Лекция 10.03.2022

Приложения определенного интеграла.

Напоминание: Формула Ньютона-Лейбница

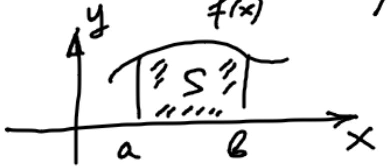
Если $f \in C[a;b]$ (непрерывна на отрезке), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$)

Были теоремы о замене переменной в определенном интеграле и об интегрировании по частям.

Было сказано, что определенный интеграл (Римана) функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ равен "площади под графиком $f(x)$" = "криволинейная трапеция"



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Задача на сегодня: Приложения

1) Площадь фигуры (1) $y = f(x)$ 2) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 3) $r = r(\varphi)$, $\varphi = \varphi(r)$

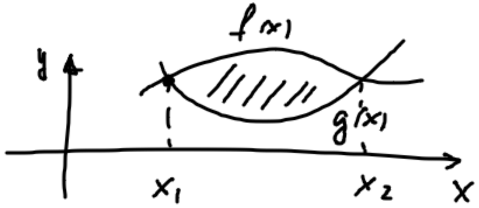
разные способы записать границу фигуры.

2) Объемы

3) Длина кривой.

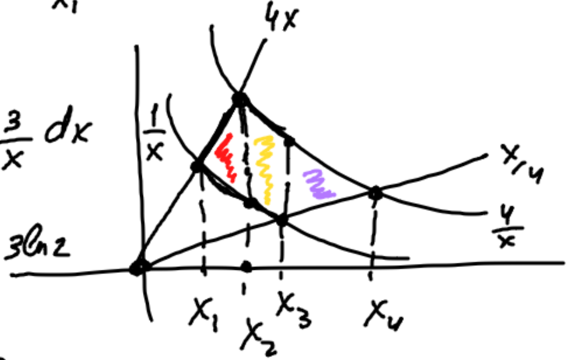
§ 1 Площадь фигуры

1) $y = f(x)$, $y = g(x)$



$$S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,dx$$ (площадь "со знаком")

Задача:



$y = 4x$ $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{x}{4}$ $y = \frac{4}{x}$

x_1: $\frac{1}{x} = 4x \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$ $x_1 = \frac{1}{2}$

x_2: $4x = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 1$ $x_2 = 1$

x_3: $\frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 4$ $x_3 = 2$

x_4: $\frac{x}{4} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 16$ $x_4 = 4$

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = \int_{1/2}^{1} \left(4x - \frac{1}{x}\right)dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \ln x\right)\Big|_{1/2}^{1} = \left(2x^2 - \ln x\right)\Big|_{1/2}^{1} = 2 - \left(2\cdot\frac{1}{4} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln 2$$

$\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 \frac{3}{x}\,dx = 3\ln x\Big|_1^2 = 3\ln 2$$

$S_1 = 3/2 - \ln 2$

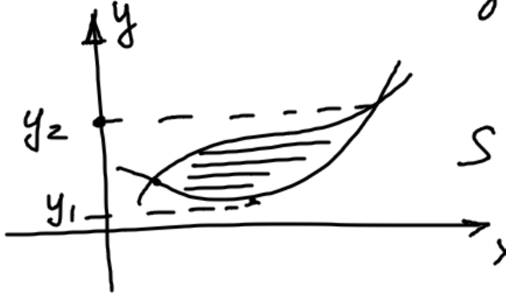
$S_2 = 3\ln 2$

$$S_3 = \int_{x_3}^{x_4} \left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right)dx = \left(4\ln x - \frac{x^2}{8}\right)\Big|_2^4 = \left(4\ln 4 - \frac{16}{8}\right) - \left(4\ln 2 - \frac{4}{8}\right) =$$

$$= 8\ln 2 - 4\ln 2 - \frac{12}{8} = 4\ln 2 - 3/2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 6\ln 2$$

Замечание: Можно записать площадь и так:



$$S=\int_{y_1}^{y}\Big(\underbrace{\psi(y)}_{x_1(y)}-\underbrace{\psi(y)}_{x_2(y)}\Big)dy$$

2) Если граница "области" (фигуры) задана кривой в параметрической записи, то (*)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$x^2+y^2=R^2 \Leftarrow \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t\in[0;2\pi]$$

Окружность

(*) $$S=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\underbrace{dx}_{x'(t)dt}=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt$$ по теореме о замене переменной.

