Лекция 24.03.2022.

Опр 1

<u>Было:</u> $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ т-что для всех точек $M(x,y)$ таких, что

$$0 < d(M;M_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

<u>Замечание 1</u>

Определение почти такое же, что и раньше.

Практически все свойства предела сохраняются.

<u>Упражнение</u>

переписать док-ва.

$$d(M;M_0) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

(например, единственность $\Rightarrow$ предел не зависит от направления по которому $M \to M_0$)

<u>Опр 2</u>: Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

<u>Замечание 2</u>

Сохраняются свойства непрерывных функций.

<u>Например</u> $f, g \in C(M_0) \Rightarrow f+g \in C(M_0)$; $f \cdot g \in C(M_0)$; и т.д.

Если $f \in C(M_0)$ то $\exists \delta > 0$ и $C > 0$ т-что

$|f(M)| < C$ $\forall M \in U_\delta(M_0)$

(так записано условие $d(M;M_0) < \delta$)

Определение 3 Функция $f(M)$ называется **дифференцируемой** в точке $M_0(x_0, y_0)$ если

(A, B – числа)

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(M) \cdot d(M; M_0)$$

$\alpha(M) \to 0$ при $M \to M_0$ – бесконечно малая функция.

(Было $y = f(x)$ $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(x)$; $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$)

$\left(A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} =: f'(x_0)\right)$

Из определения следует, что:

если $\Delta y \equiv 0$ $d(M; M_0) = \Delta x$ и тогда $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} =: f'_x(M_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

частная производная функции $f(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$

Если $\Delta x \equiv 0$ (x – фиксировано $= x_0$)

$d(M; M_0) = \Delta y$ и тогда

$$B = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} =: f'_y(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

– частная производная функции $f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$

Из определения дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ следует, что частные производные существуют.

<u>Важное</u> <u>замечание</u> Для функции двух (и большего числа) переменных обратное утверждение неверно.

Мы приведем пример функции, у которой в точке $M_0(x_0, y_0)$ существуют частные производные $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, но при этом эта функция будет даже разрывна.

Сначала

<u>Теорема 1</u> Если $\underbrace{f \in D(M_0)}_{\text{дифф. в т. } M_0}$ то $\underbrace{f \in C(M_0)}_{\text{непр. в т. } M_0}$. (Раньше, для функции одной переменной, было так же)

Док-во:

Записываем определение $\Delta f = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\cdot\Delta y + \alpha(M)\cdot d(M; M_0)$

Если $d(M; M_0) \to 0$ то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\Rightarrow$ $\Delta f \to 0$ при $d(M; M_0) \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ $\triangle$.

Ранее, для функции одной переменной, было установлено, что обратное утверждение неверно: $y = |x|$ — непрерывна всюду, но **не** дифф-ма в т 0.

Замечание

Для функции двух переменных аналогично — — обратное утверждение неверно.

Пример $z = |x| + |y|$ — "четырехугольная пирамида, поставл. на вершину" — функция непрерывна в т. $(0,0)$

у этой функции нет частных производных в т $(0,0)$

Обещанный ранее пример функции, у которой есть частные производные в т. $(0;0)$, но она в этой точке разрывна (а потому заведомо не может быть дифференцируемой)

Пример ⊛

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ или } y = 0 \\ 1, & x \neq 0 \text{ и } y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f'_x(0) = 0 \text{ и } f'_y(0) = 0 \text{ (проверить!)}$$

но $f(x,y)$ разрывна в т. $(0;0)$

Итог $f \in D(M_0) \Longrightarrow \exists\, f'_x(M_0),\ f'_y(M_0)$

$\cancel{\Longleftarrow}$

в обратную сторону неверно.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости) (б/д)

Пусть в т. $M_0(x_0, y_0)$ у функции $f(x,y)$ существуют частные производные $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$

и частные производные **непрерывны** в т. $M_0(x_0, y_0)$

Тогда функция $f(M)$ дифференцируема в т. $M_0(x_0, y_0)$

Замечание* Это условие **не** является необходимым.

Пример (**) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ 0,\ x=y=0 \end{cases}$

Дифф.-на в $(0,0)$

имеет ч.пр. в $(0,0)$, но **они** разрывны.

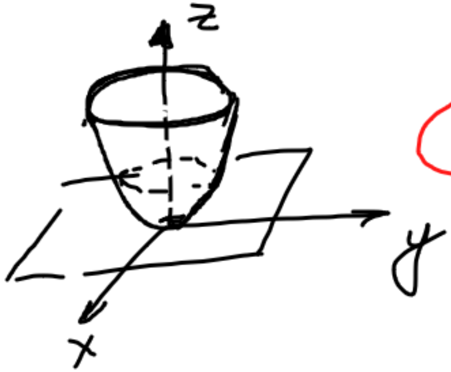
Итог Необх. условие дифф-ти ф-ции $f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

1) — существование ч. производных **Не** является (*) достаточным.

