{ – рацион. число} \end{cases}$$

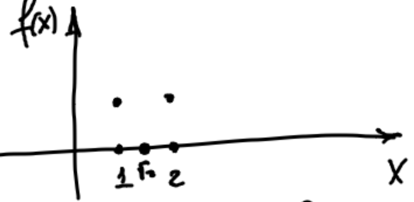
не интегрируема по Риману ни на каком отрезке.

В самом деле $\{x_i\}$ – произвольное, $[a;b]$ – любой.

Если все $\xi_i$ – рацион. числа, то $S_n(D(x); \xi_i; x_i) = (b-a)$

Если все $\xi_i$ – иррацион. числа, то $S_n(D(x); \xi_i; x_i) = 0$.

Предел зависит от выбора точек $\xi_i$ $\Rightarrow$ это недопустимо. $\Rightarrow \Delta$.




Основной результат этого раздела:

**Теорема** (Ньютона – Лейбница)

Если $f(x)$ – непрерывна на отр. $[a;b]$, то у нее существует первообразная $F(x)$ и

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример:


$$S = \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

**Теорема** (*) (необходимое условие интегр-ти функции по Риману)

Если $f(x) \in R[a;b]$ (интегр. по Р. на $[a;b]$) то она ограничена на этом отрезке.

"Док-во" Пусть $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} S_n = J$ (число) $= \int_a^b f(x)dx$ $\Rightarrow$ берем $\varepsilon = 1$ и получаем

$$|S_n - J| \le 1$$

при всех разбиениях диаметром меньше $\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0(1)$

Предположим противное

$f(x)$ – не огр. на $[a;b]$

$$\Rightarrow |S_n| \le |J| + 1$$

и меняем точки $\{\xi_i\}$ и добиваемся того, что

$|S_n| > 2|J|$ потому что $f(x)$ по предположению не ограничена на отрезке

$\Rightarrow$ Противоречие $\Delta$.

Замечание Пример функции Дирихле показывает, что необходимое условие не является достаточным.

(Не всякая ограниченная функция будет интегрируемой по Риману)

Просто для сведения Критерий Лебега

$(f \in R[a;b]) \Leftrightarrow$ (1) $f \in B[a;b]$ 2) имеет "мало" точек разрыва)

**Замечание** Если $f(x) \in B[a;b]$ (ограничена на отрезке) и имеет конечное множество точек разрыва, то она интегрируема по Риману.

## Свойства определенного интеграла Римана

**Теорема 1)** Если $f, g \in R[a;b]$; $\alpha, \beta$ — произвольные числа, то $\alpha f + \beta g \in R[a;b]$

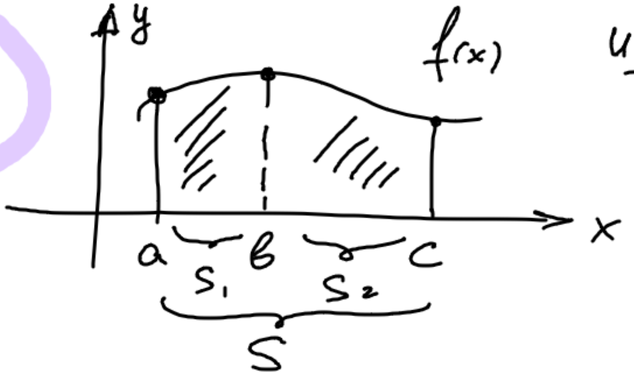
и $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$ (см. как было для неопр. интеграла)

Следует из арифметических свойств предела.

(**) **Теорема 2** Если $f \in R[a;b]$ и $f \in R[b;c]$ то $f \in R[a;c]$ и

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$$

иллюстрация




для площадей $S_1 + S_2 = S$

**Следствие**

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (очевидно (?))

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

(***) **Теорема 3** (о среднем)

1) Если $f \in R[a;b]$ то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

где $\underbrace{m = \inf_{[a;b]} f(x) \quad M = \sup_{[a;b]} f(x)}_{\text{существуют в силу теоремы (*) (необх. условие инт-ти)}}$

**Док-во**

$$m\underbrace{\sum \Delta x_i}_{b-a} \le S_n(\sim) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le M \underbrace{\sum \Delta x_i}_{(b-a)}$$

$\Longrightarrow$ переходя к пределу

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

2) Если $f \in C[a;b]$ то $\exists c \in [a;b]$ т. что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Док-во Уже установлено в 1-м пункте: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