Пример

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Эллипс (было в 1-м семестре)

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad t\in[0;2\pi]$$

Найдем площадь "четвертинки" эллипса

S_1: $x\in[0;a]$, $y\in[0;b]$

$$S=\int_0^a y(x)dx=\int_{\pi/2}^{0} y(t)\cdot x'(t)dt=\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=\int_0^{\pi/2} ab\cdot\sin^2 t\,dt =$$

$$y(x(t))=y(t)$$

Было свойство $$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

Формула понижения степени $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = ab\cdot\frac{\pi}{4} + 0 \Rightarrow \underline{S = 4S_1 = \pi ab}$$

$$\boxed{\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = 0}$$

площадь эллипса нашли.

Замечание

Аналогично можно записать, что

$$S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,y'(t)\,dt$$

$$dy = y'(t)\,dt$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t)y'(t) + y(t)x'(t)\right)dt$$

встречается в книгах.

3 Если кривая задается в полярных координатах $r = r(\varphi)$, то

Теорема

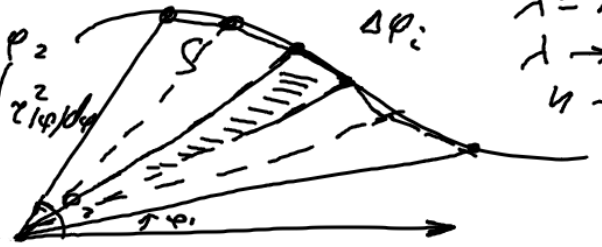
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

$r(\varphi)$ – непрерывная функция

"Идея доказательства"

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \to S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r(\varphi_i + \Delta\varphi_i)\, r(\varphi_i)\,\Delta\varphi_i$$



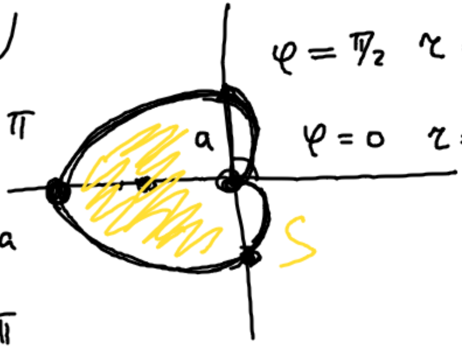
$\lambda = \max(\Delta\varphi_i)$

$\lambda \to 0$

$n \to \infty$

Пример "кардиоида" кривая, "похожая" на "сердце"

$r = a(1-\cos\varphi)$



$$J_1 = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi +$$

$$+ \underbrace{\frac{a^2}{8}\cdot\sin 2\varphi\Big|_0^\pi}_{=0} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Кривая симметрична

Половина площади $S_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi =$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^\pi \left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \underbrace{\frac{a^2}{2}\cdot\varphi\Big|_0^\pi}_{\frac{\pi a^2}{2}} - \underbrace{a^2\sin\varphi\Big|_0^\pi}_{=0} + \underbrace{\frac{a^2}{2}\int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi}_{=J_1}$$

$$S_1 = \frac{3}{4}\pi a^2 \Rightarrow S = \frac{3}{2}\pi a^2$$

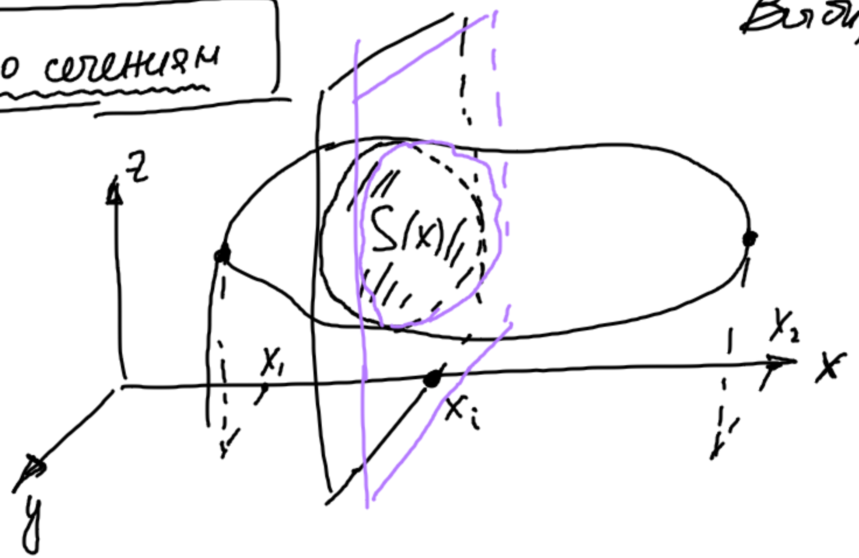
§2 Объемы (тел)

① По сечениям

Теорема:

$$V=\int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx$$

где $S(x)$ – площадь сечение тела плоскостью, перпендик. оси Ox.



