Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 8 от 26.11.2021

Лектор Сабитов И.Х.

Прежде чем приступить к основной теме, завершим предыдущую лекцию выводом о том, что вопрос проверки жесткости/нежесткости и нахождение изгибающего поля любого многогранника сводится к решению некоторой однородной системы **линейных** уравнений. Действительно, для симплициального многогранника с n вершинами. надо найти n векторов поля б.м изгибания, т.е надо найти $3n$ компонент $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i), 1 \leq i \leq n$, для n векторов. Их связь с координатами вершин многогранника выражается уравнениями

$$(x_i - x_j)(\xi_i - \xi_l) + (y_i - y_j)(\eta_i - \eta_j) + (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_j) = 0......$$

для каждого ребра, соединяющего вершины с новерами i и j. Как мы знаем, число ребер равно $3n - 6 - 6g$, где g - топологический род многогранника ($g = 0$ для типа сферы). Но мы знаем также, что три вершины любой одной невырожденной грани можно считать закрепленными, следовательно, неизвестных компонент векторов поля б.м. изгибания равно $3n - 9$. При выводе этого заключения мы использовали уравнения б.м. изгибания на трех ребрах закрепленной грани, значит, уравнений осталось $3n - 9 - 6g$. В случае многограников типа сферы имеем $3n - 9$ неизвестных и $3n - 9$ уравнений. Система однородная, значит, для наличия у нее ненулевого решения (т.е. для нежесткости многогранника), необходимо и достаточно, чтобы определитель основной матрицы системы был равен нулю. Это и есть ответ на вопрос - как проверить жесткость/нежесткость многогранника рода 0. В остальных случаях надо использовать теорему Кронекера-Капелли, ..

Теперь рассмотрим отдельно случай выпуклых многогранников.

1 Жесткость выпуклых многогранников

1.1 Напоминание

Определение 1. **Выпуклый многогранник** - многогранник, у которого все внутренние двугранные углы не больше π

Определение 2. Многогранник является **строго выпуклым**, если все внутренние двугранные углы строго меньше π

Определение 3. Уравнение поля бесконечно малых изгибаний в случае многогранника принимает вид:

$$\overrightarrow{M_iM_j} \perp (\overrightarrow{Z_i} - \overrightarrow{Z_j}) \text{ или } (\overrightarrow{M_iM_j}, (\overrightarrow{Z_i} - \overrightarrow{Z_j})) = 0,$$

где M_i - вершины многогранника, $\overrightarrow{Z}$ - поле б.м. изгибания

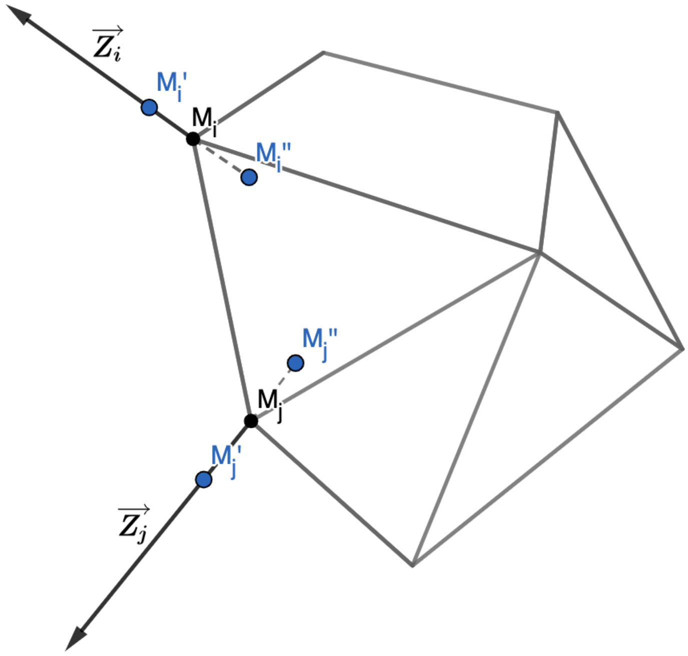

Рис. 1: Поле изгибаний многогранника

1.2 Теорема

Теорема 1. *Строго выпуклые многогранники не допускают нетривиальных бесконечно малых изгибаний.*

