Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 3 от 15.10.2021

Лектор Сабитов И.Х.

Напоминание из прошлых лекций:

При бесконечно малых изгибаниях поверхности форма поверхности изменяется, но длины кривых на поверхности и в пространстве ведут себя по-разному. При обычных изгибаниях поверхность меняет свою форму по ходу изгибания, а длины любых кривых остаются неизменными.

Рассмотрим поверхность К. На ней расположена кривая. Длина данной кривой S. Длина хорды – отрезка, соединяющего начало и конец данной кривой – l. $\vec{r}$ - радиус-вектор поверхности. Применим к данной поверхности бесконечно малое изгибание. Тогда S_t - длина образа кривой после изгибания поверхности, а l_t - длина хорды после изгибания поверхности. $\vec{r_t}$ - радиус-вектор поверхности после её деформации.

$\vec{Z}$ - поле изгибания поверхности.

Тогда деформация поверхности может быть записана при помощи следующего векторного равенства: $\vec{r_t} = \vec{r} + t\vec{Z}$.

$$(0) \begin{cases} S - S_t = o(t), t \to 0 \\ l - l_t = O(t) \end{cases}$$

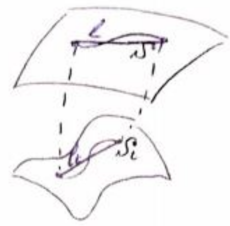

Рис. 1:

Деформация будет обладать свойствами (0), если она удовлетворяет уравнению:

$d\vec{r}d\vec{Z} = 0$ — *основное уравнение теории бесконечно малых изгибаний.*

Утверждение 1. *Если $\vec{Z}$ — поле бесконечно малого изгибания, то существует вектор $\vec{y}$, такой, что $d\vec{Z} = [y \times d\vec{r}]$, причем такой вектор единственный.*

Докажем это утверждение. Распишем подробно основное уравнение теории б.м. и. Имеем

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \; d\vec{Z} = \vec{Z}_u du + \vec{Z}_v dv.$$

Тогда уравнение $d\vec{r}d\vec{Z} = 0$ равносильно трем уравнениям

$$\vec{r}_u \vec{Z}_u = 0, \; \vec{r}_u \vec{Z}_v + \vec{r}_v \vec{Z}_u = 0, \; \vec{r}_v \vec{Z}_v = 0 = 0.$$

Из первого и третьего равенства следует. что существуют векторы $\vec{Y_1}$ и $\vec{Y_2}$, такие, что

$$\vec{Z}_u = \vec{Y}_1 \times \vec{r}_u, \; \vec{Z}_v = \vec{Y}_2 \times \vec{r}_v. \quad (1)$$

Подставим эти значения $\vec{Z}_u$ и $\vec{Z}_v$ во второе равенство. Получим соотношение

$$\vec{r}_u [\vec{Y}_2 \times \vec{r}_v] + \vec{r}_v [\vec{Y}_1 \times \vec{r}_u] = 0$$

или
$$(\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2)[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = 0,$$
т.е.
$$(\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2) \perp \vec{n},$$
где $\vec{n}$ - нормаль к поверхности. Значит, разность $\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2$ разлагается по касательным векторам: $\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2 = a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$. Обозначим через Y общее значение $\vec{Y}_1 - a\vec{r}_u = \vec{Y}_2 + b\vec{r}_v = \vec{Y}$. Тогда имеем $\vec{Y}_1 = a\vec{r}_u + \vec{Y}$, $\vec{Y}_2 = -b\vec{r}_v + \vec{Y}$. Подставим эти значения $\vec{Y}_1$ и $\vec{Y}_2$ в (1) и получим
$$\vec{Z}_u = [a\vec{r}_u \times \vec{r}_u] + [\vec{Y} \times \vec{r}_u] = [\vec{Y} \times \vec{r}_u],\ \vec{Z}_v = [-b\vec{r}_v \times \vec{r}_v] + [\vec{Y} \times \vec{r}_v] = [\vec{Y} \times \vec{r}_v].$$
Теперь докажем единственность такого вектора $\vec{Y}$. Допустим обратное: есть еще один вектор $\vec{V}$ с таким же свойством $\vec{Z}_u = [\vec{V} \times \vec{r}_u]$, $\vec{Z}_v = [\vec{V} \times \vec{r}_v]$. Тогда имеем $[(\vec{Y} - \vec{V}) \times \vec{r}_u] = 0, [(\vec{Y} - \vec{V}) \times \vec{r}_v] = 0$. Значит, разность $\vec{Y} - \vec{V}$ параллельна одновременно обоим базисным векторам $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, что возможно. только если $\vec{Y} - \vec{V} = 0$, т.е. $\vec{Y} = vecV$, что и утверждалось.

