

# Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников Лекция 4 от 22.10.2021

Лектор Сабитов И.Х.

**§1. Венок Дарбу** Пусть  $R$  - регулярная поверхность класса  $C^3$  с радиус-вектором  $\vec{r} = r(u, v)$ , где  $u$  и  $v$  - внутренние координаты  $R$ , изменяющиеся в некоторой параметрической области  $D$ . Пусть  $R$  подвергается б.м. изгибанию с полем изгибаения  $\vec{z} = \vec{z}(u, v)$ . Тогда

$$d\vec{r} \cdot d\vec{z} = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) является основным уравнением теории б.м. изгибаний. Дарбу в своих работах по дифференциальной геометрии при исследовании б.м. изгибаний поверхностей ввел в рассмотрение двенадцать поверхностей, связанных с данной поверхностью  $R$  и с данным ее изгибанием. Далее в лекции мы определим эти поверхности способом, немного отличающимся от способа Дарбу в смысле использования лишь того минимума, который был дан в предыдущих лекциях.

Прежде всего, в число двенадцати поверхностей Дарбу входят сама поверхность  $R$  и поверхность  $Z$ , описываемая вектором  $\vec{z}(u, v)$ , когда мы его откладываем из начала координат как радиус-вектор. Априори не исключено, что поверхность  $Z$  (так же как и другие поверхности Дарбу) вырождается в точку или линию. Мы пока ограничимся формальным введением поверхностей Дарбу. Поверхность  $Z$  в дальнейшем будем называть **диаграммой изгибаний** для  $R$ . Линейные элементы поверхностей  $R$  и  $Z$  связаны соотношением (1.1), то есть по терминологии Дарбу,  $R$  и  $Z$  являются поверхностями с взаимно-ортогональными линейными элементами. Далее, известно, что для данного б.м. изгибаения  $\vec{z}(u, v)$  существует единственное поле векторов  $\vec{y}(u, v)$ , такое, что

$$d\vec{z} = [\vec{y} \times d\vec{r}] \quad (1.2)$$

Это поле, в соответствии с его кинематическим смыслом, носит название **поля вращений**. Поверхность  $Y$ , описываемая радиус-вектором  $\vec{y} = y(u, v)$ , называется **диаграммой вращений** для изгибаения  $\vec{z}(u, v)$ . Она является третьей поверхностью после  $R$  и  $Z$ , входящей в число двенадцати поверхностей Дарбу.

Построим теперь поверхность  $S$  с радиус-вектором  $\vec{s}$ , где

$$\vec{s} = \vec{z} - [\vec{y} \times \vec{r}] \quad (1.3)$$

. При б.м. изгибании  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + t\vec{z}$  истинная начальная скорость деформации равна производной по времени, т.е.  $vecz$ , а начальная скорость вращения (или мгновенная скорость вращения) равна  $[\vec{y} \times \vec{r}]$ , значит, вектор  $\vec{s} = \vec{z} - [\vec{y} \times \vec{r}]$  представляет собой начальную скорость параллельного движения, поэтому поле векторов  $\vec{s}$  называют **полем перемещений**, а поверхность  $S$  с радиус-вектором  $\vec{s}$  называют **диаграммой перемещений**. Так как в силу (1.2) имеем

$$d\vec{s} = [\vec{r} \times d\vec{y}], \quad (1.4)$$

то нетрудно проверить, что

$$d\vec{y} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.5)$$

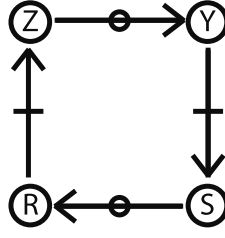
то есть поле  $\vec{s}(u, v)$  определит б.м. изгибание поверхности  $Y$ . По (1.2), существует некоторое единственное поле  $\vec{a}(u, v)$ , такое, что

$$d\vec{s} = [\vec{a} \times d\vec{y}]$$

. В силу (1.2), (1.4) и единственности поля  $\vec{a}(u, v)$  получаем, что  $\vec{a}(u, v) = \vec{r}(u, v)$ , т.е.

$$d\vec{s} = [\vec{r} \times d\vec{y}]$$

. Таким образом, мы получили четыре поверхности -  $R, Z, Y, S$ , связи между которыми указаны на приведенном ниже рисунке



Знак  $\longrightarrow$  означает переход к диаграмме изгибаний, а знак  $\longrightarrow$  означает, что исходя из диаграммы изгибаний, мы строим соответствующую диаграмму вращения. В кружках указаны обозначения построенных поверхностей.