2) Достаточное условие дифф-ти функции $f(M)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$ — непрерывность частных производных **Не** является (**) необходимым.

Геометрический смысл дифференцируемости функции $f(x, y)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$

— существование касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$



$z = x^2 + y^2$ в т. $M_0(0,0)$ касательная плоскость $z = 0$

$z = |x| + |y|$

Нет касательной плоскости в $M_0(0,0)$

Раньше было $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ — уравнение касательной прямой

у дифференцируемой функции

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$df = f'(x_0)\Delta x \equiv f'(x_0)dx$$

дифференциал.

Теперь

$$\Delta f \approx A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y \qquad A = f'_x(M_0) \quad B = f'_y(M_0)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta z = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0)$$

$= z - z_0$

$(z_0 = f(x_0, y_0))$

$$\underbrace{z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{уравнение касательной плоскости к графику ф-ции } f(x,y) \text{ в точке } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3}$$

Примеры на нахождение частных производных

1) $z = x^2+y^2 \qquad z'_x = ?$ считаем, что y – не меняется; (т.е. $\Delta y \equiv 0$) и берем обычную производную.

$y=1 \Rightarrow z = x^2+1 \Rightarrow z'_x = 2x$

$y=2 \Rightarrow z = x^2+4 \Rightarrow z'_x = 2x$

$z'_y = ?$ (не меняется x!!) $\Delta x \equiv 0$

$x=3 \Rightarrow z = 9+y^2 \Rightarrow z'_y = 2y$

$\vdots$

$x=c \Rightarrow z = c^2+y^2 \Rightarrow z'_y = 2y$

Вывод

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

---

2) $z = x\cdot y \Rightarrow$
$y=1 \quad z=x$
$y=2 \quad z=2x$
$y=k \quad z=kx$
$\Rightarrow z'_x = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ k \end{cases}$

$\boxed{z'_x = y}$

$\boxed{z'_y = x}$

---

3) $z = x/y$

$z'_x = \frac{1}{y}$

$z'_y = x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}$

4) $z = x^5 \cdot y^6$

$z'_x = 5x^4 \cdot y^6$

$z'_y = x^5 \cdot 6y^5$

5) $z = x^y$

Если ищем z'_x то y считаем константой

$(x^c)' = cx^{c-1}$ $\quad (x^5)' = 5x^4$

$z'_x = y \cdot x^{y-1}$

Если ищем z'_y, то x считаем константой

Важный пример!

$(a^y)' = a^y \cdot \ln a$ (Вспомнить таблицу производных!)

$\Rightarrow z'_y = x^y \cdot \ln x$

Замечание

Как и раньше, выражение $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ – главная линейная часть приращения функции – называется (первым) дифференциалом ф-ции $f(x,y)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot \Delta y$$

Для независимых переменных x и y $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ $\Rightarrow$

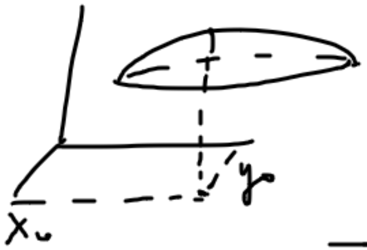
$$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy$$

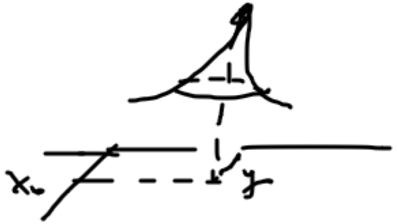
Позже мы повторим свойства дифференциала.

Экстремум функции двух переменных

Определение. Говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ у функции $f(M)$ имеется локальный максимум, если существует такая окрестность $U(M_0)$, что

$$\forall M \in U(M_0) \quad f(M) \le f(M_0)$$





Аналогично дается определение лок. минимума (и строгих лок max и min)

Теорема (аналог т. Ферма) (Необходимое условие экстремума функции 2-х переменных)

Пусть в т. $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(M)$ имеет лок. экстр.

и $f \in D(M_0)$

Тогда $f'_x(M_0) = 0$ и $f'_y(M_0) = 0$.

Док-во Следует из обычной теоремы Ферма для функций одной переменной $\Phi(x) = f(x, y_0)$

и $G(y) = f(x_0, y)$ Δ.