Доказательство. Обозначим координаты точек M_i как (x_i, y_i, z_i), а компоненты векторов $\overrightarrow{Z_i}$ как (ξ_i, η_i, ζ_i) Рассмотрим переход многогранника $(M_1, ..., M_n)$ в многогранники $(M_1', ..., M_n')$ и $(M_1'', ..., M_n'')$ по следующим преобразованиям [1]:

$$M_i' = M_i + \varepsilon\overrightarrow{Z_i},\ i = \overline{1, n}$$

$$M_i'' = M_i - \varepsilon\overrightarrow{Z_i}$$

Получившиеся многогранники являются результатом применения поля бесконечно малых изгибаний к исходному многограннику со знаком '+' и '-' соответственно.
Рассмотрим длины ребер получившихся многогранников:

$$|\overrightarrow{M_iM_j}|^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2$$

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{M_i'M_j'}|^2 = ((x_j + \varepsilon\xi_j) - (x_i + \varepsilon\xi_i))^2 + ((y_j + \varepsilon\eta_j) - (y_i + \varepsilon\eta_i))^2 + ((z_j + \varepsilon\zeta_j) - (z_i + \varepsilon\zeta_i))^2 = \\
&= [\text{в силу } (\overrightarrow{M_iM_j}, (\overrightarrow{Z_i} - \overrightarrow{Z_j})) = 0] = \\
&= (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 + \varepsilon^2((\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2) = \\
&= |\overrightarrow{M_i''M_j''}|^2
\end{aligned}$$

Следовательно, полученные многогранники имеют равные длины ребер и поэтому они изометричны и длины их ребер отличаются от длин ребер рассматриваемого многогранника на малую порядка $O(\varepsilon^2)$.

Так как ε - бесконечно малая величина, то при малом изменении длин ребер - двугранные углы многогранника также будут изменяться на бесконечно малую величину. Этот факт означает, что если исходный многогранник был строго выпуклым, то и полученные многогранники также являются строго выпуклыми.

Далее воспользуемся **теоремой Коши**, которая утверждает, что два выпуклых многогранника, имеющих равные по длине ребра и одинаковые комбинаторные строения являются конгруэнтными (то есть совмещаются движением).

Значит, в нашем случае: $(M_i' = M_i + \varepsilon\overrightarrow{Z_i}, M_j'' = M_j - \varepsilon\overrightarrow{Z_j}) \Rightarrow \overrightarrow{Z_j} = V \cdot \overrightarrow{Z_i}$, где V - некоторое движение. На прошлой лекции мы доказывали, что, с точностью до прибавления тривиального бесконечно малого изгибания, можно считать одну из невыражденных граней многогранника закрепленной, т.е $\overrightarrow{Z_i} = \overrightarrow{0}$ в трех вершинах этой грани. А значит у двух изометричных многогранников эта грань совпадает. Тогда их конгруентность дает или совпадение многогранников или один из них есть зеркальный образ другого относительно плоскости этой общей грани.

Из первого случая сразу же следует, что $\overrightarrow{Z_i} = \overrightarrow{0}$, $\forall i = \overline{1, n}$, то есть Z - поле тривиального бесконечно малого изгибания.

Рассмотрим второй случай: без ограничения общности будем считать грань симметрии - плоскость $z = 0$. Тогда при зеркальной симметрии для всех вершин имеем уравнения $z_i' = z_i + \varepsilon\zeta_i = -(z_i - \varepsilon\zeta_i) = -z_i''$, откуда получаем, что для координат вершин исходного многогранника верно: $z_i = 0$, а тогда исходный многогранник вырождается в дважды покрытый многоугольник, т.е. он не является строго выпуклым (противоречие с условием). □

Доказательство теоремы Коши дается для тех, кто им интересуется. Для доказательства теоремы Коши, нам необходимо воспользоваться следующей Леммой (доказательство которой мы опустим).