Эту схему можно продолжить в двух направлениях, действительно, соотношение (1.1) симметрично относительно  $d\vec{r}$  и  $d\vec{z}$ , поэтому  $\vec{r}(u, v)$  можно рассматривать как изгибающее поле для поверхности  $Z$ . Построим для этого изгибание соответствующее поле вращения  $\vec{w}$ :

$$d\vec{r} = [\vec{w} \times d\vec{z}] \quad (1.6)$$

и далее, аналогично (1.3), построим поле  $\vec{\sigma}(u, v)$ :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} - [\vec{w} \times \vec{z}], \quad d\vec{\sigma} = [\vec{z} \times d\vec{w}]. \quad (1.7)$$

Мы получаем две новые поверхности -  $W$  и  $\Sigma$  - с радиус-векторами  $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$  и  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(u, v)$ , причем

$$d\vec{\sigma} \cdot d\vec{w} = 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, точно так же как пара  $(R, Z)$  породила две новые поверхности  $Y$  и  $S$ , так и пара  $(Z, R)$  порождает поверхности  $W$  и  $\Sigma$ .

Аналогичные построения можно вести, исходя из пары  $(S, Y)$ , с учетом соотношения (1.5). Получим еще две поверхности -  $H$  и  $P$ , радиус-векторы которых  $\vec{h} = \vec{h}(u, v)$  и  $\vec{p} = \vec{p}(u, v)$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$d\vec{y} = [\vec{h} \times d\vec{s}], \quad (1.9)$$

$$\vec{p} = \vec{y} - [\vec{h} \times \vec{s}], \quad d\vec{p} = [\vec{s} \times d\vec{h}], \quad (1.10)$$

$$d\vec{p} \cdot d\vec{h} = 0. \quad (1.11)$$

Эти построения теперь можно продолжить для пары  $(\Sigma, W)$ , исходя из (1.8), и для пары  $(P, H)$ , исходя из (1.2). В первом случае мы получим поверхности  $Q$  и  $\Omega$ , радиус-векторы которых  $\vec{q} = \vec{q}(u, v)$  и  $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$  определяются из условий

$$d\vec{\omega} = [\vec{\sigma} \times d\vec{q}], \quad (1.12)$$

$$\vec{\omega} = \vec{w} - [\vec{q} \times \vec{\sigma}], \quad d\vec{\omega} = [\vec{\sigma} \times d\vec{q}], \quad (1.13)$$

