Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 10 от 17.12.2021

Лектор Сабитов И.Х.

1 Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения

Доказали отсутствие изгибаний для выпуклых поверхностей. Для поверхностей вращения надо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Они решаются проще и про них известно больше результатов. После лекции будем знать, как для поверхностей вращения искать существующие бесконечно малые изгибания или доказывать, что их нет. Начнем с понятия поверхности вращения и получим уравнения, описывающие поверхности вращения. Как получается поверхность вращения? Она получается вращением кривой. Что мы имеем? Имеем обыкновенную систему координат $Oxyz$ и кривую, расположенную на плоскости xz.

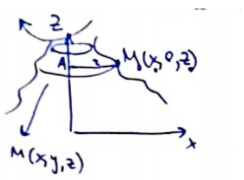


Рис. 1: Кривая

Уравнение кривой f(x,z)= 0 (уравнение, связывающее 2 переменные). Вращаем кривую вокруг оси z. По ходу вращения эта кривая движением вращения переходит в новые положения, которые называются **меридианами** поверхности вращения Каждая точка кривой описывает окружность. Эти окружности называются **паралеллями** поверхности вращения. Это легко запомнить по аналогии с меридианами и параллелями на глобусе земного шара. Когда повернем кривую вокруг оси z, получим некоторая поверхность. Как найти уравнение этой поверхности? Можно добавить информацию, что в начальный момент а кривой координата $y = 0$. Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, 0, z_0)$. При повороте точка M_0 перейдет в некоторую точку $M(x, y, z)$. Что скажем про координату z? Очевидно, она не изменится, будет : $z = z_0$. Расстояние до оси вращения равно радиусу $r = x_0$ (радиус в начальный момент времени, вычисляется как расстояние от оси вращения). По ходу вращения $r = const$, значит, расстояние от точки $M(x, y, z)$ до оси вращения равно $\sqrt{x^2 + y^2} = r = x_0$, Следовательно, . для произвольной точки (x, y, z_0) параллели имеем равенство $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z_0) = f(x_0, z_0) = 0$. Это верно при любом z_0, значит, для произвольной точки $M(x, y, z)$ поверхности вращения с меридианом $f(x, z) = 0$ выполнено равенство

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

это и есть уравнение поверхности вращения вокруг оси Oz. Теперь нетрудно написать уравнения поверхностей вращения и вокруг других осей координат при известном уравнении меридиана.

Рассмотрим:

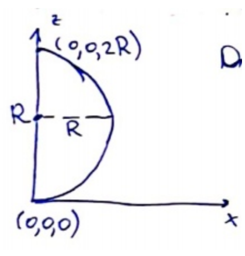


Рис. 2:

Рассматриваем уравнение окружности с центром в точке (0,0,R) и радиусом R.

$$f(x,z) : x^2 + (z - R)^2 - R^2 = 0$$

Тогда по сказанному

$$L : x^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Получим уравнение вращение. Повернув окружность получим сферу. Надо взять уравнение и вместо x написать сумму квадратов, а z оставляем на месте. Получаем уравнение сферы:

$$S : (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + (z - R)^2 - R^2 = 0$$

Упрощаем:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Получили стандартное уравнение сферы с известным центром и радиусом.

Возьмем совсем простой случай:

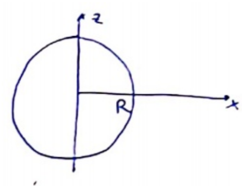


Рис. 3:

Берем уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Когда его вращаем, получаем:

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Возводим в квадрат и получаем классическое уравнение сферы, рассматриваемое как поверхность вращения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Задание 1. Возьмем кривую из начала лекции $f(x,z) = 0$, но вращаем вокруг Ox

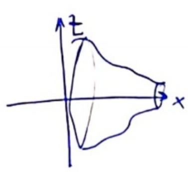


Рис. 4:

Написать уравнение этой поверхности вращения.

