Анализ и алгебра в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и многогранников
Лекция 1 от 1.10.2021

Лектор Сабитов И.Х.

1 Основные понятия теории изгибаний

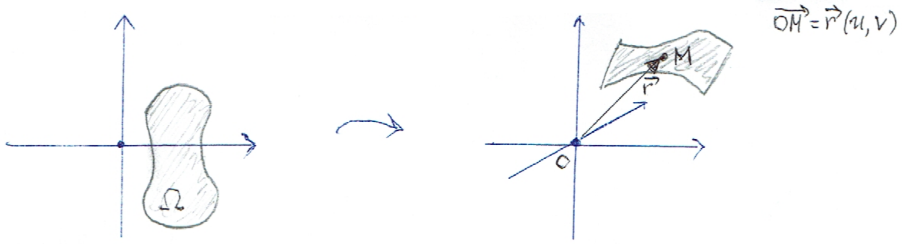
В первую очередь нам понадобится следующее

Определение 1. Изометричные поверхности – это поверхности, между которыми существует гомеоморфизм, сохраняющий длины соответствующих друг другу кривых.

Например, односвязная область на прямом круговом цилиндре и часть плоскости (развёртка этой области цилиндра на плоскость) изометричны, но при этом цилиндр не изометричен всей своей развертке на плоскости, потому что развертка всего цилиндра, представляющая собой полосу на плоскости между двумя параллельными прямыми, не будет гомеоморфной самому цилиндру, так как одна образующая цилиндра переходит в две граничные прямые полосы.

Задание 1. Нарисуйте соответствующий рисунок.

Пусть задана параметризация поверхности, то есть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и её отображение в евклидово пространство $\Omega \to \mathbb{R}^3$. Здесь и далее мы предполагаем (если не указано обратного), что все отображения и функции дифференцируемы необходимое число раз. Координаты u, v на $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$ называются **внутренними координатами** точек поверхности.



Вектором $\vec{r}$ будем, как обычно, обозначать радиус-вектор точки: $\vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$. Здесь и далее будем придерживаться следующих обозначений: круглые скобки $(\cdot,\cdot,\cdot)$ используются для координат точки, а фигурные $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ – для координат вектора.

Вспомним, как вычисляются компоненты **первой квадратичной формы** $ds^2 = E(u,v)du^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = dr^2 = (\vec{r}_u du, \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2(\vec{r}_u, \vec{r}_v)dudv + \vec{r}_v^2 dv^2$:

$$E = (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2.$$

Предполагается, что квадратичная форма для ds^2 является положительно определенной, т.е. $E(u,v) > 0, G(u,v) > 0, EG - F^2 > 0$. При выполнении этих условий поверхность называется *регулярной*.

Имеет место следующая теорема Эйлера

Теорема 1. *Для того, чтобы две регулярные поверхности (с общей областью Ω внутренних координат) были изометричны, необходимо и достаточно, чтобы их первые квадратичные формы в точках с одинаковыми внутренними координатами совпадали.*

Сопоставление изометричных поверхностей по равенству их первых квадратичных форм называется *изометрией по равенству внутренних координат.*

Задание 2. Рассмотрите две открытые полусферы, одну представленную явным уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} > 0$, другую - сферическими координатами $x = R\cos\varphi\cos\psi, y = R\sin\varphi\cos\psi, z = R\sin\psi > 0$. У них *разные* внутренние координаты. Установите между ними изометрию по равенству внутренних координат. Как привести их к одинаковым внутренним координатам, если первая полусфера задана уравнением $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} > 0$?

Замечание 1. Существуют и нерегулярные изометричные поверхности (например, многогранники.и кусочно-гладкие поверхности), но для них даются свои определения изометричности.

2 Изгибания

Определение 2. *Изгибанием* поверхности называется такая ее непрерывная деформация, в ходе которой длины кривых на поверхности не изменяют свою длину (такие деформации называются *изометрическими*).

