Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 5 от 29.10.2021

Лектор Сабитов И.Х.

§1. Доказательство жесткости компактной поверхности положительной кривизны (пример использования венка Дарбу). Пусть R - замкнутая регулярная поверхность класса C^3 положительной кривизны с радиус-вектором $\vec{r} = r(u,v)$, где u и v - внутренние координаты . Пусть R подвергается б.м. изгибанию с полем изгибания $\vec{z} = \vec{z}(u,v)$ с диаграммой вращения Y. На предыдущей лекции мы вывели выражения для радиус-векторов поверхностей. составляющих венок Дарбу. На их основании можно получить явные формулы для гауссовых кривизн и нормалей поверхностей Дарбу. Мы не будем проделывать это для всех поверхностей, а сделаем только для диаграммы вращений с радиус-вектором $\vec{y}(u,v)$. Из лекции 3 помним, что для $\vec{y}$ имеют место представления

$$\vec{y}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v,\ \vec{y}_v = \gamma\vec{r}_u - \alpha\vec{r}_v, \tag{1}$$

где коэффициенты α, β, γ связаны с коэффициентами L, M, N второй квадратичной формы рассматриваемой поверхности R равенством.

$$L\gamma - 2M\alpha - N\beta = 0 \tag{2}$$

(только надо иметь в виду, что в том тексте есть ошибка: везде надо заменить β на $(-\beta)$ получится. как написано сейчас - я переписал те формулы из статьи Н.в. Ефимова в УМН, (1948), т.3. вып. 2, не обратив внимание, что у него в аналоге формулы (1) перед β есть знак минус).

Из (1) получим:

$$\vec{y}_{uu} = \alpha\vec{r}_{uu} + \alpha_u\vec{r}_u + \beta\vec{r}_{uv} + \beta_u\vec{r}_v$$

$$\vec{y}_{uv} = \alpha\vec{r}_{uv} + \alpha_v\vec{r}_u + \beta\vec{r}_{vv} + \beta_v\vec{r}_v$$

$$\vec{y}_{vv} = \gamma\vec{r}_{uv} + \gamma_v\vec{r}_u - \alpha\vec{r}_{vv} - \alpha_v\vec{r}_v$$

Положим $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma$. Тогда

$$[\vec{y}_u \times y_v] = \Delta[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] \tag{3}$$

и для коэффициентов $\widetilde{L}, \widetilde{M}, \widetilde{N}$ второй квадратичной формы поверхности Y имеем:

$$\widetilde{L} = \frac{(\vec{y}_{uu}, \vec{y}_u, \vec{y}_v)}{|[\vec{y}_u \times \vec{y}_v]|} = \frac{\Delta(\alpha L + \beta M)}{|\Delta|}$$

$$\widetilde{M} = \frac{(\vec{y}_{uv}, \vec{y}_u, \vec{y}_v)}{|[\vec{y}_u \times \vec{y}_v]|} = \frac{\Delta(\alpha M + \beta N)}{|\Delta|}$$

$$\widetilde{N} = \frac{(\vec{y}_{uv}, \vec{y}_u, \vec{y}_v)}{|[\vec{y}_u \times \vec{y}_v]|} = \frac{\Delta(\gamma M - \alpha N)}{|\Delta|}$$

Поэтому для гауссовой кривизны $K(Y)$ поверхности Y с учетом (2) получим:

$$K(Y) = \frac{\widetilde{L}\widetilde{N} - \widetilde{M}^2}{|[\vec{y}_u \times \vec{y}_v]|^2} = \frac{\Delta(LN - M^2)}{\Delta^2|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|^2} + \frac{\gamma L(\alpha M + \beta N) - \beta N(\beta N + \alpha M) - 2\alpha M(\alpha M + \beta N)}{\Delta^2[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|^2} = \frac{K(R)}{\Delta},$$

где $K(R)$ - гауссова кривизна поверхности R. Далее, заметим, что из равенства (1) при положительности $LN - M^2$ умножением на γN получаем соотношение

$$(\alpha^2 + \beta\gamma)N^2 = -\Delta N^2 = \gamma^2(LN - M^2) + (\gamma M - \alpha N)^2 \geq 0,$$

причем равенство нулю бывает только в точках, где $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Следовательно, согласно (3), у диаграммы вращения Y в каждой точке существует нормаль с направлением, противоположным к направлению нормали к R. Заметим, что в точках, где $\Delta = 0$, нормаль к Y существует как предел, так что у поверхности Y в каждой точке есть касательная плоскость. Кроме того, ввиду равенства

$$K(Y) = \frac{K(R)}{\Delta}$$

кривизна диаграммы вращений всюду существует и отрицательна, кроме точек, где $\Delta = 0$. В точках, где поверхность имеет отрицательную кривизну, касательная плоскость не может быть опорной к поверхности. А в точках, где у поверхности нет конечной кривизны, но есть касательная плоскость, она является "кандидатом"в опорную плоскость, но дополнительное исследование показывает, что она тоже не является опорной (призведение $(\vec{y} \cdot \vec{n})$ не достигает экстремума при постонной нормали). Между тем, гладкая замкнутая поверхность обязана иметь опорную плоскость. Это протиоречие показывает, что диаграма вращений вырождается в точку, т.е. поверхность R жесткая.