Задание 2. Получить параболоид вращения и тор.

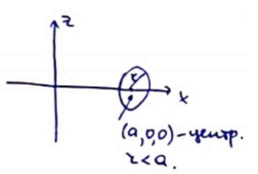


Рис. 5: Тор1

Вращаем окружность вокруг Oz, следовательно получим круговой тор.

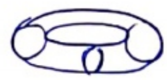


Рис. 6: Тор2

Написать уравнения поверхности вращения.

Мы привыкли работать с поверхностями, заданными параметрически. Как написать параметрическое уравнение поверхности вращения? Рассмотрим такую:

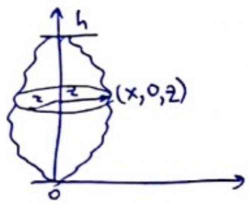


Рис. 7:

Имеем кривую, которая имеет горизонтальные касательные.

$$0 \le z \le h, 0 \le \phi \le 2\pi$$

Уравнение кривой: $x = f(z) = r$ x - расстояние до оси вращения (радиус). Вращаем кривую. Запишем уравнение поверхности в параметрах:

$$\left.\begin{array}{c} x = rcos\phi = f(z)cos\phi \\ y = rsin\phi = f(z)sin\phi \\ z = z = z \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - (z, \phi)$$

Для каких кривых это уравнение годится? Вернее, для каких кривых оно не годится? Рассмотрим вот такую кривую:

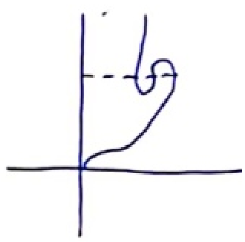


Рис. 8:

На ось z проецируются 3 точки на 1 точку на оси вращения. Получается многозначная функция. $r = f(z), -$

Как записать в общем виде? В общем виде: $f : x = x(t), z = z(t)$ - уравнение кривой, которая вращается.

$$\begin{cases} x = x(t)cos\phi, \\ y = x(t)sin\phi, \\ z = z(t). \end{cases}$$

Рассмотрим еще одну запись. Задавали z и определяли уравнение. Возьмем параболу и будем вращать. Теперь возьмем за основу ρ.

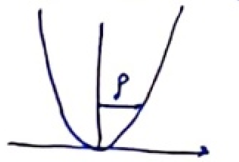


Рис. 9:

Тогда $z = z(\rho)$. Поверхность имеет вид:

$$z = z(\sqrt{x^2 + y^2})$$

, когда считаем известным это расстояние (ρ)

Как написать уравнение бесконечно малых изгибаний для таких поверхностей? Работаем в подвижной системе координат $\{\overline{e}, \overline{e'}, \overline{k}\}$. Вводим вектор

$$\overline{e}(\phi) = cos\phi_i + sin\phi_j (\text{это единичный вктор, который вращается вокруг Oz})$$

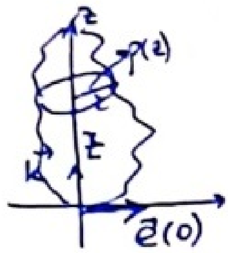


Рис. 10:

У него есть производная:

$$\overline{e'}(\phi) = -sin\phi_i + cos\phi_j$$

Возьмем третий вектор, идущий по оси z: $\overline{k}$ по оси $\overline{z}$. $\overline{k} = \{0, 0, 1\}$

Тогда уравнение поверхности вращения:

$$\overline{r}(z, \phi) = z\overline{k} + \rho(z)\overline{e}(\phi)$$

Соответственно разложили по трем векторам: $\overline{e}, \overline{e'}, \overline{k}$ Когда 3 вектора могут быть базисом? Если они линейно независимы(взаимно перпендикулярны). В данном случае - это ортонормированный базис,т.к. их длина равна единице. Следовательно r может быть по нему разложено.