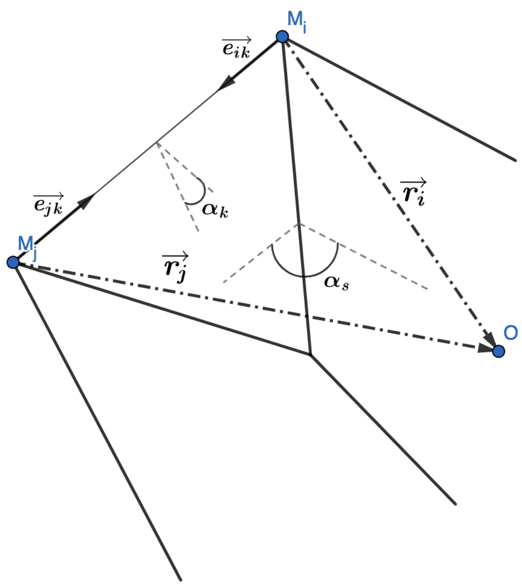

Рис. 2: Теорема Коши для двух изометричных многогранников

Лемма 1. *Пусть есть два изометричных выпуклых многогранника P и P'. Обозначим $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - двугранные углы между гранями в P, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ - в P'.*
Тогда для каждой (i-й) вершины многогранника верно:

$$w_i = \overrightarrow{r_i} \sum_k (\alpha_k - \alpha'_k)\overrightarrow{e_{ik}} \geq 0$$

$\overrightarrow{r_i}$ *- любой вектор, ведущий из вершины внутрь многогранника,*
$\overrightarrow{e_{ik}}$ *- единичный вектор идущий из i-й вершины вдоль k-го ребра.*
Суммирование ведется по всем ребрам, смежным с данной вершиной.

Теорема 2. *Два выпуклых многогранника, имеющих равные по длине ребра и одинаковые комбинаторные строения - конгруэнтны.*

Доказательство. Рассмотрим сумму w_i (из Леммы 1) по всем вершинам многогранника: $\sum_i w_i \geq 0$ (очевидно т.к неравенство верно для каждого слагаемого).
Зафиксируем точку O внутри многогранника и направим все вектора r_i из вершин в эту точку. Дальнейшая идея состоит перегруппировке слагаемых суммы по ребрам многогранника (вместо вершин).

Для k-го ребра M_iM_j имеем следующее слагаемое:

$$\overrightarrow{M_iO}(\alpha_k - \alpha'_k)\overrightarrow{e_{ik}} + \overrightarrow{M_jO}(\alpha_k - \alpha'_k)\overrightarrow{e_{jk}} = (\alpha_k - \alpha'_k)(\overrightarrow{M_iO}\frac{\overrightarrow{M_iM_j}}{l_k} + \overrightarrow{M_jO}\frac{\overrightarrow{M_jM_i}}{l_k}),$$

где l_k - длина ребра M_iM_j.

Заметим, что

$$\overrightarrow{M_iO} - \overrightarrow{M_jO} = \overrightarrow{M_iM_j}$$
$$\overrightarrow{M_iM_j}\overrightarrow{M_jM_i} = -l_k^2.$$

Тогда:

$$\frac{\alpha_k - \alpha'_k}{l_k}(\overrightarrow{M_iO} - \overrightarrow{M_jO})\overrightarrow{M_jM_i} = \frac{\alpha_k - \alpha'_k}{l_k}\overrightarrow{M_iM_j}\overrightarrow{M_jM_i} = -(\alpha_k - \alpha'_k)l_k$$

То есть для изначальной суммы верно:

$$0 \le \sum_i w_i = \sum_k \alpha'_k l_k - \sum_k \alpha_k l'_k = \sum_k \alpha'_k l'_k - \sum_k \alpha_k l_k$$

Здесь мы использовали равенство $l_k = l'_k$ из условия изометричности многогранников. Теперь, если же мы проделаем аналогичную цепочку действий для многогранника P', то получим обратное неравенство:

$$0 \le \sum_k \alpha_k l_k - \sum_k \alpha'_k l'_k$$

Следовательно, единственный возможный вариант - равенство 0. Откуда получаем, что $\sum_i w_i = 0$, а значит и каждое $w_i = 0$, откуда следует (из-за произвольности фиксированной точки O):

$$\alpha_k - \alpha'_k = 0 \ \forall k$$

То есть многогранники изометричны и имеют равные соответствующие двугранные углы, а значит конгруэнтны. □

Таким образом, теперь мы знаем два класса объектов, для которых доказана их жесткость: выпуклые поверхности (тригладкие, с кривизной $k > 0$) и строго выпуклые многогранники.

Все классы описываются **теоремой Погорелова, 1959**:
Любая выпуклая поверхность является жесткой, за исключением плоских кусков.

На следующей лекции мы рассмотрим свойство жесткости поверхностей вращения.