$$d\vec{\omega} \cdot d\vec{q} = 0. \quad (1.14)$$

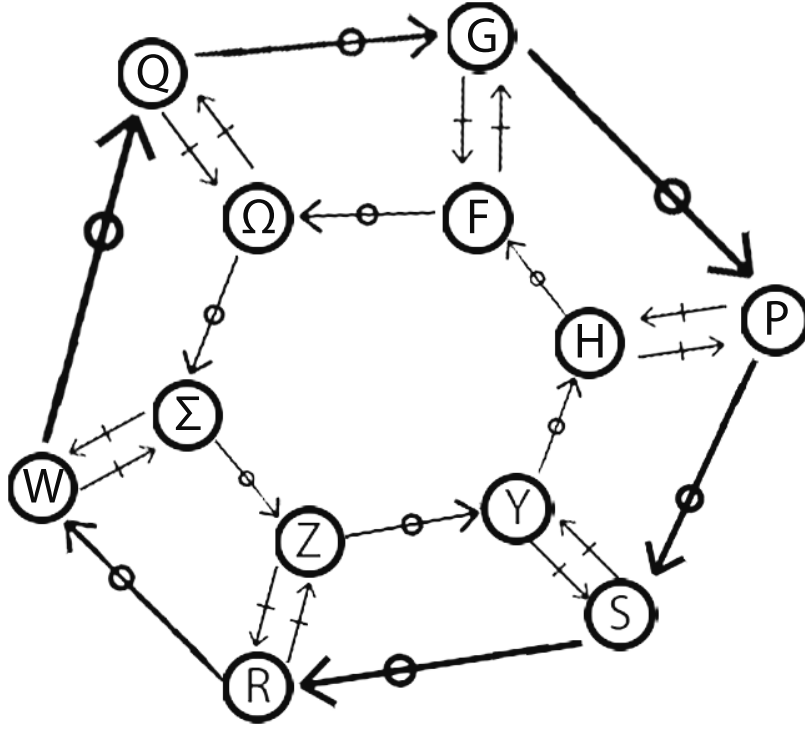
Во втором случае мы построим поверхности  $F$  и  $G$ , определив их радиус-векторы  $\vec{f}$  и  $\vec{g}$  из следующих уравнений:

$$d\vec{h} = [\vec{f} \times d\vec{p}], \quad (1.15)$$

$$\vec{g} = \vec{h} - [\vec{f} \times \vec{p}], \quad d\vec{g} = [\vec{p} \times d\vec{f}], \quad (1.16)$$

$$d\vec{g} \cdot d\vec{f} = 0. \quad (1.17)$$

Оказывается, что если пытаться продолжить эти построения исходя из пары  $(\Omega, Q)$ , мы вместо новых поверхностей получим уже построенные раньше поверхности  $F$  и  $G$  (и наоборот, исходя на  $(G, F)$ , мы получим пару  $(Q, \Omega)$ ). Этот замечательный факт и был установлен Дарбу. Его справедливость, то есть то, что для  $Q$  диаграммой вращений будет  $G$ , а для  $F$  диаграммой вращений будет  $\Omega$ , мы докажем после того, как найдем выражения для всех введенных векторов через  $\vec{r}(u, v) \times \vec{z}(u, v)$  и  $\vec{y}(u, v)$ . А сейчас смотрите на рисунке общий вид схемы венка Дарбу



В целях полноты изложения приведем для желающих вывод представления радиус-векторов поверхностей Дарбу с доказательством замкнутости венка Дарбу. Как известно из лекции 3, имеют место формулы:

$$\vec{y}_u = \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v, \vec{y}_v = \gamma \vec{r}_u - \alpha \vec{r}_v, \quad (1.18)$$

$$[\vec{y}_u \times \vec{y}_v] = (-\alpha^2 - \beta\gamma)[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]. \quad (1.19)$$

Здесь  $\alpha(u, v)$ ,  $\beta(u, v)$  и  $\gamma(u, v)$  - некоторые функции, определяемые поверхностями  $R$  и  $Z$ . На основании формул (1.4), (1.18), (1.19) легко показать что

$$[\vec{s}_u \times \vec{s}_v] = (-\alpha^2 - \beta\gamma)(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}. \quad (1.20)$$

Следовательно, нормаль к  $S$  параллельна радиус-вектору поверхности  $R$ . Так же легко проверяется, исходя из (1.2), что

$$[\vec{z}_u \times \vec{z}_v] = (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{y})\vec{y}, \quad (1.21)$$

то-есть, радиус-вектор  $\vec{y}$  параллелен нормали к  $Z$ . Ввиду общности проведенных вычислений можно утверждать, что в аналогичной ситуации для поверхностей  $S, Y, H, P$  верны следующие соотношения

$$\vec{h} \parallel [\vec{y}_u \times \vec{y}_v] \parallel \vec{n}, \quad [\vec{p}_u \times \vec{p}_v] \parallel \vec{s}, \quad (1.22)$$

