# Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
# Лекция 2 от 8.10.2021

Лектор Сабитов И.Х.

## 1 Движения и бесконечно малые изгибания

**Определение 1. Движением в пространстве** называется всякое его отображение на себя, **сохраняющее расстояния** между всеми парами точек.

Из теоретической механики известно, что каждое движение можно рассматривать как сумму вращательного и поступательного движений. Объясним это на математическом языке. Их определения движения следует, что соответствующее отображение непрерывно в обе стороны и взаимно-однозначно, т.е. оно является гомеоморфизмом. Очевидно, что движения составляют группу относительно операции композиции (т.е. "движение от движения тоже является движением"). Среди движений выделяются те, которые оставляют одну и ту же точку пространства неподвижной. Такие движения составляют подгруппу в группе движений.

Введем в пространстве систему координат с началом в неподвижной точке $O$. Если пространству точек сопоставить векторное пространство, в котором нулевому вектору сопоставлено начало координат, тогда всякому вектору $\overrightarrow{OP}$ с концевой точкой $P$ движением будет сопоставлен некоторый вектор $\overrightarrow{O\tilde{P}}$ с той же длиной, что и у $OP$ В курсе линейной алгебры доказывается, что всякое движение с неподвижной точкой $O$ описывается некоторой ортогональной матрицей (см., например, Л.И. Головина. Линейная алгебра и некоторые ее приложения, любое издание, гл.XI) с определителем $\pm 1$. Мы ограничимся отображениями, сохраняющими ориентацию, так что работаем с ортогональными матрицами с $det = +1$.

Ортогональная матрица $\mathbb{O}$ в $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha$ – угол поворота, так что точка $M$ координатами $(x, y)$ в результате действия матрицы перейдет в точку $\tilde{M}$ с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbb{O} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ xsin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Действие любой ортогональной матрицы $\mathbb{O}$ в $\mathbb{R}^3$ можно представить как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат и, соответственно, она имеет вид

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \alpha^2(1-\cos\theta) & -\gamma\sin\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta) & \beta\sin\theta + \alpha\gamma(1-\cos\theta) \\ \gamma\sin\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta) & \cos\theta + \beta^2(1-\cos\theta) & -\alpha\sin\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta) \\ -\beta\sin\theta + \alpha\gamma(1-\cos\theta) & \alpha\sin\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta) & \cos\theta + \gamma^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix},$$

где $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ - единичный вектор оси вращения; $\theta$ – угол поворота вокруг оси вращения. Например, если поворот происходит вокруг оси $Oz$, то $(\alpha, \beta, \gamma)^T = (0, 0, 1)^T$ и действие матрицы $\mathbb{O}$ будет такое :

$$\mathbb{O} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ xsin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

в полном соответствии с предыдущей формулой для вращения на плоскости.

**Задание 1.** Используя известные признаки ортогональности матриц, проверьте, что написанная матрица $\mathbb{O}$ действительно является ортогональной..

.

**Задание 2.** Убедитесь, что если взять произвольную точку, лежащую на оси с направляющим вектором $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, то она после применения матрицы $\mathbb{O}$ останется на месте.

Как было сказано в начале, всякое движение можно представить как сумму параллельного переноса и вращения вокруг начала координат. Как пример проверки этого утверждения, рассмотрим, как вращение на плоскости вокруг произвольной точки $M_0(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ может быть представлено как сумма некоторого параллельного переноса и вращения вокруг начала координат. Перенесем начало координат в точку $M_0$ и обозначим через $(x', y')$ новые координаты. Их связь с прежними координатами очевидна: $x' = x - x_0, y' = y - y_0$. В новой системе координат поворот вокруг точки $M_0$ является поворотом вокруг начала координат, поэтому точка $M$ с координатами $(x', y')$ перейдет в точку $\tilde{M}$ с координатами

$$\tilde{x}' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \tilde{y}' = x' sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Возвращаясь к исходной системе координат, получаем, что точка $\tilde{M}$ имеет координаты

$$\tilde{x} = \tilde{x}' + x_0 = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha) + x_0 = x_0 - x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha + x\cos\alpha - y\sin\alpha = A + x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$\tilde{y} = \tilde{y}' + y_0 = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0 = y_0 - x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha + x\sin\alpha + y\cos\alpha = B + x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

где вектор $\{A, B\} = \{x_0 - x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha, y_0 - x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha\}$ не зависит от выбора поворачиваемой точки $M$ и поэтому он соответствует сдвигу всей плоскости на этот вектор, т.е. параллельному переносу. Оставшаяся часть преобразования как раз и представляет собой поворот точки $M$ вокруг начала координат (заметим, что угол поворота вокруг начала координат тот же, что и для исходного поворота вокруг точки $M_0$).