Напомним

Определение 1. Б.м. изгибание поверхности называется *тривиальным*, если оно получено как поле начальных скоростей некоторого движения поверхности как твердого тела..

Теорема 1. *Для того, чтобы поле $\vec{Z}$ было тривиальным полем б.м. изгибания, необходимо и достаточно, чтобы его вектор вращения $\vec{Y}$ был постоянным.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\vec{Y} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \vec{C}$.
$$d\vec{Z} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \{\omega_2 dz - \omega_3 dy, \omega_3 dx - \omega_1 dz, \omega_1 dy - \omega_2 dx\}$$

Отсюда видим, что $\vec{Z} = \{\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x\} + \vec{C}_1$, где $\vec{C}_1$ – некоторый постоянный вектор. Значит, поле $\vec{Z}$ совпадает с полем начальных скоростей движения, описываемого некоторым поступательным движением $t\vec{C}_1 + ...$ и вращением , задаваемым некоторой ортогональной матрицей $A = E + tA_1 + ...$, где
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$
что и доказывает достаточность условия.

Необходимость. Пусть $\vec{Z}$ – тривиальное б.м. изгибание, являющееся начальным полем скоростей некоторого движения, у которого вращение задается матрицей $A = E + tA_1 + ...$, где кососимметрическая матрица A_1 определялась в Лекции 2. Элементы матрицы A_1 являются постоянными числами и мы знаем. что ее действие на точки (x, y, z) поверхности равносильно действию векторного произведения $[\vec{Y} \times r]$, т.е. $\vec{Z} = [\vec{Y} \times \vec{r}] + \vec{C}$. Значит, $d\vec{Z} = [\vec{Y} \times \vec{r}]$, и так как представление в таком виде единственно, то постоянный вектор $\vec{Y}$ и является вектором вращения. □

1 Уравнение для нахождения поля вращения

1.1 Уравнение для поля бесконечно малых изгибаний поверхности, заданной параметрически

После этого у нас появляется инструмент для проверки изгибаемости и неизгибаемости в бесконечно малом смысле. Пусть поверхность задана параметрически: $\vec{r}(u, v)$. Запишем основное уравнение для поля бесконечно малого изгибания:
$$d\vec{Z} = [\vec{y} \times d\vec{r}] = \vec{Z}_u du + \vec{Z}_v dv$$
(далее вектор вращения обозначаем как $\vec{y}$).

Переходим к дифференциальным уравнениям, где $\vec{Z}_u = [\vec{y} \times \vec{r}_u]$, $\vec{Z}_v = [\vec{y} \times \vec{r}_v]$, $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$. Вспомним обычные условия для проверки совместности дифференциальных уравнений:

$\vec{Z}_u = [\vec{y} \times \vec{r}_u]$ — берём производную $\frac{\partial}{\partial v}$.

$\vec{Z}_v = [\vec{y} \times \vec{r}_v]$ — берём производную $\frac{\partial}{\partial u}$.

Получим смешанные производные в разном порядке. Для нашего случая они получаются равными, а значит равны и производные, взятые от правых частей:

$$[y_v \times \vec{r}_u] + [\vec{y} \times \vec{r}_{uv}] = [\vec{y}_u \times \vec{r}_v] + [\vec{y} \times \vec{r}_{vu}]$$

$$[\vec{y}_v \times \vec{r}_u] = [\vec{y}_u \times \vec{r}_v]$$

Можно сделать вывод, что все четыре вектора $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{y}_u, \vec{y}_v$ будут компланарными. Докажем это:

$$[\vec{y}_v \times \vec{r}_u] = [\vec{y}_u \times \vec{r}_v] \quad \Big| \cdot \vec{r}_v$$

$(\vec{y}_v \times \vec{r}_u)\vec{r}_v = 0$, так как смешанное произведение $[[\vec{y}_u \times \vec{r}_v] \cdot \vec{r}_v] = 0$. Применим свойство смешанного произведения к левой части равенства и получим: $\vec{y}_v(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0$, вектор $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ параллелен нормали $\vec{N}$, а значит $\vec{y}_v \perp \vec{N}$.

Аналогичным образом доказываем, что $\vec{y}_u \perp \vec{N}$. В итоге получаем, что $\vec{y}_u$ и $\vec{y}_v$ лежат на плоскости, перпендикулярной к $\vec{N}$. Вектора $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ лежат на касательной плоскости. Получаем, что все четыре вектора лежат на касательной плоскости, а значит они компланарны.

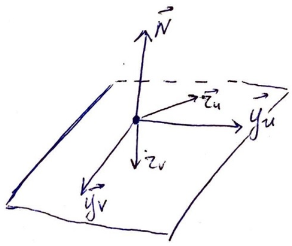

Рис. 2:

Из того, что данные векторы компланарны, вытекает наличие гарантированного базиса на данной плоскости. Это базис $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Два этих вектора всегда лежат на касательной плоскости, и они независимы, из чего следует, что любой вектор в данной касательной плоскости разлагается по базису $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$.