Более формальное определение изгибания с уточнением условий его гладкости следующее. Пусть данная поверхность S с радиус-вектором $r : \Omega \to \mathbb{R}^3$ включена в семейство поверхностей S_t с радиус-векторами $r(u,v;t) : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3$, где числовой параметр t принадлежит некоторому интервалу $I = (-t_0, t_0)$ и $S = S_0$. Считаем, что регулярные отображения $r(u,v;t) : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3$ принадлежат классу $C^N_{k,M}$. Это означает, что при каждом $t \in I$ поверхность $S_t(u,v)$ имеет гладкость данного класса N, который может изменяться от класса C^1 до аналитической гладкости C^A в Ω, и все производные вида

$$\frac{\partial^{l+q} r(u,v;t)}{\partial^p u \partial^{l-p} v \partial^q t}, 0 \le p \le l \le k, 0 \le q \le M$$

должны существовать и быть непрерывными, т.е. деформация имеет относительно t гладкость данного класса $M, 0 \le M \le A$, для всех производных по u, v до данного общего порядка $k \le N$ включительно. Про такие изгибания говорят, что они происходят в классе поверхностей гладкости C^N с гладкостью класса C^M относительно параметра для производных данного порядка $k \le N$. .

В связи с данным определением возникают следующие вопросы.

Вопрос. Всякая ли поверхность допускает изгибание?

Гипотеза (Эйлера)**.** Компактные поверхности (то есть, замкнутые поверхности без границы) неизгибаемы.

Теорема 2 (А.В. Погорелов)**.** *Любая компактная* выпуклая *поверхность гладкости класса C^2 неизгибаема.*

В общем случае гипотеза Эйлера до сих пор не доказана и не опровергнута. Есть некоторые основания думать. что ее справедливость зависит от класса гладкости рассматриваемых изгибаний как по отношению к классу гладкости самих поверхностей, так и по отношению к классу гладкости относительно параметра деформации. г

Рассмотрим теперь радиус-вектор точки на деформируемой поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u,v,t)$ и предположим, что зависимость от параметра t аналитическая. Тогда

$$\vec{r}(u,v,t) = \vec{r}(u,v) + t\vec{Z}_1(u,v) + t^2\vec{Z}_2(u,v) + t^3\vec{Z}_3(u,v) + \dots,$$

где $\vec{Z}_i$ – какие-то вектор-функции, а $\vec{r}(u,v) = \vec{r}(u,v,0)$ – радиус-вектор исходной поверхности.

Обозначим через $\vec{U}$ **вектор деформации** $\vec{U}(u,v,t) = \vec{r}(u,v,t) - \vec{r}(u,v) = t\vec{Z}_1(u,v) + t^2\vec{Z}_2(u,v) + t^3\vec{Z}_3(u,v) + \dots$.

Найдем первую квадратичную форму продеформированной поверхности: $d\vec{r}^2(u,v,t) = (d\vec{r}(u,v) + d\vec{U})^2 = d\vec{r}^2 + 2d\vec{r}d\vec{U} + d\vec{U}^2$.

С другой стороны, деформация у нас изометрическая, поэтому первая квадратичная форма продеформированной поверхности равна первой квадратичной форме исходной поверхности : $d\vec{r}^2(u,v,t) = ds^2 = d\vec{r}^2(u,v)$, то есть, $d\vec{r}^2 + 2d\vec{r}d\vec{U} + d\vec{U}^2 = d\vec{r}^2$.

