Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 6 от 12.11.2021

Лектор Сабитов И.Х.

Формула Бляшке. В ряде случаев для исследования жёсткости поверхностей положительной кривизны полезно использовать интегральную формулу Бляшке. Она представляет собой некоторую специализацию формулы Грина и вытекает из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}\vec{y}\vec{y}_u) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}\vec{y}\vec{y}_u = 2(\vec{r}\vec{y}_u\vec{y}_v) = -2(\beta\gamma + \alpha^2)(\vec{r}\vec{r}_u\vec{r}_v),$$

где обозначения взяты из лекции 3.

Формула Бляшке имеет вид

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{r}\vec{y}\; d\vec{y} = -2 \iint_D (\beta\gamma + \alpha^2)(\vec{r}\vec{r}_u\vec{r}_v)\; dudv,$$

где D - область на поверхности S, отнесенная к внутренним координатам (u, v), а Γ - граница D.

Теорема о жесткости. Трижды непрерывно дифференцируемая замкнутая поверхность S с кривизной $K > 0$ является жёсткой.

Доказательство.
Пусть дана C^3-гладкая выпуклая компактная поверхность. S, а. $\vec{r}(u, v)$ – ее радиус вектор, $\vec{y}(u, v)$ - поле вращений для рассматриваемого поля бесконечно малых изгибаний.
Рассмотрим интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{r}\vec{y}\; d\vec{y},$$

где Γ - замкнутая жордановая кривая на поверхности.
Преобразуем интеграл по контуру так, чтобы его можно было оценить. Свяжем интеграл по контуру с интегралом $\iint\limits_D$ по замкнутой области, ограниченной кривой Γ. Вспомним формулу Грина

$$\int P\; du + Q\; dv = \iint (\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v})\; dudv$$

и применим ее к форме

$$\vec{r}\vec{y}(\vec{y}_u du + \vec{y}_v dv) = (\vec{r}\vec{y}\vec{y}_u)du + (\vec{r}\vec{y}\vec{y}_v)dv$$

Получим

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{r}\vec{y}(\vec{y}_u\; du + \vec{y}_v\; dv) = \oint((\vec{r}\vec{y}\vec{y}_u)du + (\vec{r}\vec{y}\vec{y}_v)dv) = \iint [\frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}\vec{y}\vec{y}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}\vec{y}\vec{y}_u)]dudv =$$

$$= \iint [(\vec{r}_u\vec{y}\vec{y}_v) + (\vec{r}\vec{y}_u\vec{y}_v) + (\vec{r}\vec{y}\vec{y}_{uv}) - (\vec{r}_v\vec{y}\vec{y}_u) - (\vec{r}\vec{y}_v\vec{y}_u - (\vec{r}\vec{y}\vec{y}_{vu})]\; dudv = \iint [\vec{y}(\vec{r}_v\vec{y}_u) - \vec{y}(\vec{r}_u\vec{y}_v) + 2(\vec{r}\vec{y}_u\vec{y}_v)]\; d$$

$$= \iint [\vec{y}(\vec{r}_v \times \vec{y}_u) - (\vec{r}_u \times \vec{y}_v)) + 2(\vec{r}\vec{y}_u\vec{y}_v)]\; dudv = 2 \iint\limits_D (\vec{r}\vec{y}_u\vec{y}_v)\; dudv.$$

В итоге получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{r}\vec{y}\ d\vec{y} = 2 \iint\limits_{D} [\vec{r}(\vec{y_u} \times \vec{y_v})]\ dudv \tag{1}$$

Вспоминаем из лекции 3 соотношения

$$\vec{y}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v,$$
$$\vec{y}_v = \gamma\vec{r}_u - \alpha\vec{r}_v.$$

Выполним векторное произведение

$$\vec{y}_u \times \vec{y}_v = -(\beta\gamma + \alpha^2)[\vec{r}_u \times \vec{r}_v],$$

отсюда имеем продолжение выражению (1)

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{r}\vec{y}\ d\vec{y} = -2 \iint_{D} (\beta\gamma + \alpha^2)(\vec{r}\vec{r}_u\vec{r}_v)\ dudv. \qquad (2)$$

Получили важную формулу.
Мы работаем с кривизной $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, где E, F, G и L, M, N - стандартные обозначения коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности.