Значит, вектора $\vec{y}_u$ и $\vec{y}_v$ также можно разложить по данному базису:

$$\vec{y}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v \quad (1)$$
$$\vec{y}_v = \gamma\vec{r}_u + \delta\vec{r}_v \quad (2)$$

Подставим (1) и (2) в $[\vec{y}_u \times \vec{r}_v] = [\vec{y}_v \times \vec{r}_u]$:

$$\alpha[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = \delta[\vec{r}_v \times \vec{r}_u]$$

В правой части равенства поменяем порядок умножения $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. От этого изменения поменяется только направление результирующего вектора. В итоге получим:

$$\alpha[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = -\delta[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]$$

Видим, что $\alpha = -\delta$. Подставляя полученное равенство в (2), получим систему из двух дифференциальных уравнений для нахождения $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{y}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v \\ \vec{y}_v = \gamma\vec{r}_u - \alpha\vec{r}_v \end{cases}$$

Поскольку есть уравнения, связывающие частные производные разного вида, то смешанные производные равны. Соответсвенно, применяем оператор дифференциирования к обоим уравнениям системы, чтобы получить смешанные производные.

$$\begin{cases} \vec{y}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v & \Big| \frac{\partial}{\partial v} \\ \vec{y}_v = \gamma\vec{r}_u - \alpha\vec{r}_v & \Big| \frac{\partial}{\partial u} \end{cases}$$

$$\alpha_v\vec{r}_u + \alpha\vec{r}_{uv} + \beta_v\vec{r}_v + \beta\vec{r}_{uv} = \gamma_u\vec{r}_u + \gamma\vec{r}_{uu} - \alpha_u\vec{r}_v - \alpha\vec{r}_{uv} \quad (4)$$

В каждом векторе есть три компоненты, тем самым одно векторное равенство порождает три скалярных равенства. Вспомним, как разлагаются вторые производные:

$$(5)\begin{cases}\vec{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v + L\vec{n}\\ \vec{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}_v + M\vec{n}\\ \vec{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}r_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}_v + N\vec{n}\end{cases}$$

Γ^k_{ij} – это символы Кристоффеля.

Если подставить (5) в (4), то получим три уравнения. Соберём все коэффициенты перед $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ и $\vec{n}$, и получим:

$$A\vec{r}_u + B\vec{r}_v + C\vec{n} = \vec{0}$$

В ходе всех рассуждений выше предполагалось, что указанные производные существуют. Поэтому, если производных нет, то предполагаем, что в таком случае имеем поле бесконечно малого сгибания плохое в смысле свойства гладкости. Мы рассматриваем гладкое поле бесконечно малого сгибания.

В итоге получим основную систему для нахождения вектора $\vec{y}$:

$$(6)\begin{cases}L\gamma - 2M\alpha - N\beta = 0\\ \alpha_v - \gamma_u = \Gamma^1_{11}\gamma - 2\Gamma^1_{12}\alpha - \Gamma^1_{12}\beta\\ \alpha_u + \beta_v = \Gamma^2_{11}\gamma - 2\Gamma^1_{22}\alpha + \Gamma^2_{22}\beta\end{cases}$$

Коэффициенты при нормальном векторе в (5) и в 1 уравнении (6) берутся из II квадратичной формы: $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$

После решения данной системы уравнений находим:

$$\begin{cases}\vec{y}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v\\ \vec{y}_v = \gamma\vec{r}_u - \alpha\vec{r}_v\end{cases}$$

Зная частные производные $\vec{y}_u$ и $\vec{y}_v$ можем найти сам вектор $\vec{y}$ путем интегрирования. В свою очередь, зная $\vec{y}$, можем найти $d\vec{Z} = \vec{y} \times d\vec{r}$.

Далее наши исследования будут сводиться к тому, как решить систему (6).

1.2 Уравнение для поля бесконечно малых изгибаний поверхности, заданной в явном виде

Как будет выглядеть система (6), если поверхность задана в явном виде: $z = f(x, y)$?

В этот раз базис будет стандартный: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. $\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$.

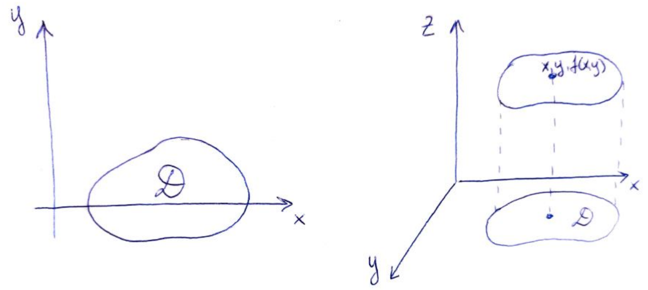

Рис. 3:

Как для такой поверхности будем искать поле бесконечно малого изгибания? Будем искать его в виде $\vec{Z} = \{\xi(x, y), \eta(x.y), \zeta(x, y)\}$, где ξ, η, ζ — искомые функции.

