Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 9 от 10.12.2021

Лектор Сабитов И.Х.

1 Бесконечно малые изгибания высших порядков

Пусть дана поверхность S с радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Рассмотрим ее деформации вида

$$S_t : \vec{r}_t(u, v) = \vec{r}(u, v) + 2t\vec{Z}_1(u, v) + 2t^2\vec{Z}_2(u, v) + ... + 2t^n\vec{Z}_n(u, v),$$

такие, что длины кривых на S_t изменяются на порядок $o(t^n), t \to 0$, по сравнению с длинами на исходной поверхности S. Такие деформации называются **б.м. изгибаниями порядка n.** Такие деформации появляются, например, как начальные части тейлоровского разложения аналитического по параметру изгибания поверхности. Условие $ds_t - ds = o(t^n), t \to 0$, приводит к необходимости выполнения системы уравнений $\begin{cases} d\vec{r}d\vec{Z}_1 = 0 \quad (1) \\ d\vec{r}d\vec{Z}_2 + d\vec{Z}_1^{\,2} = 0 \\ d\vec{r}d\vec{Z}_3 + 2d\vec{Z}_1 d\vec{Z}_2 = 0 \\ \dots \end{cases}$ По классическому определению, б.м.. изгибание порядка n называется **нетривиальным,** если первая его составляющая $\vec{Z}_1$ определяет нетривиальное поле б.м.изгибания 1-го порядка. Если поверхность допускает нетривиальное б.м. изгибание порядка n; говорят, что она **нежесткая** относительно б.м..изгибаний порядка n. Если она не допускает таких изгибаний, то говорят, что она обладает **жесткостью n-го порядка**. Но это терминология не совсем точная, так как в то же время она может оказаться изгибаемой. Этот парадокс объясняется тем, что в классике нет корректного определения тривиального б.м. изгибания порядка n, так как среди аналитических ло параметру изгибаний могут быть нетривиальные изгибания, начинающиеся с тривиального б.м. изгибания 1-го порядка $\vec{Z}_1$, т.е. их начальная тейлорова часть не подходит под определение нетривиального б.м изгибания высокого порядка. Поэтому мы ввели понятие нетривиального б.м. изгибания порядка $(k, n), k < n$. Деформация вида

$$\vec{r}_t(u, v) = \vec{r}(u, v) + 2t^k\vec{Z}_k(u, v) + 2t^{k+1}\vec{Z}_{k+1}(u, v) + ... + 2t^n\vec{Z}_n(u, v),$$

с условием $ds_t - ds = o(t^n), t \to 0$, называется **нетривиальным б.м. изгибанием порядка** (k, n), если поле $\vec{Z}_k$ является полем нетривиального б.м. изгибанияч 1-го порядка. Следовательно, нетривиальное в классическом смысле поле б.м. изгибания порядка n будет в нашем смысле нетривиальным полем б.м. изгибания порядка $(1, n)$ и жесткость n-го порядка означает отсутствие нетривиального б.м. изгибания порядка n. .

Если вместе с существующим б.м. изгибанием Z порядка ;(k, n) существует б.м.изгибание порядка $(k, n+1)$ с той же частью Z до степеней t^n, тогда говорят, что б.м. изгибание Z порядка $(k.n)$ **продолжается** (или **продолжимо**) до б.м. изгибания порядка $(k, n+1)$. Это определение очевидным образом распространяется на продолжимость до б.м. изгибания порядка (k, m) с любым $m > n + 1$.

Изучение б.м. изгибаний разных порядков сильно мотивировано в связи с их использованием для установления неизгибаемости поверхностей в классе аналитических по параметру изометрических деформаций (частично этот вопрос уже рассматривался в материале первой лекции). Покажем, что для изгибаемости поверхности в таком классе деформаций необходимо, чтобы поверхность допускала нетривиальное б.м. изгибание некоторого порядка $(k, n), n \geq k \geq 1$. Действительно, аналитическое по параметру изгибание по определению представляется в виде сходящегося степенного ряда, начинающегося с некоторой степени $k \geq 1$ параметра t:

$$\vec{r}(u, v; t) = \vec{r}(u, v) + 2\sum_{n=k\geq 1}^{\infty} t^n\vec{Z}_n,$$

для которого поле $\vec{Z}_k$ является полем нетривиального б.м. изгибания 1-го порядка. Тогда требование $ds_t - ds \equiv 0, \forall |t| < \varepsilon$ приводит к выполнению условия $ds_t - ds = 0(t^n)$ с любым $n \geq k$, а это и означает, что поверхность допускает б.м. изгибания порядка $(k.n)$. Но поскольку проверка нежесткости высокого порядка требует больших вычислений, то желательно иметь необходимые условия аналитической изгибаемости с проверкой нежесткости более низкого порядка. Одно условие - нежесткость 1-го порядка - очевидно, и из него получаем признак аналитической неизгибаемости: **если поверхность жесткая 1-го порядка, то она не допускает аналитических по параметру изгибаний.**