**Задание 3.** Рассмотрите более сложное движение, состоящее из двух последовательных поворотов на углы $\alpha$ и $\beta$, сначала вокруг точки $M_1(x_1, y_1)$, а затем вокруг образа другой точки $M_2(x_2, y_2)$, полученного в ходе первого поворота, и покажите, что действие двух поворотов можно свести к действию одного поворота вокруг начала координат с добавлением некоторого переноса.

Теперь рассмотрим непрерывное движение. Это значит, что элементы ортогональной матрицы

$$\mathbb{O}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}$$

и вектор переноса $C(t)$ зависят от времени $t$. В начальный момент вектор переноса равен нулю, ортогональная матрица является единичной, а элементы ее предполагаем имеющими производную первого порядка. Тогда каждый элемент $a_{ij}(t)$ ортогональной матрицы имеет представление $a_{ij}(t) = a_{ij}(0) + ta^0_{ij} + o(t), t \to 0)$ вся матрица представима в виде

$$\mathbb{O} = E + tA_1 + o(t), t \to 0 \tag{1}$$

(конечно, под $o(t)$ здесь подразумевается матрица, все элементы которой имеют порядок $o(t)$). Так как матрица $\mathbb{O}$ ортогональная, то транспонированная матрица $\mathbb{O}^T = E + tA_1^T + o(t)$ является обратной к ней. Умножая (1) на $\mathbb{O}^T$ получаем

$$E = E + t(A_1 + A_1^T) + o(t).$$

Следовательно, матрица $A_1$ с числовыми элементами является кососимметрической и поэтому ее можно представить в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действие матрицы $\mathbb{O}$ на точки с радиус-вектором $\vec{r}(u, v)$ дает преобразование

$$\vec{r}(u, v; t) = \vec{r}(u, v) + tA_1\vec{r}(u, v) + ...,$$

где

$$tA_1\vec{r} = t\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix},$$

что в итоге дает

$$\vec{r}(u,v;t)=\vec{r}(u,v)+t\begin{pmatrix}-y\omega_3+z\omega_2\\ x\omega_3-z\omega_1\\ -x\omega_2+y\omega_1\end{pmatrix}+...$$

Обозначим вектор

$$\begin{pmatrix}-y\omega_3+z\omega_2\\ x\omega_3-z\omega_1\\ -x\omega_2+y\omega_1\end{pmatrix} \tag{2}$$

через $\vec{Z}$ и вычислив его дифференциал, находим

$$d\vec{r}\cdot d\vec{Z}=0.$$

Это значит, деформация $\vec{r}(u,v;t)=\vec{r}(u,v)+t\vec{Z}$ является б.м. изгибанием, причем поле $\vec{Z}$ является полем начальных скоростей вращения, описываемого матрицей $\mathbb{O}(t)$. Нетрудно проверить, что начальная скорость поступательного движения $C(t)=t\{C_1,C_2,C_3\}$ тоже задает поле б.м. изгибание вида $\vec{Z}=\{C_1,C_2,C3\}$. Эти способы задания б.м. изгибания выделяют как особые случаи следующим определением

**Определение 2.** Если поле б.м.изгибания может быть представлено как поле начальных скоростей некоторого движения, тогда оно называется **тривиальным** б.м. изгибанием.

Далее, действие матрицы $A_1$ на $\vec{r}(u,v)$, представленное уравнением (2), равносильно результату векторного произведения $[\vec{\omega}\times\vec{r}]$, где $\vec{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. Поэтому поле тривиального б.м. изгибания в общем случае имеет вид

$$\vec{Z}=\vec{C}+[\vec{\omega}\times\vec{r}], \tag{3}$$

где $\vec{C}$ и $\vec{\omega}$ – произвольные постоянные векторы. Слагаемое $[\vec{\omega}\times\vec{r}]$ в формуле (3) дает значение вектора скорости движения точки $(x,y,z)$ при ее равномерном вращении с угловой скоростью $|\vec{\omega}|\frac{radian}{\sec}$ вокруг оси, проходящей через начало координат в направлении вектора $\vec{\omega}$. Этот вектор $\vec{\omega}$ называется **вектором вращения**.