Запишем основное уравнение в теории бесконечно малых изгибаний:

$$d\vec{r}d\vec{Z} = 0$$

Распишем более подробно его составляющие:

$$d\vec{r} = \{dx, dy, f_x dx + f_y dy\}$$

$$d\vec{Z} = \{d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy, d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy, d\zeta = \zeta_x dx + \zeta_y dy\}$$

Соберем все соответсвующие коэффициенты в левой части уравнения.

$$\underbrace{(\ \dots\ )}_{=0} dx^2 + \underbrace{(\ \dots\ )}_{=0} dxdy + \underbrace{(\ \dots\ )}_{=0} dy^2 = 0$$

Получим три уравнения:

$$(7)\ \begin{cases} \xi_x + p\zeta_x = 0 \\ \xi_y + \eta_x + q\zeta_x + p\zeta_y = 0 \\ \eta_y + q\zeta_y = 0, \end{cases}$$

где $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$$\begin{cases} \xi_x + p\zeta_x = 0 & \Big| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \xi_y + \eta_x + q\zeta_x + p\zeta_y = 0 & \Big| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \eta_y + q\zeta_y = 0 & \Big| \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{cases}$$

Сложим 1-е и 3-е уравнения системы и вычитаем из суммы 2 уравнение системы. Останется $\zeta_{xx} - 2s\zeta_{xy} + r\zeta_{yy} = 0$ — уравнение для компоненты ζ. Если знаем ζ, то знаем ξ_x и η_y. Таким образом, ξ_x и η_y могут быть найдены через квадратуры, т.е., неопределенные интегралы (докажите это !).

Если имеется уравнение второго порядка, то можно определить его тип (эллиптический, гиперболический или параболический).

Какая задача ставится для уравнения эллиптического типа? Это задача Дирихле:

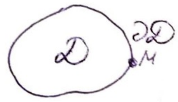

Рис. 4:

Ищется функция U с условиями, что на границе области она обращается в заданную функцию: $U|_{\partial D} = \varphi(M)$.

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ t\zeta_{xx} - 2s\zeta_{xy} + r\zeta_{yy} = 0 \\ rt - s^2 > 0, \end{cases}$$

$rt - s^2 > 0$ — геометрический смысл — выпуклость поверхности. $K = \dfrac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$ — кривизна поверхности.

Приведем пример. Возьмем поверхность следующего вида:

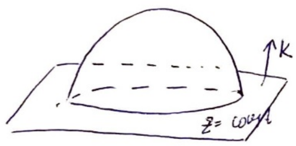

Рис. 5:

(например, $z = 1 - (x^2 + y^2)$).

Рассматриваем бесконечно малое изгибание скольжения. Это значит, что поверхность может изменять свою форму, но точки ее края должны сохранять свою z-координату (в нашем примере край должен оставаться на плоскости, если он был на плоскости $z = 0$).

Переведем понятие скольжения на математический язык: Имеем задач Дирихле:

$$\begin{cases} t\zeta_{xx} - 2s\zeta_{xy} + r\zeta_{yy} = 0 \\ \zeta|_{\partial D = 0} \quad \text{(условие скольжения)} \end{cases}$$

У такой задачи существует единственное решение $\zeta \equiv 0$. Это означает, что для данного вида поверхности единственный возможный вид бесконечно малого изгибания, которое не нарушает целостности поверхности, - это деформация, которой соответствует тривиальное поле изгибания.

Докажем это. В силу 1-го и 3-го уравнений системы (7) видим, что $\xi_x = 0$, т.е. ξ от x не зависит, значит, $\xi = \xi(y)$; аналогично, $\eta = \eta(x)$. Тогда из 2-го уравнения имеем, что сумма двух функций от разных переменных тождественно равна нулю, что бывает, только если обе они нули или равные постоянные разного знака, т.е., $\xi_y = C, \eta_x = -C$. Пусть $\vec{Y} = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ – вектор вращения. По его определению имеем

$$d\vec{Z} = [\vec{Y} \times d\vec{r}]$$

или $Cdy = pY_2dx + (qY_2 - Y_3)dy, -Cdx = (Y_3 - pY_1)dx - qY_1dy, 0 = Y_1dy - Y_2dx$, откуда получаем, что $Y_1 = Y_2 = 0, Y_3 = -C$, т.е.вектор вращения постоянный, что и означает тривиальность полученного б.м. изгибания.