Имея такой базис, ищем бесконечно малые изгибания. (z, ϕ) - внутренние координаты. Ищем $\overline{U}$- поле бесконечно малого изгибания. Оно разлагается по этому же базису, равному $\alpha(z, \phi)\overline{k}+\beta(z, \phi)\overline{e}+\gamma(z, \phi)\overline{e'}$, где α, β, γ - искомые величины. Связь между радиус-вектором и полем бесконечно малых изгибаний:

$$d\overline{r}d\overline{U} = 0$$

Теперь надо его раскрыть. Посчитаем дифференциалы.

$$d\overline{r} = \overline{k}dz + \rho'_z\overline{e}dz + \rho e'(\phi)d\phi = (\overline{k} + \rho'_z\overline{e})dz + \rho e'(\phi)d\phi$$

$$d\overline{U} = d\alpha\overline{k} + d\beta\overline{e} + \beta e'_\phi d\phi + d\gamma\overline{e}' + \gamma de' =$$

$$= (\alpha'_z\overline{k} + \beta'_z\overline{e} + \gamma'_z e')dz + (\alpha'_\phi\overline{k} + \beta'_\phi\overline{e} + \beta e'_\phi + \gamma_\phi e' - \gamma\overline{e})d\phi$$

Нужно их перемножить. Нам встретятся $dz^2, d\phi^2, dzd\phi$. При dz^2:

$$(\overline{k} + \rho'_z\overline{e})(\alpha_z\overline{k} + \beta'_z e + \gamma'_z e')dz$$

Получаем первое уравнение:

$$\alpha'_z + \rho'_z\beta'_z = 0 \tag{1}$$

Ищем дальше. При $d\phi^2$:

$$\rho\overline{e'}[\alpha'_\phi\overline{k}+(\beta'_\phi-\gamma)\overline{e}+(\beta+\gamma_\phi)\overline{e'}]$$

$$\rho(\beta+\gamma_\phi)=0$$

Получаем

$$\beta+\gamma_\phi=0 \tag{2}$$

При $dzd\phi$:

$$(\overline{k}+\rho'_z\overline{e})[\alpha'_\phi\overline{k}+(\beta'_\phi-\gamma)\overline{e}+(\beta+\gamma_\phi)\overline{e'}]+\rho e'_\phi(\alpha'_z\overline{k}+\beta'_z e+\gamma'_z e')=0$$

$$\alpha'_\phi+\rho'_z(\beta'_\phi-\gamma)+\rho\gamma'_z=0 \tag{3}$$

3 неизвестные α,β,γ и 3 уравнения. Избавимся от частных производных. Все что мы пишем - периодическое по ϕ: $0\le\phi\le 2\pi$(т.к. вращаем), следовательно воспользуемся разложением функции в ряд Фурье.

$$\alpha=\sum_{k=+\infty}^{+\infty}\alpha_k(\rho)e^{ik\phi}$$

$$\beta=\sum_{k=+\infty}^{+\infty}\beta_k(\rho)e^{ik\phi}$$

$$\gamma=\sum_{k=+\infty}^{+\infty}\gamma_k(\rho)e^{ik\phi}$$

α,β,γ - действительные. Требование:

$$Im\alpha=0, Im\beta=0, Im\gamma=0.$$

Т. е.

$$Im[\alpha_{-2}(\rho)e^{-2i\phi}+\alpha_2(\rho)e^{2i\phi}]=0$$

$$\alpha_{-2}=\overline{\alpha_2}$$

Тогда дополнительные условия на коэффициенты Δ:

$$\alpha_k=\overline{\alpha_k}, \alpha_0(\rho) \text{ - действительное}$$

$$\beta_k=\overline{\beta_{-k}}, \beta_0(\rho) \text{ - действительное}$$

$$\gamma_k=\overline{\gamma_k}, \gamma_0(\rho) \text{ - действительное}$$

Подставим разложения в (1),(2),(3):

$$\alpha_z=\sum_{k=+\infty}^{+\infty}(\alpha_k(\rho))'_z e^{ik\phi}, \rho=\rho(z)$$