Выбираем направление оси Ox

Берем плоскости $\perp Ox$ (они $\parallel$ между собой)

Рассматриваем сечения тела этими плоскостями;

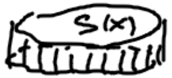
площадь фигуры в сечении $S(x)$

Если взять две близкие плоскости, то заключенный между ними объём тела $\approx S(x_i)\Delta x_i$

($\{x_i\}$ – разбиение отрезка $[x_1, x_2]$)

$$\Rightarrow V\approx\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i \to \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx$$

если предел существует.



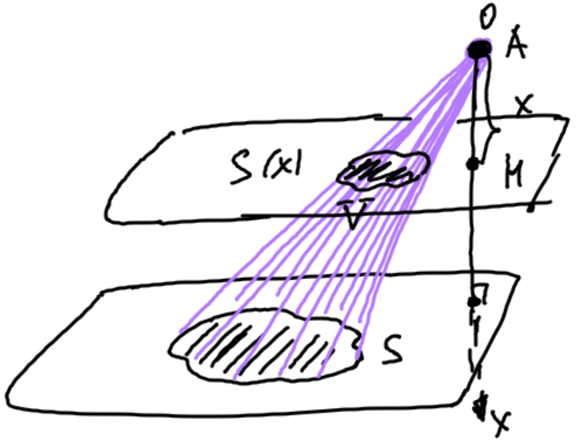
$\Delta V_i \approx S(x_i)\Delta x_i$

$\{x_i; \xi_i\}$

$\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow$ формула пояснена

Пример

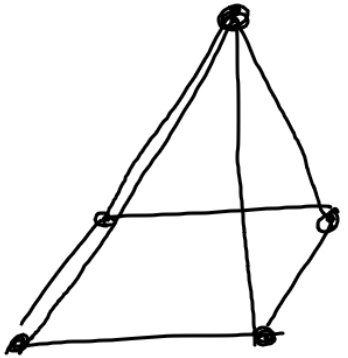
Объём пирамиды (тела внутри конической поверхности)



В силу подобия фигур

$$\frac{S(x)}{S} = k^2 = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

$$S(x) = \frac{x^2}{H^2} \cdot S$$



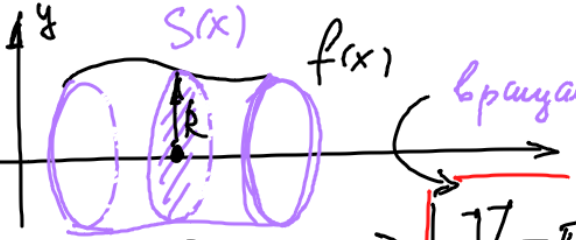
$$\Rightarrow V = \int_0^H \frac{x^2}{H^2} \cdot S\,dx = \frac{x^3}{3} \cdot \frac{S}{H^2}\Big|_0^H = \frac{S \cdot H}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot S \cdot H}_{\text{см как в школе.}}$$

② Объём тела вращения

используя предыдущий пункт

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx$$

Но важное сечение – это круг радиуса $f(x) \Rightarrow S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$

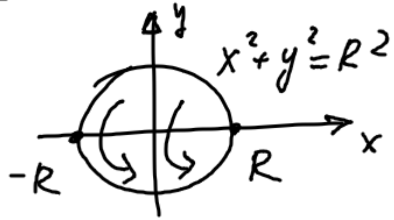


вращаем вокруг оси Ox.

$$\Rightarrow \boxed{V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx}$$

Пример **Объём шара** радиуса R.