Менее прост второй признак аналитической неизгибаемости: **если поверхность жесткая 2-го порядка в классическом смысле, то она не допускает аналитических по параметру изгибаний.** Действительно, если есть аналитическая изгибаемость, тогда среди уравнений, обеспечивающих тождество $ds_t - ds \equiv 0$;, есть два уравнения

$$d\vec{r}d\vec{Z}_k = 0 \text{ (при степени } t^k), \ d\vec{r}d\vec{Z}_{2k} + d\vec{Z}_k^2 = 0 \text{ (при степени } t^{2k}),$$

которые означают, что поверхность допускает б.м. изгибания 2-го порядка вида

$$\vec{r}(u,v;\tau) = \vec{r}(u,v) + 2\tau\vec{Z}_k + 2\tau : 2\vec{Z}_{2k},$$

. с некоторым параметром τ, что противоречит условию ее жесткости 2-го порядка.

Теперь естественно спросить, связана ли аналитическая изгибаемость/неизгибаемость поверхности с ее жесткостью 3-го и последующих порядков. В классике известна следующая теорема, которую мы формулируем, используя наши обозначения:

Теорема (Н.В. Ефимов). Если поверхность жестка относительно б.м. изгибаний порядка (1,3) и не допускает двух линейно независимых полей б.м. изгибаний 1-го порядка, тогда из ее жесткости 3-го порядка в классическом смысле следует ее аналитическая неизгибаемость.

Док-во. Пусть есть аналитическая изгибаемость. Тогда система $\begin{cases} d\vec{r}d\vec{Z}_k = 0 \\ d\vec{r}d\vec{Z}_{k+1} = 0 \\ ... \\ d\vec{r}d\vec{Z}_{2k-1} = 0 \\ drd\vec{Z}_{2k} + d\vec{Z}_k^2 = 0 \\ drd\vec{Z}_{2k+1} + 2dZ_kdZ_{k+1} = 0 \\ ... \\ drdZ_{3k-1} + 2dZ_kdZ_{2k-1} + ... = 0 \\ d\vec{r}d\vec{Z}_{3k} + 2dZ_kdZ_{2k} + 2dZ_{k+1}dZ_{2k-1} + ... = 0 \end{cases}$

имеет решение с нетривиальным полем б.м. изгибания 1-го порядка $\vec{Z}_k$. Так как все поля б.м. изгибаний 1-го прядка по условию пропорциональны одному полю. то можем считать, что все они пропорциональны $\vec{Z}_k$, поэтому векторные поля $\vec{Z}_{k+1}, ..., \vec{Z}_{2k-1}$ можно представить в виде

$$\vec{Z}_{k+1} = c_1\vec{Z}_k, ..., \vec{Z}_{2k-1}c_{k-1}\vec{Z}_k$$

. Тогда группу уравнений

$$d\vec{r}d\vec{Z}_k = 0, \ d\vec{r}d\vec{Z}_{k+1} = 0, \ ... \ d\vec{r}d\vec{Z}_{2k-1} = 0$$

можно объединить в одно уравнение $(t^k + c_1t^{k+1} + ... + c_{k-1}t^{2k-1})d\vec{r}dZ_k = 0$. Введем новый параметр t_1 равенством $t_1^k = t^k + c_1t^{k+1} + ... + c_{k-1}t^{2k-1}$ и $t = t_1 + \sum_{m\geq 2} a_m t_1^m$. Относительно этого параметра рассматриваемое б.м. изгибание порядка $(k, 3k)$. порождает деформацию вида

$$\vec{r}(u,v) + 2t_1^k\vec{Z}_k + 2t_1^{2k}\vec{Z}_{2k} + 2t_1^{2k+1}\vec{Z}_{1,2k+1} + ... + 2t_1^{3k-1}\vec{Z}_{1,3k} + ...,$$

которая приводит к равенствам

$$d\vec{r}d\vec{Z}_{1,2k+1} = 0 \text{ при степени } t_1^{2k+1} = 0, ..., d\vec{r}d\vec{Z}_{1,3k-1} = 0 \text{ при степени } t_1^{3k-1} = 0,$$

Следовательно, поля $\vec{Z}_{1,j}, \ 2k+1 \leq j \leq 3k-1$, снова можем считать пропорциональными полю $\vec{Z}_k$, и вся сумма группы слагаемых от степени t_1^{2k+1} до степени t_1^{3k-1} оказывается равной нулю. Оставшуюся часть деформации $\vec{r} + 2t_1^k\vec{Z}_k + 2t_1^{2k}\vec{Z}_{2k} + 2t_13k\vec{Z}_{1,3k}$, дающую для длин изменение порчдка $o(t_1^{3k})$ можно рассматривать как нетривиальное б.м. изгибание порядка $(1,3)$, что противоречит условию жесткости 3-го порядка. Значит, аналитическое изгибание поверхности невозможно.

Эта теорема допускает обобщение на случай жесткости порядка $(1,m)$ с любым $m > 3$