((т.к. ρ - функция от z, берем производную по z))

$$\alpha_p hi=\sum_{k=+\infty}^{+\infty}\alpha_k(\rho)ike^{ik\phi}$$

Таким образом, в (1),(2),(3) заменим α,β,γ через k-й член Фурье, потом собираем всё по степеням k и переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}\alpha'_k+\rho'_z\beta'_k=0,\\ ik\gamma_k+\beta_k=0, & \forall k>0(\text{т.к.}\Delta)\\ ik\alpha_k+\rho'_z(ik\beta_k-\gamma_k)+\rho\gamma'_k=0.\end{cases}$$

Это бесконечная система уравнений. На эти коэффициенты α,β,γ есть условие, которое автоматически вытекает из требования непрерывности искомого поля в полюсе. Если у нас есть кривая, которая крутится вокруг 0, эта точка называется полюсом поверхности вращения:

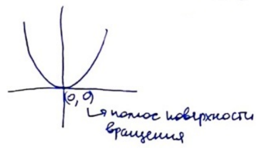


Рис. 11:

При переходе от полярных координат к декартовым в полюсе $J = r = 0$ (J - якобиан), следовательно все теоремы о взаимосвязи функций в декартовых и полярных координатах не работают. Связь хорошая, если J не равен 0. Т. е. в полярных координатах функция не имеет те же свойства, что в декартовых. Когда работаем в декартовой системе координат точка (0,0) ничем не выделяется.

$$x = rcos\phi$$

$$y = rsin\phi$$

Связь между декартовыми и полярными координатами не взаимно-однозначно. Если $r = 0$, тогда точке (0,0) в декартовых координатах соответствует любое значение ϕ. Запишем поле:

$$\overline{U} = \alpha\overline{k} + \beta e + \gamma e'$$

$$\begin{cases} e = cos\phi i + sin\phi j, \\ e' = sin\phi i + cos\phi j \end{cases}$$

Найдем i, j через e, e':

$$\begin{cases} \overline{i} = cos\phi e - sin\phi e', \\ \overline{j} = sin\phi e + cos\phi e' \end{cases}$$

Тогда $\overline{U} = \alpha\overline{k} + \beta\overline{e} + \gamma\overline{e}' = \alpha\overline{k} + (\beta cos\phi - \gamma sin\phi)i + (\beta sin\phi + (\gamma cos\phi)j$

Хотим, чтобы: U - непрерывна в точке (0,0). Когда подходим к точке (0,0), $cos\phi$ и $sin\phi$ принимают все значения. Нам нужно, чтобы коэффициенты при i,j имели 1 конкретное значение в (0,0), равное значению поля $\overline{U}$. Когда скобка имеет единственное значение? Когда $\beta(0,\phi) = \gamma(0,\phi) = 0$ относительно ϕ. Требование регулярности относительно регулярных координат i, j дают автоматически условие: β и γ в полюсе равны 0.

Если функция обращается тождественно в 0 относительно ϕ, то ее ряд Фурье будет иметь нулевые коэффициенты. Функция, тождественно равная нулю, относительно ϕ при разложении в ряд по ϕ имеет тождественный 0. Следовательно, на нашу систему всегда автоматически действует условие $\alpha_k(0) = \beta_k(0) = \gamma_k(0) = 0$.