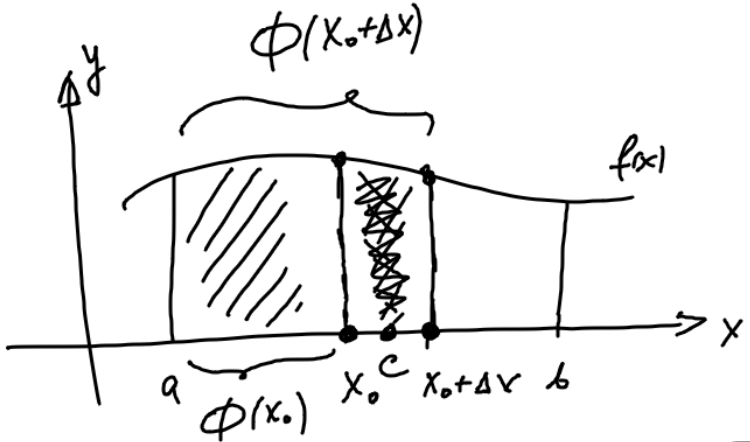
$m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$; $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ (т.к. функция $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a;b]$ по условию п.2) она принимает min и max значения)

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ — получили "промежуточное значение" (между $m$ и $M$)

и по свойству функции, непрерывной на отрезке, принимать все свои "промежуточные значения"

$\exists c \in [a;b]$, что $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

ч.т.д.




**Теорема 4'**

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$ — определенный интеграл с переменным верхним пределом.

**Теорема 4** Если $f\in C[a;b]$ то $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $(a;b)$

т.е. $\forall x_0\in[a;b]\ ((a;b))$

$$\Phi'(x_0)=f(x_0)$$

**Док-во**

$$\Phi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x}$$ — по опр-ю.

$$\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt\overset{\text{Теорема 2}}{=}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt=$$

$$\overset{\text{Теорема 3}}{=} f(c)\cdot\Delta x\Rightarrow\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(c)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}f(x_0)$$

в силу непрерывности функции $f(x)$

$\Rightarrow c\to x_0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x_0) \quad \text{ч.т.д.}$$

---

<u>Теорема</u> 5 (формула Ньютона-Лейбница) Пусть $f \in C[a;b] \Rightarrow$ тогда

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad \text{где } F(x) \text{ (любая) первообразная для } f(x)$$

<u>Док-во</u>

Мы установили в <u>теореме</u> 4 что $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ – первообразная для $f(x)$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{какая-то}}}{F(x)} + C \quad \text{но} \quad \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow \boxed{C = -F(a)} \;!!$$

$$(\forall x \in [a;b]) \Rightarrow \boxed{\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt - F(a)}$$

$$\Rightarrow \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \Rightarrow$$ теорема Ньютона – Лейбница доказана.

$\Rightarrow$ Следствие (замена переменной в определенном интеграле Римана)

**Теорема 6**

Пусть $\varphi(t): [\alpha; \beta] \to [a; b]$; $\varphi(\alpha) = a$ $\varphi(\beta) = b$; $\varphi$ – дифф-ма на $(\alpha; \beta)$, непрерывная на $[\alpha; \beta]$ и $\varphi'(t) > 0$

Пусть $f$ – непрерывна на отрезке $[a; b]$

Тогда
$$\int_a^b f(\varphi)d\varphi = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F\Big|_a^b$$

Док-во

Следует из формулы Ньютона – Лейбница и свойств неопр. инт-ла

Примеры
$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx = \int_2^3 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

Теорема 7

Пусть $u(x)$ и $V(x)$ — непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и их производные $u'(x)$ и $V'(x)$ — непрерывны на $[a;b]$

Тогда

$$\int_a^b u(x)V'(x)dx = u(x)\cdot V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)u'(x)dx$$

Док-во

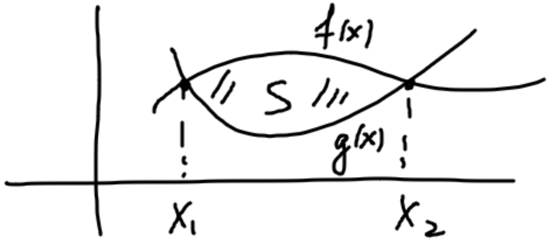
Теорема следует из формулы Ньютона-Лейбница и свойств неопределенного интеграла (первообразной)

$$\int_3^5 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_3^5 - \int_3^5 x\,d(\ln x) = 5\ln 5 - 3\ln 3 - \int_3^5 dx =$$

$$= \ln\frac{5^5}{3^3} - 2 = \ln\left(\frac{125}{27e^2}\right)$$

Далее — <u>приложения</u> <u>определенного</u> <u>интеграла</u>:

## (I) Площади фигур




$$\Rightarrow S = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

### Пример

$y = 4 - x^2$

$y = 2 - x$


$4 - x^2 = 2 - x$

$0 = x^2 - x - 2$

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

$$S = \int_{-1}^{2} \big((4 - x^2) - (2 - x)\big)\,dx = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\,dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$