Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 7 от 19.11.2021

Лектор Сабитов И.Х.

1 Аффинная и проективная инвариантность бесконечно малых изгибаний

Определение 1. Если поверхность допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, то она называется нежесткой. Иначе — жесткой.

Утверждение 1. *Свойство жесткости инвариантно относительно аффинных и проективных преобразований.*

Доказательство. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3)$ — евклидово пространство, а S — поверхность.

1. Аффинный случай

   Рассмотрим некоторое аффинное преобразование нашего евклидового пространства: $XA + B = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$. Поверхность S при этом перейдет в $\widetilde{S}$.

   Пусть $Z = (z_1, z_2, z_3)$ — бесконечно малое изгибание, то есть $dXdZ = 0$. Тогда нам необходимо доказать, что для $\widetilde{S}$ существует свое поле $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3)$.

   Положим $\widetilde{Z} = A^{-1}Z(A$ — невырожденная, так как преобразование аффинное, поэтому A^{-1} существует), тогда $d\widetilde{X} = dXA$ и $d\widetilde{X}d\widetilde{Z} = dXAA^{-1}dZ = dXdZ = 0$.

2. Проективный случай

   Сначала рассмотрим одно конкретное проективное преобразование, а затем перейдем от него к общему случаю.

   Пусть $\widetilde{x}_1 = \frac{x_1}{x_3}, \widetilde{x}_2 = \frac{x_2}{x_3}, \widetilde{x}_3 = \frac{1}{x_3}$. Будем считать, что на нашей поверхности $x_3 = 0$, иначе просто можем взять другое преобразование.

   Рассмотрим теперь бесконечно малое изгибание Z, соответвующее поверхности S. В качестве $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3)$ возьмем такое поле, что $\widetilde{z}_1 = \frac{z_1}{x_3}, \widetilde{z}_2 = \frac{z_2}{x_3}, \widetilde{z}_3 = \frac{x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3}{x_3}$.

   Докажем, что $d\widetilde{X}d\widetilde{Z} = 0$.

   Имеем
   $$d\widetilde{x}_1 = \frac{x_3dx_1 - x_2dx_3}{x_3^2}; \qquad d\widetilde{x}_2 = \frac{x_3dx_2 - x_2 - dx_3}{x_3^2}; \qquad d\widetilde{x}_3 = -\frac{dx_3}{x_3^2}.$$

   Тогда
   $$d\widetilde{z}_1 = \frac{x_3dz_1 - z_1dx_3}{x_3^2}; \qquad d\widetilde{z}_2 = \frac{x_3dz_2 - z_2dx_3}{x_3^2}; \qquad d\widetilde{z}_3 = \frac{x_3\sum_i(z_idx_i + x_idz_i) - dx_3\sum x_iz_i}{x_3^2.}$$

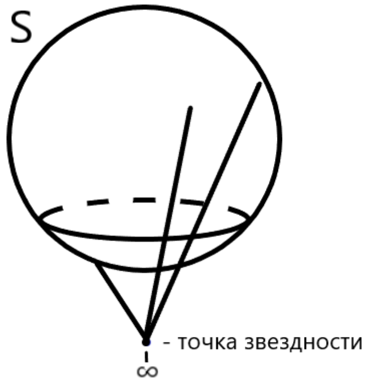
   Получается, что $d\widetilde{x}_1d\widetilde{z}_1 + d\widetilde{x}_2d\widetilde{z}_2 + d\widetilde{x}_3d\widetilde{z}_3 = \frac{dx_1dz_1+dx_2dz_2+dx_3dz_3}{x_3^4} = 0$ и для частного отображения утверждение доказано.

   Но общее проективное преобразование может быть получено из частного, применением некоторого аффинного преобразование. Таким образом утверждение доказано для всех проективных преобразований.

$\square$

Приведем пример применения данного утверждения.

Пример 1. Рассмотрим замкнутую поверхность S и ее точку звездности A. Далее, если мы возмем проективное преобразование с центром в A, то исходная поверхность перейдет в новую, которая будет иметь следующий вид: $\widetilde{x}_3 = f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$. Это означает, что новая поверхность однозначно проектируется на плоскость $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$, то есть она может быть представелена явным уравнением. А как показывалось на предыдущих лекциях, когда мы работаем с явно заданными поверхностями, нахождение бесконечно малых изгибаний для нее сводится к решению одного уравнения второго порядка. Это является преимуществом, так как в общем случае нам приходиться работать с системой уравнений.