Лемма Для поверхности с положительной кривизной $K > 0$ выполняется

$$\beta\gamma + \alpha^2 \leqslant 0$$

Доказательство Леммы Из лекции 3 знаем равенство

$$L\gamma - 2M\alpha - N\beta = 0. \qquad (3) \tag{2}$$

Умножим (3) на βN и преобразуем полученное выражение следующим образом

$$LN\beta\gamma - (M\alpha + N\beta)^2 + M^2\alpha^2 = LN(\beta\gamma + \alpha^2) - (LN - M^2)\alpha^2 - (M\alpha + N\beta)^2 = 0. \tag{3}$$

Значит,

$$LN(\beta\gamma + \alpha^2) = (LN - M^2)\alpha^2 + (N\beta + M\alpha)^2 \geq 0.$$

Так как $LN - M^2 > 0$ и $LN > 0$, то .

$$\beta\gamma + \alpha^2 \geq 0.$$

Лемма доказана.

По условию поверхность S выпуклая и замкнутая. Выберем точку начала координат внутри поверхности и ориентируем нормаль как внешнюю. Тогда радиус-вектор поверхности будет составлять с нормалью к поверхности острый угол, поэтому смешанное произведение $(\vec{r}\vec{r}_u\vec{r}_v)$ под интегралом в (2) всегда будет положительным. А так как по лемме сумма $\beta\gamma + \alpha^2$ неотрицательна, то выражение под интегралом неотрицательно на всей поверхности. Выберем теперь кривую Γ как угодно малой. Она разобьет поверхность на две области - большую и малую. Выберем в качестве области D большую. Будем стягивать кривую Γ к некоторой точке. Тогда интеграл в левой части формулы (2) будет стремиться к нулю, а область D будет стремиться ко всей поверхности. Получим, что интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен нулю, что бывает только для функции тождественно равной нулю. Итак, в предположении нежесткости поверхности должно тождественно выполняться условие $\beta\gamma + \alpha * 2 = 0$. Тогда имеем равенства $\alpha = 0, \beta = 0$ и в силу (3) имеем также, что и $\gamma = 0$. Значит, производные поля вращения $\vec{y}$ равны нулю, и вектор вращения постоянный. А это является необходимым и достаточным условием тривиальности поля б.м. изгибания. Теорема доказана.

Замечание Теорема о жесткости выпуклой замкнутой поверхности может быть доказана с помощью формулы Бляшке и при более слабых условиях. Во-первых, условие гладкости можно ослабить до предположения C^2-гладкости, во-вторых, можно допускать обращение в нуль кривизны в отдельных точках, линиях и даже в областях при условии, что эти области не являются плоскими кусками. А вообще самая общая теорема, принадлежащая А.В. Погорелову, утверждает жесткость любой замкнутой выпуклой поверхности без всяких предположений гладкости, при условии, что она не содержит плоских областей. **А любая поверхность, не только выпуклая, содержащая плоскую область, является нежесткой.** Докажем это последнее утверждение. Пусть плоская область D расположена на плоскости $z = 0$ и замкнутая кривая Γ - ее граница. Положим векторное поле $\vec{Z}$ тождественно нулевым всюду на поверхности вне области D, а в области D пусть оно имеет вид $\{0, 0, h(u, v)\}$. где функция $h(u, v) = 0$ на Γ вместе с производными. Тогда поле $\vec{Z}$ будет C^1-гладким всюду на поверхности с выполнением условия $d\vec{r}d\vec{Z} = 0$, т.е. $\vec{Z}$ является на поверхности полем нетривиального б.м. изгибания. Если же поверхность замкнутая и выпуклая с условием кривизна $K \geq 0$, тогда она неизгибаема по теореме 2 из лекции 1 и поэтому существующее на ней описанное выше поле б.м. изгибания $\vec{Z}$ не может рассматриваться как порожденное некоторым изгибанием (это уточнение относится к лекции 1).