Отсюда мы получаем **дифференциальное уравнение для вектора деформации**

$$2d\vec{r}d\vec{U} + d\vec{U}^2 = 0$$

Распишем его более подробно, подставив в него разложение $d\vec{U} = td\vec{Z}_1 + t^2d\vec{Z}_2 + t^3d\vec{Z}_3 + \dots$. Получим

$$2d\vec{r}(td\vec{Z}_1 + t^2d\vec{Z}_2 + t^3d\vec{Z}_3 + \dots) + t^2d\vec{Z}_1^{\ 2} + 2t^3d\vec{Z}_1d\vec{Z}_2 + t^4(d\vec{Z}_2^{\ 2} + 2d\vec{Z}_1d\vec{Z}_3) + \dots = 0.$$

Это равенство выполнено для любого t из некоторой окрестности нуля. Но степенной ряд равен нулю тождественно, только если все его коэффициенты нулевые. Мы получаем бесконечную систему (нелинейных) уравнений:

$$\begin{cases} d\vec{r}d\vec{Z}_1 = 0 \quad (1) \\ 2d\vec{r}d\vec{Z}_2 + d\vec{Z}_1^{\ 2} = 0 \\ 2d\vec{r}d\vec{Z}_3 + 2d\vec{Z}_1 d\vec{Z}_2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Рассмотрим производную по параметру t величины $d\vec{U} = td\vec{Z}_1 + t^2 d\vec{Z}_2 + t^3 d\vec{Z}_3 + \dots$ при $t = 0$. Имеем

$$\frac{d}{dt}(d\vec{U})_{t=0} = \frac{d}{dt}(td\vec{Z}_1 + t^2 d\vec{Z}_2 + t^3 d\vec{Z}_3 + \dots)_{t=0} = d\vec{Z}_1.$$

Так как $\vec{U}$ – вектор деформации, а параметр t можно понимать как время, то величине $d\vec{Z}_1$ логично придать смысл **скорости деформации** в начальный момент времени. Иначе на это можно смотреть так: изгибание задаётся по формуле $\vec{r}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + \vec{U}$, а коэффициент при главной линейной части приращения радиус-вектора по t есть $Z_1(u, v)$, т.е. $Z_1(u, v)t$ является дифференциалом деформации изгибания.

Теперь рассмотрим новую, более простую, деформацию $\vec{r}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + t\vec{Z}_1$, где $\vec{Z}_1$ получен из изучаемого ранее изгибания. Как было показано раньше (см. уравнение (1)), поле $\vec{Z}_1$ удовлетворяет условию $d\vec{r}d\vec{Z}_1 = 0$. Тогда первая квадратичная форма продеформированной поверхности есть $ds_t^2 = d\vec{r}^2 + 2td\vec{r}d\vec{Z}_1 + o(t)$ при $t \to 0$, т.е. $ds_t^2 = ds^2 + o(t), t \to 0$, откуда элемент длины деформированной поверхности $ds_t = ds + o(t), t \to 0$. Полученный результат мотивирует следующее определение, являющееся центральным в курсе.

Определение 3. Деформация вида

$$\vec{r}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + t\vec{Z} \qquad (2)$$

называется **бесконечно малым изгибанием** поверхности, если $ds_t = ds + o(t), t \to 0$..

Следовательно, при бесконечно малом изгибании поверхности длины кривых на ней изменяются на бесконечно малое более высокого порядка, чем параметр деформации. Подчеркнем, что в этом определении теперь вектор-функция $\vec{Z}$ не имеет никакого отношения к изгибанию. Рассмотренное выше аналитическое относительно параметра изгибание пока служило лишь для иллюстрации, что деформации вида (2), удовлетворяющие условию $ds_t = ds + o(t), t \to 0$, действительно *могут* существовать, например, они существуют. если из аналитического изгибания выделить деформацию только с первой степенью t, т.е., множество деформаций б.м. изгибания заведомо не пусто.

Предложение 1. *Для деформации вида $\vec{r}(u, v, t) = \vec{r}(u, v) + t\vec{Z}$ условие $ds_t = ds + o(t), t \to 0$, равносильно условию $d\vec{r}d\vec{Z} = 0$.*

Уравнение

$$d\vec{r}d\vec{Z} = 0 \qquad (3)$$

является основным в теории бесконечно малых изгибаний.