2 Бесконечно малые изгибания многогранников

1. Некоторые сведения о комбинаторном строении многогранников. .Определение б.м. изгибаний многогранников в принципе такое же, как и для поверхностей, но сначала надо ввести некоторые уточнения о строении многогранников. Будем рассматривать многогранники с треугольными гранями, они называются симплексиальные многогранники (от слова симплекс – простейшие). Чем они примечательны по сравнению с другими, например, с многограниками с четырехугольными гранями? Треугольник полностью определяется своими сторонами, т.е. знание длин сторон граней, полностью определяет грань. Если же /грань является четырехугольной, то знание сторон ее не определит. К примеру может быть известно, что сторона четырехугольника равна a. Это может быть как квадрат, так и ромб со стороной a. Поэтому знание стороны не даёт знание многоугольника. Для случая симплекса знание сторон даёт знание граней. В этом заключается преимущество этого класса. многогранников.

Для любого многогранника верна формула Эйлера

$$N - E + F = 2 - 2g, \qquad (*)$$

где N - число вершин, E - число ребер (edges),F - число граней (faces), g - топологический род (genus) многогранника (или число ручек)- Если многогранник симплициальный, то число его граней и число ребер связаны равенством $2E = 3F$, так как каждое ребро считается дважды как сторона двух соседних граней. Подставляя это равенство в (*), получаем, что количества ребер и граней связаны с числом вершин соотношениями

$$E = 3N - 6 + 6g, F = 2N - 4 + 4g.$$

Например, для многогранника типа сферы, т.е., рода $g = 0$ имеем $E = 3N - 6, F = 2N - 4$, для типа тора, т.е. рода $g = 1$ имеем $E = 3N, F = 2N$. Многогранник с наименьшим количеством вершин - это тетраэдр, т.е. треугольная пирамида с 4 вершинами, тогда число ребер равно 6, а число граней. 4. Многогранник типа тора имеет наименьшее количество вершин $N = 7$ и у него число граней $F = 14$, число ребер $E = 21$.

2. Определение б.м. изгибаний симплициальных многогранников. Теперь дадим определение бесконечно малого изгибания. Берём две вершины p_i и p_j, соединенные ребром. Тогда мы можем добавить маленькое приращение $p'_i = p_i + \varepsilon\Delta_i, p'_j = p_j + \varepsilon\Delta_j$. Подсчитаем длину нового ребра, возведённую в квадрат (чтобы "не таскать"с собой корень): $|p'_i - p'_j|^2 = |p_i - p_j|^2 + 2\varepsilon(p_i\Delta_i + p_j\Delta_j) + \varepsilon^2$. Дадим определение такое же, как у поверхностей. Надо, чтобы длина изменялась как $o(\varepsilon), \varepsilon \to 0$. Следовательно, нужно, чтобы $p_i\Delta_i + p_j\Delta_j = 0$. Теперь выпишем уравнения, введем обозначения:

$$\begin{array}{lll} p_i(x_i, y_i, z_i) & \Delta_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) & p'_i = (x_i + \varepsilon\xi_i, y_i + \varepsilon\eta_i, z_i + \varepsilon\zeta_i), \\ p_j(x_j, y_j, z_j) & \Delta_j = (\xi_j, \eta_j, \zeta_j) & p'_j = (x_j + \varepsilon\xi_j, y_j + \varepsilon\eta_j, z_j + \varepsilon\zeta_j). \end{array}$$

Когда мы будем вычислять длину, нужно помнить, что квадрат длины это скалярное произведение вектора с самим собой, поэтому:

