КОНФОРМНОСТЬ В СМЫСЛЕ М.ГРОМОВА И ГОЛОМОРФНОСТЬ

В.А. Зорич
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Семинар по комплексному анализу
Математического института им. В.А. Стеклова
21. 02. 2022

Аннотация доклада

М.Громов расширил понятие конформного отображения, сделав его пригодным и для отображений пространств разной размерности.

Например, любая целая голоморфная функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ задаёт отображение, конформное в смысле Громова.

Тривиальным, но поясняющим примером отображения, конформного в смысле Громова, может служить прямая проекция евклидова пространства на плоскость.

Мы напомним определение конформности отображения в смысле Громова, затем рассмотрим отображение $w = f(z_1, ..., z_n)$, конформное в смысле Громова, и укажем критерий его голоморфности.

Голоморфная функция $w = f(z)$ как конформное отображение

Геометрический смысл модуля $|f'(z)|$ и аргумента $\arg f'(z)$ производной $f'(z)$ голоморфной функции.

Не независимость!

Изотропность растяжений влечёт сохранение величин углов.

Конформность по М.Громову

Отображение пространств разной размерности

Отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $m \geq n$, называется конформным в смысле Громова, если оно в каждой точке переводит бесконечно малый шар прообраза в бесконечно малый шар образа.

Определение естественно распространяется на отображение областей любых римановых многообразий.

ПРИМЕРЫ отображений, конформных в смысле Громова:

Ортогональная проекция $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (пусть $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$).

Голоморфная функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от $n \geq 1$ переменных.

Формулировка основного утверждения

Предварительные замечания

Локальная структура отображения $w = f(z_1, ..., z_n)$ вещественного ранга 2. (Здесь $f : D_z \to D_w$, где $D_z \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ и $D_w \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.)

Слои и проектирование вдоль слоёв.
Простейший пример $P : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$. Нагляднее $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Собственное вещественно двумерное направление в точке: трансверсальное и ортогональное слою проектирования в этой точке.

Малая площадка собственного направления гомеоморфно отображается в плоскость образа. Но это имеет место для любой площадки, трансверсальной слоям проектирования. Выделенность собственного направления состоит в том, что если исходное отображение конформно в смысле Громова, то его ограничение на собственное направление оказывается локально конформным в соответствующей точке. Точнее, дифференциал отображения, ограниченный на собственное направление в точке, переводит круги в круги, т. е. комплексно линеен или комплексно антилинеен.

Комплексное собственное направление (вдоль комплексной прямой).

Критерий голоморфности отображения, конформного по Громову

ТЕОРЕМА.

Отображение $w = f(z_1, ..., z_n)$, конформное в смысле Громова, голоморфно тогда и только тогда, когда его собственные направления идут вдоль комплексных прямых.

Разумеется, здесь отображение $f : D_z \to D_w$ такое, как было описано выше, гладкое и вещественного ранга 2. Отметим ещё, что конформность отображения в смысле Громова не следит за ориентацией, поэтому для точности формулировку теоремы следует дополнить указанием на то, что отображение $w = f(z_1, ..., z_n)$ либо голоморфно, либо приводится к голоморфному заменой каких-то из переменных сопряжёнными величинами.

Схема доказательства

Полезное напоминание

Начнём с одного полезного напоминания.

Если взять пару двумерных плоскостей общего положения в трёхмерном евклидовом пространстве, то при прямом проектировании одной из плоскостей в другую круги исходной плоскости преобразуются в эллипсы, не в круги.

Если же это плоскости в комплексном пространстве, идущие в комплексных направлениях (т.е. пара пересекающихся комплексных прямых), то при прямом проектировании из одной плоскости в другую круг преобразуется снова в круг (конформность).

Пример: в пространстве $\mathbb{C}^2$ переменных (z_1, z_2) берём ось (плоскость) z_1 и любую комплексную прямую $z_2 = kz_1$.

Собственно доказательство теоремы

Берём пару точек w^0 и $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0)$, таких, что $w^0 = f(z^0)$.

Поскольку вещественный ранг отображения f всюду равен двум, как уже говорилось, можно считать, что малая окрестность O_{z^0} точки z^0 расслаивается на слои действительной размерности $2n - 2$, вдоль которых отображение f действует как проектирование (каждый такой слой проектируется в точку).

В окрестности O_{z^0} рассмотрим вещественно двумерную поверхность S_{z^0}, проходящую через точку z^0, трансверсальную и ортогональную слоям этого слоения.

Пока допустим, что такая интегральная поверхность имеется. Потом станет ясно, что это временное допущение не существенно, но, может быть, облегчает изложение, делая его наглядным.

13 / 22

Конформность на поверхности S_{z^0}

Поверхность S_{z^0} под действием отображения f преобразуется в некоторую область S_{w^0}, лежащую в плоскости $\mathbb{C}$ и содержащую точку w^0.

Поскольку отображение f конформно по Громову, сужение $f|_{S_{z^0}}$ отображения f на поверхность S_{z^0} переводит бесконечно малые круги в круги. Учитывая гладкость отображения f, можно заключить, что дифференциал этого отображения в каждой точке либо комплексно линеен, либо комплексно антилинеен (последнее, если отображение меняло ориентацию).

Переходя, если нужно, к сопряженной переменной $\bar{w}$, будем считать, что дифференциал комплексно линеен как отображение соответствующих касательных пространств.

14 / 22

Замечание о трансверсальной поверхности

Заметим, что если бы мы вместо поверхности S_{z^0} взяли поверхность $\tilde{S}_{z^0}$ не ортогональную, а просто трансверсальную слоению, вдоль которого отображение f осуществляет проектирование, то из конформности отображения f по Громову вовсе не следовало бы, что ограничение отображения f на поверхность $\tilde{S}_{z^0}$ переводит бесконечно малые круги в круги образа. В образе, вообще говоря, возникнет распределение эллипсов.