Возьмем окружность $x^2+y^2=R^2$ и начнем вращать вокруг оси Ox.



$$\Rightarrow \quad V=\pi\int_{-R}^{R} y^2(x)\,dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx = \text{в силу чётности}$$

$$=2\pi\int_{0}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=$$

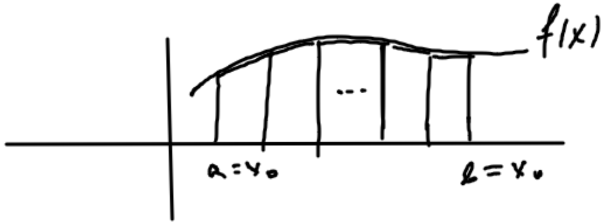
$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}R^3=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

---

§3 Длина кривой

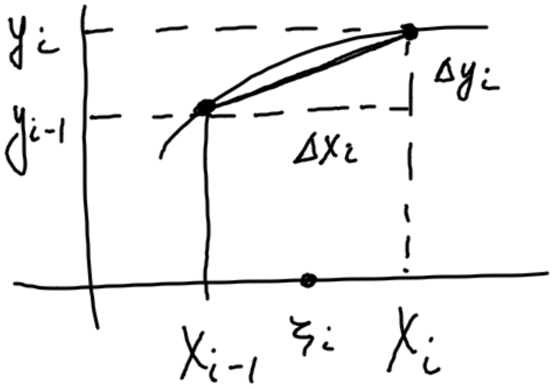
1. Кривая задана уравнением $y=f(x)$ $x\in[a;b]$
функция $f\in C[a;b]$ и $f\in D(a;b)$ и $f'(x)\in C[a;b]$ (**)
($f(x)$ имеет непрерывную на $[a;b]$ производную).



Разбиваем отрезок на (мелкие) части $\{x_i\}$ $(i=\overline{1,n})$

Если существует предел длин ломаных, вписанных в кривую, построенных по нашему разбиению при $\lambda\to 0$ $(\lambda=\max\Delta x_i)$ (и $n\to\infty$), то этот предел L

называется <u>длиной</u> <u>кривой</u> (заданной ур-ем $y=f(x)$, $x\in[a;b]$)
а сама кривая называется <u>спрямляемой</u>.



по теореме Пифагора

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\cdot \Delta x_i$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)\cdot \Delta x_i$$

по теореме Лагранжа

Непрерывная на $[a;b]$ функция.

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\cdot \Delta x_i \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

<u>Получена</u> интегральная сумма.

Этот интеграл существует в силу достаточного условия интегрируемости по Риману (было б/д)

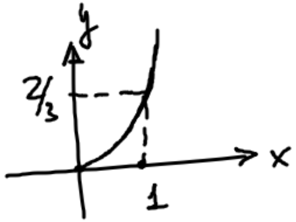
<u>Теорема</u> Если $\boxed{f(x) \text{ — непрер. дифф-ма на } [a;b]}$ (**)

то $\exists\ L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ — длина кривой

Пример

Пусть $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ $\quad x \in [3;8]$

$$f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow L = \int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_4^9 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_4^9 =$$



$$= \frac{2}{3}\left(3^3 - 2^3\right) = \frac{2}{3}\cdot 19 = \frac{38}{3}$$

Замечание

Длина кривой приводит к "сложным" интегралам.

§ 2 В параметрической записи

$x = x(t)$, $y = y(t)$ $\Rightarrow$ $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$ — так иногда пишут физики

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'_x(x))^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (f'_x dx)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

Теорема

(x'_t, y'_t – непрер. на $[t_1 t_2]$) $\quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}_t)^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt$

Пример $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ окружность $\Rightarrow$ $L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = \underbrace{R\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi R}_{\text{длина окр-ти.}}$

Замечание Уже в случае эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

интеграл $L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$ не выражается через элементарные функции.

п3. В полярных координатах $\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $dx = \dots$, $dy = \dots$

подставим в формулу

$$L = \int\limits_{M_1}^{M_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$x = r\cos\varphi \qquad dx = d(r\cos\varphi) = r\,d\cos\varphi + \cos\varphi\,dr = -r\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,dr$$

$$(dx)^2 = \underline{r^2\sin^2\varphi(d\varphi)^2 - \cancel{2r\sin\varphi\cos\varphi\,dr\,d\varphi} + \cos^2\varphi(dr)^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad dy = d(r\sin\varphi) = r\,d\sin\varphi + \sin\varphi\,dr = r\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,dr \qquad +$$

$$(dy)^2 = \underline{r^2\cos^2\varphi(d\varphi)^2 + \cancel{2r\sin\varphi\cos\varphi\,dr\,d\varphi} + \sin^2\varphi(dr)^2}$$

$$(dx)^2+(dy)^2 = r^2(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1})(d\varphi)^2 + (\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1})(dr)^2 = r^2(d\varphi)^2 + (dr)^2$$

$$\Rightarrow L = \int_{M_1}^{M_2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(d\varphi)^2+(dr)^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(\varphi)+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + (\varphi'_r)^2}\, dr$$