где  $\vec{n}$  - единичная нормаль к  $R$ . Теперь из (1.9) и (1.4), (1.18) и (1.22) имеем:

$$d\vec{y} = \vec{r}(\vec{h} \cdot \vec{y}) - d\vec{y}(\vec{r} \cdot \vec{h}) = -d\vec{y}(\vec{r} \cdot \vec{h})$$

Следовательно,  $(\vec{r} \cdot \vec{h}) = -1$ , то-есть, по (1.22),

$$\vec{h} = -\frac{\vec{n}}{(\vec{r} \cdot \vec{n})}. \quad (1.23)$$

В точках, где  $d\vec{y} = 0$ , формула (1.23) принимается за определение вектора  $\vec{h}$ . Аналогичное замечание относится и к выводу формул для радиус-векторов остальных поверхностей Дарбу.

Для поверхностей  $P$ ,  $H$  и  $F$  из (1.15) и (1.10) имеем

$$\vec{f} \parallel [\vec{h}_u \times \vec{h}_v] \parallel [\vec{s}_u \times \vec{s}_v] \parallel \vec{r}, \quad d\vec{h} = [\vec{f} \times [\vec{s} \times d\vec{h}]] = -d\vec{h}(\vec{f} \cdot \vec{s})$$

Значит,  $\vec{f} \cdot \vec{s} = -1$ , т.е.,

$$\vec{f} = -\frac{\vec{r}}{(\vec{r} \cdot \vec{z})}. \quad (1.24)$$

Зная  $\vec{h}$  и  $\vec{f}$ , теперь из (1.10) и (1.16) можем найти  $\vec{p}$  и  $\vec{g}$ :

$$\vec{p} = \frac{\vec{r}(\vec{y} \cdot \vec{n}) + [\vec{n} \times \vec{z}]}{(\vec{r} \cdot \vec{n})}, \quad \vec{g} = -\frac{\vec{z}}{(\vec{r} \cdot \vec{z})}. \quad (1.25)$$

Для поверхностей  $W$ ,  $\Sigma$ ,  $Z$ ,  $R$  получим:

$$\vec{w} \parallel \vec{n}, \quad d\vec{r} = [\vec{w} \times [\vec{y} \times d\vec{r}]] = -d\vec{r}(\vec{w} \cdot \vec{y}),$$

то есть

$$\vec{w} = -\frac{\vec{n}}{(\vec{y} \cdot \vec{n})}. \quad (1.26)$$

Так как  $\vec{q} \parallel [\vec{w}_u \times \vec{w}_v] \parallel [\vec{z}_u \times \vec{z}_v] \parallel \vec{y}$  и  $d\vec{w} = [\vec{q} \times d\vec{\sigma}] = \vec{z}(\vec{q} \cdot d\vec{w}) - d\vec{w}(\vec{q} \cdot \vec{z})$ , то  $(\vec{q} \cdot \vec{z}) = -1$ , то есть

$$\vec{q} = -\frac{\vec{y}}{(\vec{y} \cdot \vec{z})}. \quad (1.27)$$

Теперь из (1.7), (1.18), (1.26) и (1.27) найдем, что

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{r}(\vec{y} \cdot \vec{n}) + [\vec{n} \times \vec{z}]}{(\vec{y} \cdot \vec{n})}, \quad \vec{\omega} = -\frac{\vec{s}}{(\vec{y} \cdot \vec{z})}. \quad (1.28)$$

Зная формулы (1.24), (1.25), (1.27) и (1.28), легко непосредственно вычислить, что

$$[\vec{g} \times d\vec{\omega}] = d\vec{q}, \quad [\vec{\omega} \times d\vec{g}] = d\vec{f}$$

это доказывает справедливость того, что для поверхности  $Q$  поверхность  $G$  будет диаграммой вращения, а для поверхности  $F$  диаграммой вращения будет поверхность  $\Omega$ .