Но, если $\tilde{S}_{z^0}$ — голоморфная кривая в пространстве $\mathbb{C}^n$, то ситуация меняется. Рассмотрим именно этот случай.

15 / 22

Конформность в комплексных направлениях

Рассматриваем достаточность условия теоремы. По этому условию поверхность S_{z^0} в точке z^0 имеет направление комплексной прямой.

Пусть трансверсальная слоению поверхность $\tilde{S}_{z^0}$ в точке z^0 тоже имеет направление комплексной прямой.

Рассмотрим комплексные прямые, касательные к $\tilde{S}_{z^0}$ и S_{z^0} в точке z^0. Тогда (как мы напомнили) при прямом проектировании первой прямой (вещественной плоскости) на вторую круги переходят в круги.

Итак, в условиях теоремы дифференциал отображения f обладает тем свойством, что его ограничение на любую комплексную прямую, проходящую через точку z^0, либо комплексно линейно, либо комплексно антилинейно.

16 / 22

Голоморфность отображения $w = f(z_1, ..., z_n)$

Мы показали, что в условиях теоремы дифференциал отображения f обладает тем свойством, что его ограничение на любую комплексную прямую, проходящую через точку z^0, либо комплексно линейно, либо комплексно антилинейно.

А это, как известно, уже означает, что функция $f(z_1, ..., z_n)$ голоморфна, или становится голоморфной после замены некоторых из независимых переменных сопряжёнными величинами.

Мы проверили достаточность критерия голоморфности отображения $w = f(z_1, ..., z_n)$, конформного в смысле Громова.

Необходимость условия критерия очевидна, поскольку слои, вдоль которых невырожденное голоморфное отображение $w = f(z_1, ..., z_n)$ проектирует, оказываются комплексными многообразиями комплексной размерности $n - 1$. Трансверсальное и ортогональное им собственное направление отображения f, тем самым, тоже оказывается комплексным (идущим вдоль комплексной прямой).

17 / 22

Небольшой комментарий

Заметим, что утверждение теоремы локально, оно относится к дифференциалу отображения в точке, поэтому теорема, конечно, остаётся в силе и тогда, когда функция f определена на произвольном комплексном многообразии, наделённом эрмитовой структурой, не обязательно на $\mathbb{C}^n$.

Условие гладкости отображения, разумеется, можно ослаблять.

Известно, например, что если отображение $w = \varphi(z)$ квазиконформно и почти всюду $\varphi_{\bar{z}} = 0$, то отображение φ голоморфно.

Можно требовать существования локально интегрируемых обобщённых производных и условия $\varphi_{\bar{z}} = 0$. Такого типа утверждения обычно связывают с термином "Лемма Вейля".

Выбор конкретных условий, заменяющих гладкость отображения, конечно, диктуется рассматриваемой задачей.

18 / 22

Замечание об интегрируемости распределения собственных направлений

Мы говорили об отображении f, действовавшем из области $D_z \subset \mathbb{C}^n$ в область $D_w \subset \mathbb{C}$.

Простейшее отображение проектирования $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, конформное в смысле Громова, формально не такое.

Но если считать, что $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2$, что конформное в смысле Громова отображение P определено на подмногообразии $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^2$, то, всё же, собственное направление отображения P, ортогональное направлению проектирования, оказывается комплексным направлением в $\mathbb{C}^2$.

Более того, тут, очевидно, даже есть интегральная поверхность, ортогональная слоям, вдоль которых идёт проектирование.

Но распределение комплексных направлений не всегда интегрируемо.

Один пример и возможное развитие основной теоремы

Возьмём, например, отображение $H : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, индуцированное расслоением Хопфа. Напомним, что в комплексной записи $H(z_1, z_2) = z_2/z_1$, если $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Это отображение конформно в смысле Громова.

Окружности, на которые расслаивается сфера $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ под действием отображения H переходят в точки сферы $\mathbb{S}^2 = \bar{\mathbb{C}}$. Эрмитово ортогональные им собственные направления отображения H образуют распределение комплексных касательных к сфере $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Но это распределение не интегрируемо (у него нет интегральной поверхности, ортогональной слоям, вдоль которых отображение H осуществляет "проектирование").

Эти примеры подсказывают следующее обобщение изложенной теоремы.

Пусть отображение $f : M \to \mathbb{C}$, конформное в смысле Громова, определено на подмногообразии M пространства $\mathbb{C}^n$. Голоморфность такого отображения будем понимать как то, что оно является CR-функцией на M.

Расширенная формулировка критерия голоморфности

При такой трактовке понятия голоморфности отображения на многообразии, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Пусть отображение $f : M \to \mathbb{C}$, конформное в смысле Громова, определено на подмногообразии M пространства $\mathbb{C}^n$.
Если собственные направления отображения комплексны, то оно является CR отображением.

Место в геометрической теории функций

Дав описанное выше толкование конформности (квазиконформности) отображения, Громов, естественно, сразу же спросил о том, какие факты классической геометрической теории функций распространяются на такие отображения.

Например, верно ли, что если отображение $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ конформно (или квазиконформно) в смысле Громова и ограничено, то оно постоянно?

Такая теорема Лиувилля, действительно, имеет место.

Добавим, что для отображений $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, конформных или квазиконформных в смысле Громова, верна даже теорема пикаровского типа, о том, что если целая функция выпускает больше двух конечных значений, то она константа.

Внутренний механизм теорем типа теоремы Лиувилля.
Конформная ёмкость бесконечности и конформный тип многообразия.