Кроме того, обратим внимание на тривиальные б.м. изгибания. Их вид:

$$\overline{A} + [\overline{\omega} \times \overline{r}]$$

Когда разложим в ряд Фурье, окажется, что $\beta_1, \gamma_1, \alpha_1 = 0$ и $\beta_0, \gamma_0, \alpha_0 = 0$. За счет добавления тривиального бесконечно малого изгибания можно добиться, чтобы коэффициенты при α, β, γ при $k = 0, 1$ были 0, следовательно, решаем систему при $k \geq 2$

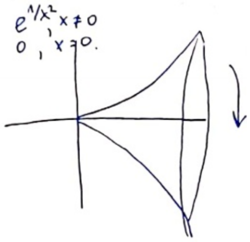
2 Б. м. изгибания поверхностей вращения в целом

Итак, нам нужно решать систему

$$\begin{cases} \alpha'_k + \rho'_z\beta'_k = 0, \\ ik\gamma_k + \beta_k = 0, \\ ik\alpha_k + \rho'_z(ik\beta_k - \gamma_k) + \rho\gamma'_k = 0. \end{cases} \qquad \text{При } k \geq 2$$

Пока неизвестно, есть ли регулярная поверхность вращения, для которой эта система имела бы решения при $\forall k$ от 2 до ∞. Есть теорема, что $\forall k_1, k_2, ..k_n(\forall n)$ целых чисел существует поверхность, что система имеет ненулевое решение при этих значениях k. (Эти решения $k_1, ..k_n$ -называются гармоники)

Пример Э.Г. Позняка нерегулярной поверхности с бесконечным числом гармоник получается при вращении вокруг оси Ox графика функции $y = e^{-\frac{1}{x^2}}, x > 0, y(0) = 0$



В полюсе заострение. У поверхности нет гладкости. Это поверхность, для которой данная система имеет решение при всех целых k.

Система (*) получилась первого порядка. Посчитаем производные 2-го уровнения:

$$ik\gamma_k' + \beta_k' = 0|\dot{i}$$

$$-k\gamma_k' + i\beta_k' = 0$$

получаем:

$$\gamma_k' = \frac{i}{k}\beta_k'$$

Подставим в 3-е уравнение:

$$ik\alpha_k + \beta_z'(ik\beta_k - \frac{i}{k}\beta_k) + \rho\frac{i}{k}\beta_k'$$

Умножим 2-е уравнение на i:

$$-\gamma_k + i\beta_k = 0$$

$$\gamma_k = \frac{i}{k}\beta_k$$

получаем

$$\begin{cases} \alpha_k' + \rho_z'\beta_k' = 0, \\ i_k\alpha_k + \rho_z'\frac{k^2-1}{k}i\beta_k + \frac{i\rho}{k}\beta_k' = 0. \end{cases}$$

Могли не избавляться от γ_k, а искать уравнение, где нет α_k и β_k. Не будем его выводить, сразу запишем ответ:

$$\rho\gamma_k'' + (k^2-1)\rho''\gamma_k = 0$$

, который можно получить после еще одного дифференцирования, это уравнение 2-го порядка для одного неизвестного. То есть, если мы имеем выпуклую поверхность после вращения выпуклой кривой.

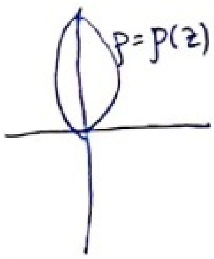


Рис. 12:

Условие выпуклости кривой через 2-ю производную:

$$\rho'' \leq 0 \text{график выпуклый от оси вращения}$$

$$\rho'' > 0 \text{график выпуклый к оси вращения}$$

Рис. 13:

Теорема Штурма говорит, что если в уравнении $y'' + qy = 0$ коэффициент $q \leq 0$, то решение является неколеблющимся, то есть не может обращаться в 0 в двух точках. В нашем случае непрерывное в полюсе решение автоматически обращается в нем в ноль. Если поверхность вращения имеет два полюса, тогда любая гармоникиа поля бесконечно малых изгибаний должна обращаться в 0 в двух точках, но для выпуклой поверхности $\frac{\rho''}{\rho} \leq 0$, значит, по теореме Штурма такого быть не может. Тем самым доказано, что замкнутая выпуклая поверхность вращения является жесткой, т.е. имеем еще одно доказательство жесткости такой поверхности..