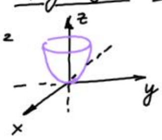
Лекция 17.03.2022 Функции многих переменных.

Пример: $z = x^2 + y^2$



В точке $M_0(0;0)$ у данной функции имеется минимум (строгий; даже "глобальный")

Необходимо для функции двух (и большего числа) переменных пройти тот же путь, что и для функции одной переменной $y = f(x)$.

Программа:

1). Определить предел $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(x,y)$ $M(x,y)$; $M_0(x_0 y_0)$ и установить, какие ранее доказанные свойства предела сохранятся.

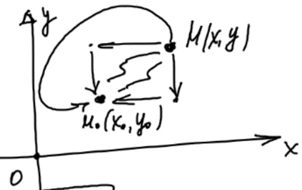
2). Дать определение непрерывной (в точке M_0 и на множестве D) функции; "передоказать" основные свойства непрерывных функций.

3) Ввести понятие дифференцируемости функции многих переменных. (В этом пункте произойдут значительные изменения по сравнению с функциями одной переменной)

4). Построить "теорию экстремума."

п5 — "интегральное исчисление" — на 2-м курсе для некот. спец.

п.1.



Дадим определение предела функции $f(x,y)$ при $M \to M_0$, где $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ — точки на числовой плоскости.

Теперь у нас есть сколько угодно "траекторий", по которым точка $M(x,y)$ может "приближаться" к т. $M_0(x_0 y_0)$.

$|MM_0|$

$\|$

$d(M;M_0) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0$

Чтобы не зависеть от этого "разнообразия путей", дадим такое

Определение I $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т.что $\forall M$, удовлетворяющих условию: $0 < d(M;M_0) < \delta$ выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Замечание

Множество точек плоскости $M(x,y)$ таких, что $0 < |MM_0| < \delta$

- это круг с центром в точке M_0
- радиуса $\delta > 0$
- "без границы" и с "выколотой" точкой $M_0(x_0,y_0)$

мы называем его "проколотая δ-окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$"

По аналогии с теорией пределов для функции одной переменной, мы можем дать определение бесконечно малой функции $\alpha(M)$ при $M \to M_0$:

Определение Функция $\alpha(M)$ называется бесконечно малой при $M \to M_0$ если $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$

В точности повторяя рассуждения 1-го семестра, можно доказать, что справедлива

Лемма: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A \iff f(M) = A + \alpha(M)$; $\alpha(M)$ – б.м.ф. при $M \to M_0$.

Так же, как и ранее, справедлива

Теорема 1 (о свойствах бесконечно малых функций)

1) Если $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ – б.м.ф. при $M \to M_0$, то $\alpha(M) + \beta(M)$ – тоже б.м.ф. при $M \to M_0$

2) Если $\alpha(M)$ – б.м.ф. и $\gamma(M)$ – лок. огр. (в некоторой окрестности т. M_0), то $\alpha(M) \cdot \gamma(M)$ – б.м.ф при $M \to M_0$

Доказательство Проделать в качестве упражнения.

С помощью леммы и теоремы 1 полностью аналогично случаю функции одной перем-й доказывается следующая:

Теорема 2 ("арифметика предела")

Пусть $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$; $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$;

Тогда

1) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) + g(M)) = A + B$

2) $\lim f(M) \cdot g(M) = A \cdot B$

3) Если $B \neq 0$ и $g(M) \neq 0$ то $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{A}{B}$

Док-во В качестве упражнения проделать самостоятельно, повторяя рассуждения из доказательства теоремы для функции одной переменной.

Замечание Можно повторить доказательства следующих утверждений

1) Если предел существует, то он единственный.

2) Если $\exists \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, то $\exists \dot{U}_\delta(M_0)$ и $\exists C > 0$ т.что $\forall M \in \dot{U}_\delta(M_0)$ $|f(M)| \leq C$

(то есть если у функции $f(M)$ есть предел при $M \to M_0$, то функция локально ограничена (в некоторой окрестности т. M_0))

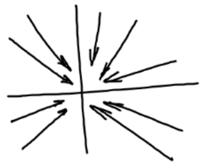
3) Предельный переход сохраняет знак в неравенствах.

4) "Лемма о зажатой функции" и т.д.

Замечание

1). Пусть $z = |x|+|y|$ тогда $\lim\limits_{M\to(0;0)} z(M) = 0$.

2). Приведем пример функции, у которой нет предела в точке $(0;0)$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

В силу единственности предела он не может зависеть от направления, по которому $M(x,y)$ стремится к $M_0(0,0)$

Но если сделать замену координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{то тогда} \quad f(x,y) = \begin{cases} \cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \\ 0, \ x=y=0 \end{cases}$$

и при разных углах φ (на разных лучах $y/x = \operatorname{tg}\varphi$) мы получим различные значения, что и означает отсутствие предела $f(x,y)$ при $M\to(0;0)$

Замечание

Более подробное изложение теории предела для функций многих переменных можно найти в курсе математического анализа для студентов математических факультетов

п2 Непрерывность функции двух переменных в точке.

Так же, как и ранее, дадим следующее

Определение II

Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$ если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$; обозначение $f\in C(M_0)$

Функция f называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке $M\in D$; обозначение $f\in C(D)$

Из свойств предела сразу же следует, что сумма, произведение и (при доп. условиях) частное двух непрерывных функций снова будет непрерывной функцией.

Точная формулировка (и доказательство) теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций в наш курс не входит

Замечание

а) Таким образом:

1) Функция $z=|x|+|y|$ — непрерывна в точке $M_0(0;0)$ (и в любой другой точке $M(x,y)\in\mathbb{R}^2$)

2) Функция $z=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$ — разрывна в точке $(0;0)$

б) Мы не будем пытаться классифицировать точки разрыва функций двух переменных.

в) В 1-м семестре была сформулирована (б/д)

Теорема (о свойствах функции $y=f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$)

1) Если $f\in C[a;b]$, то f — ограничена на $[a;b]$

"принимает наиб. и наим. значения"

2) Если $f\in C[a;b]$ то $\exists x_1,x_2\in[a;b]$ т.что $f(x_1)=\min\limits_{[a;b]}f(x)=m$, $f(x_2)=\max\limits_{[a;b]}f(x)=M$

"принимает все промежут. знач."

3) Если $f\in C[a;b]$ то $\forall C\in[m;M]$ $\exists x_0\in[a;b]$ т.что $f(x_0)=C$

Имеет ли место аналогичная теорема для функций многих переменных?

! Если вместо отрезка $[a;b]$ взять $(x,y)\in D=[a;b]\times[c;d]$ т.е. $x\in[a;b]$, $y\in[c;d]$

то указанная теорема будет выполнена для всякой $f\in C(D)$

Однако, можно взять и более сложные множества D. Например, "замкнутый" круг произвольного радиуса и т.д.

Строгая формулировка такова — теорема остается верной для произвольного замкнутого, ограниченного и связного множества $D\subset\mathbb{R}^2$, но мы не будем это доказывать.

Остается дать определение дифференцируемости функции двух переменных $f(x,y)$ в т $M_0(x_0,y_0)$ и научиться находить её производные.