$$|p'_i - p'_j|^2 = (p'_i - p'_j, p'_i - p'_j) =$$

Подставляя, имеем

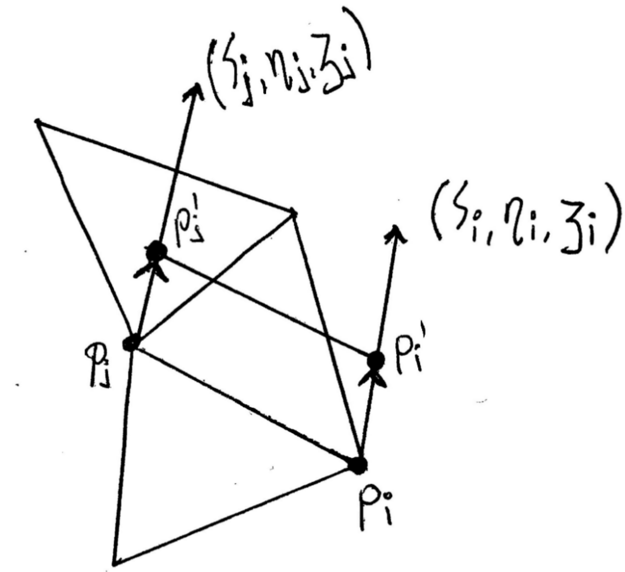
$$= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + 2\left[(x_i - x_j)(\xi_i - \xi_j) + (y_i - y_j)(\eta_i - \eta_j) + (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_J)\right]\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Мы хотим, чтобы длина нового положения отличалась от длины старого положения на $o(\varepsilon)$, то есть коэффициент при ε должен быть нулевым. Первые три слагаемых дают $|p_i - p_j|^2$. Выпишем слагаемое при ε отдельно:

$$(x_i - x_j)(\xi_i - \xi_j) + (y_i - y_j)(\eta_i - \eta_j) + (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_j) = 0$$

Это и есть уравнение, аналогичное бесконечно малым изгибаниям поверхностей. Напомним его – $d\vec{r}d\vec{Z} = 0$, где $d\vec{r}$ – дифференциал для поверхностей. Таким образом, мы имеем дискретный аналог полученных ранее дифференциальных уравнений. Осталось добавить, что эти уравнения ограничены множеством пар $(i, j) \in E$, где E это множество рёбер. Мы записываем уравнения для всех рёбер. Совокупность решения этой системы даст нам поле бесконечно малых изгибаний. Как оно смотрится?

Нарисуем многоугольник.



У каждой вершины есть свой вектор (ξ_k, η_k, ζ_k). У вершины p_j свой вектор (ξ_j, η_j, ζ_j). На самом деле мы прибавляем вектор, умноженный на ε, поэтому берём вектор короче, т.к. имеем $p_i + \varepsilon\Delta_i$. Получаем новое положение вершин и новую длину, и длина отличается на $o(\varepsilon)$.

В чем отличие от движения или изгибания? Длины ребер при изгибаниях в точности равны исходным и не меняются. Если изгибание тривиальное, то и диагонали сохраняют свою длину. Отсюда можно дать определение тривиального бесконечно малого изгибания, это такое б.м.и., что диагонали изменяют свою длину также на $o(\varepsilon)$. И стороны, и диагонали меняют свою длину на $o(\varepsilon)$. Вспомним опять, что было при изгибании поверхностей. Там это было полем начальных скоростей движения. Тогда, если (ξ_i, η_i, ζ_i) порождает начальное поле скоростей, то это изгибание называлось тривиальным.

Как оно описывается? Пусть $\vec{A}$ – параллельный перенос и O – вращение. Вращение всегда есть ортогональное преобразование. При этом, если вращение настоящее, оно зависит от t, поэтому имеем

$$O(t) = \begin{pmatrix} a_1 1(t) & a_1 2(t) & a_1 3(t) \\ a_2 1(t) & a_2 2(t) & a_2 3(t) \\ a_3 1(t) & a_3 2(t) & a_3 3(t) \end{pmatrix} = E + tA_1 + t^2 A_2 + \dots$$

(здесь E - единичная матрица). Общий вид ортогональных преобразований приводит к вращению. Знаменитое свойство ортогональной матрицы $O^T = O^{-1}$, тогда $O^T = E + tA_1 + \dots$ и $O * O^T = O * O^{-1} = (E + tA_1 + \dots)(E + tA_1^T + \dots) =$
$= E + t(A_1 + A_1^T) + t^2 + \dots$
Хотим $A_1 + A_1^T = 0$, $\Rightarrow A_1$ – кососимметрическая матрица. Тогда

$$A_{1,3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, p_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \to p'_i.$$

И пусть $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ – параллельный перенос, то есть просто сдвиг каждой вершины $(x_i+a_1,y_i+a_2,z_i+a_3)$. Подействуем O на p_i:

$$O\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=(E+tA_1)\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\alpha_1y_i+\alpha_2z_i\\-\alpha_1x_1+\alpha_3z_i\\-\alpha_2x_1-\alpha_2y_i\end{pmatrix}.$$

Получили p_i'.

Теперь попробуем получить все, о чем мы только что говорили, немного проще. Действие ортогональной матрицы в каждый момент времени равносильно вращению вокруг некоторой оси, то есть в каждый момент существует ось вращения. Пусть тогда $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ – ось вращения. Тогда

$$\vec{w}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}i&j&k\\w_1&w_2&w_3\\x_i&y_i&z_i\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}w_2z_i-w_3y_i\\w_3x_i-w_1z_i\\w_1y_i-w_2x_i\end{pmatrix}.$$

Тогда $\alpha_1=-w_3,\alpha_2=w_2,\alpha_3=-w_1$ и

$$A_1=\begin{pmatrix}0&-w_3&w_2\\w_3&0&-w_1\\-w_2&w_1&0\end{pmatrix}.$$

Тривиальные б.м.и. многогранников в каждой вершине p_i имеет вид $(a_1,a_2,a_3)+\vec{w}\times p_i$. Это и есть общий вид тривиальных бесконечно малых изгибаний многогранников. Оно определяется всего 6 параметрами a_1,a_2,a_3,w_1,w_2,w_3.

Тогда возникает вопрос. (Это был вопрос к студентам) Если мы к нетривиальному прибавим тривиальное изгибание, получим ли мы снова нетривиальное б.м.и.?
Т.б.м.и. примечательно тем, что не изменяет длину ребер, или же изменяет на $o(t)$. Если было нетривиальное и изменило на $o(t)$, добавили тривиальное, то что будет?
В начале было $(p_i,p_j)\to(p_i',p_j')=(p_i,p_j)+o(t)$ и длина меняется на $o(t)$.
Затем применили $\vec{Z}_{\text{трив}}$, т.е. $(p_i,p_j)+o(t)=(p_i,p_j)+o(t)+o(t)=(p_i,p_j)+o(t)$

Теперь применим сказанное выше на пользу делу. Докажем важную теорему .

Теорема 1. Пусть грань p_i,p_j,p_k – невырожденный треугольник, т.е. сумма двух сторон $>$ третьей. (Для того, чтобы грань была невырожденной $\Leftrightarrow$ ее площадь >0). Возьмем произвольную невырожденную грань. Пусть многогранник допускает нетривиальное б.м. изгибание. Тогда существует такое тривиальное бесконечно малое изгибание, что его добавление сделает данное поле бесконечно малого изгибания нулевым в вершинах взятой грани. Другими словами, $\exists Z_0: Z+Z_0=0$ в вершинах p_i,p_j,p_k.

Доказательство. Докажем это свойство.
Пусть $p_i,p_j,p_k=p_1,p_2,p_3$. Имеем Z и p_k и $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k),k=1,2,3.Z_0=(a,b,c)+[(w_1,w_2,w_3)\times(x_i,y_i,z_i)]$ Необходимо подобрать a,b,c,w_1,w_2,w_3 так, чтобы поле стало нулевым. $\tilde{Z}=Z+Z_0$ и $Z(p_i)=(0,0,0),i=1,2,3$. Тогда можно расписать в точках p_1,p_2,p_3 применение $\tilde{Z}$

В p_1

$$\begin{cases}a+w_2z_1-w_3y_1+\xi_1=0=\tilde{\xi}_1,\\b+w_3x_1-w_1z_1+\eta_1=0=\tilde{\eta}_1,\\c+w_1y_1-w_2x_1+\zeta_1=0=\tilde{\zeta}_1.\end{cases}\tag{1}$$

В p_2

$$\begin{cases}a+w_2z_2-w_3y_2+\xi_2=0=\tilde{\xi}_2,\\b+w_3x_2-w_1z_2+\eta_2=0=\tilde{\eta}_2,\\c+w_1y_2-w_2x_2+\zeta_2=0=\tilde{\zeta}_2.\end{cases}\tag{2}$$

В p_3

$$\begin{cases}a+w_2z_3-w_3y_3+\xi_3=0=\tilde{\xi}_3,\\b+w_3x_3-w_1z_3+\eta_3=0=\tilde{\eta}_3,\\c+w_1y_3-w_2x_3+\zeta_3=0=\tilde{\zeta}_3.\end{cases}\tag{3}$$

Имеем 6 неизвестных и 9 уравнений. Но необходимо так же выполнение уравнений, задающих б.м.и., т.е.

$$\begin{cases}(x_2-x_1)(\xi_2-\xi_1)+(y_2-y_1)(\eta_2-\eta_1)+(z_2-z_1)(\zeta_2-\zeta_1)=0,p_1p_2\\(x_3-x_2)(\xi_3-\xi_2)+(y_3-y_2)(\eta_3-\eta_2)+(z_3-z_2)(\zeta_3-\zeta_2)=0,p_2p_3\\(x_3-x_1)(\xi_3-\xi_1)+(y_3-y_1)(\eta_3-\eta_1)+(z_3-z_1)(\zeta_3-\zeta_1)=0,p_1p_3\end{cases}\tag{4}$$

Таким образом, (ξ_k, η_k, ζ_k) не произвольные, а удовлетворяющие уравнениям выше. Выразим a, b, c из уравнений (1):

$$\begin{cases} a = -w_2 z_1 + w_3 y_1 - \xi_1, \\ b = -w_3 x_1 + w_1 z_1 - \eta_1, \\ c = -w_1 y_1 + w_2 x_1 - \zeta_1. \end{cases} \tag{5}$$

Остается найти w_1, w_2, w_3. Подставим в систему (2):

$$\begin{cases} w_2(z_2 - z_1) + w_3(y_1 - y_2) = \xi_1 - \xi_2, \\ w_1(z_1 - z_2) + w_3(x_2 - x_1) = \eta_1 - \eta_2, \\ w_2(x_1 - x_2) + w_1(y_2 - y_1) = \zeta_1 - \zeta_2. \end{cases} \tag{6}$$

Выпишем матрицу этой системы относительно w_1, w_2, w_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & z_2 - z_1 & y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 & x_1 - x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Невозможно, чтобы одновременно

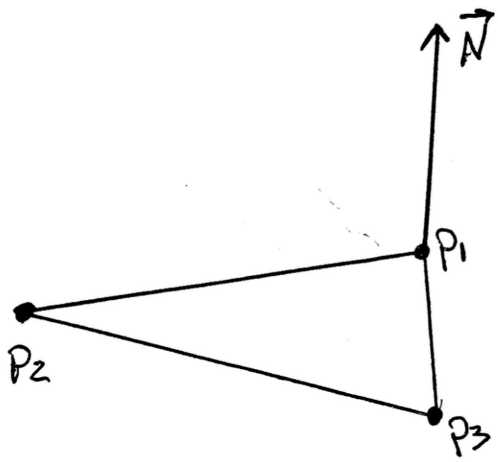
$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0, \\ y_2 - y_1 = 0, \\ z_2 - z_1 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

иначе $p_1 = p_2$, и наш треугольник вырожденный. Поэтому можем предположить, что $x_1 \neq x_2$. Тогда можем из (2) выразить w_2, w_3 и подставить в (3). Тогда

$$w_2 = \frac{\xi_2 - \xi_1 + w_1 1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}, \quad w_3 = \frac{\eta_2 - \eta_1 + w_1 1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя их в систему (3),

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_3 = \dfrac{w_1 N_1}{x_2 - x_1} + (\zeta_2 - \zeta_1)(z_3 - z_1) + (\eta_1 - \eta_2)(y_1 - y_2) + (\xi_2 - \xi_1)(x_2 - x_1), \\ \tilde{\eta}_3 = \dfrac{w_1 N_2}{x_2 - x_1} + \ldots, \\ \tilde{\zeta}_3 = \dfrac{w_1 N_3}{x_2 - x_1} + \ldots, \end{cases} \tag{8}$$



где вектор (N_1, N_2, N_3) – нормаль к нашему треугольнику в точке p_1. Ее можно найти как $\overrightarrow{p_2 p_1} \times \overrightarrow{p_3 p_1}$. Обозначим вторые слагаемые в (8) как (A_1, A_2, A_3). Мы хотим, чтобы $\tilde{\xi}_3 = 0$, $\tilde{\eta}_3 = 0$, $\tilde{\zeta}_3 = 0$. Тогда имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{w_1 N_1}{x_2 - x_1} + A_1 = 0, \\ \dfrac{w_1 N_2}{x_2 - x_1} + A_2 = 0, \\ \dfrac{w_1 N_3}{x_2 - x_1} + A_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Имея в виду, что $(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) + (y_2 - y_1)(\eta_2 - \eta_1) + (z_2 - z_1)(\zeta_2 - \zeta_1) = 0$, обнаруживаем. что $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ коллинеарен нормали N. Тогда:

$$\frac{w_1 \vec{N}}{x_2 - x_1} + \lambda \vec{N} = 0, \text{ где } \vec{A} = \lambda \vec{N},$$

откуда

$$w_1 = -\lambda(x_2 - x_1), \ \lambda = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{N})}{|\vec{N}|^2}.$$

Значит, мы определили необходимые a, b, c, w_1, w_2, w_3. □

Конец лекции.