Доказательство. Обратная импликация была доказана нами выше (мы использовали лишь то, что $d\vec{r}d\vec{Z}_1 = 0$). Докажем прямую импликацию. Рассмотрим выражение $ds_t^2 - ds^2 = (ds_t - ds)(ds_t + ds)$. Так как первый сомножитель в правой части – величина порядка $o(t)$, а второй ограничен (по t), то вся правая часть , а месте с ней и левая часть – величины порядка $o(t)$. Но с другой стороны, $ds_t^2 = d\vec{r}^2 + 2td\vec{r}d\vec{Z} + t^2 d\vec{r}^2 = ds^2 + 2td\vec{r}d\vec{Z} + o(t)$, откуда $ds_t^2 - ds^2 = 2td\vec{r}d\vec{Z} + o(t) = o(t), t \to 0$, что возможно только лишь при $d\vec{r}d\vec{Z} = 0$. □

Таким образом, ранее мы показали, что любое (аналитическое) изгибание порождает некоторое поле бесконечно малого изгибания. Обратное же в общем случае не верно. т.е. не всякое поле $\vec{Z}$, удовлетворяющее условию (3), порождается некоторым изгибанием. Примером является компактная выпуклая поверхность гладкости C^2, содержащая плоскую область: она допускает б.м. изгибания (это мы докажем позже), а по упомянутой выше теореме Погорелова она вне допускает изгибаний, поэтому ее б.м. изгибание никак не может быть порождено изгибанием..

Рассмотрим более подробно, в чем геометрическое содержание деформации б.м. изгибания. Для этого важно заметить, что малость разности дифференциалов длин дуг по отношению к малости t влечет и малость разности самих длин дуг, так как длины дуг любой спрямляемой кривой получаются интегрированием их дифференциалов. Обозначим координаты вектор-функции $\vec{Z}$ как $\{\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v;)\}$. Пусть на S даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ с радиус-вектором $\vec{r}(u_1, v_1)$ и $M_2(x_2 = x_1 + \delta x, y_2 = y_1 + \delta y, z_2 = z_1 + \delta z)$ с радиус-вектором $\vec{r}(u_2, v_2)$. При б.м. изгибании они переходят в точки $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ соответственно с радиус-векторами $\vec{r}(u_1, v_1) + t\vec{Z}(u_1, v_1)$ и $\vec{r}(u_2, v_2) + t\vec{Z}(u_2, v_2)$

Разности длин кривых, соединяющих эти точки, согласно вышесказанному отличаются на порядок $o(t), t \to 0$, а разность длин хорд между ними вычисляется по формуле

$$|\tilde{M}_1, \tilde{M}_2| - |M_1, M_2| =$$
$$\sqrt{|M_1, M_2|^2 + 2t(\vec{r}(u_2, v_2) - \vec{r}(u_1, v_1) \cdot (\vec{Z}(u_2, v_2) - \vec{Z}(u_1, v_1) + O(t^2)} - |M_1, M_2| = O(t), t \to 0,$$

так как в общем случае произведение $(\vec{r}(u_2, v_2) - \vec{r}(u_1, v_1) \cdot (\vec{Z}(u_2, v_2) - \vec{Z}(u_1, v_1) \neq 0$ (не забудем, что аппроксимировать разность . $(\vec{r}(u_2, v_2) - \vec{r}(u_1, v_1)$ дифференциалом нельзя, потому что точки M_1 и M_2 не являются бесконечно близкими). Следовательно, при б.м. изгибании длины дуг, а значит, и *расстояния по поверхности* между ее точками, изменяются на порядок $o(t)$, а длины хорд, значит, и *пространственные расстояния* между точками поверхности изменяются на порядок $O(t), t \to 0$ (заметим, что это не так *только* в случае, когда поверхность является областью на плоскости, тогда расстояния между точками на поверхности равны расстояниям между точками в пространстве). Таким образом, при б.м. изгибании длины кривых изменяются мало по сравнению с изменением параметра t (например, времени), а видимые изменения формы поверхности имеют такой же порядок величины, что и параметр t. Поэтому можно сказать, что б.м. изгибания при малых значениях параметра t - это почти что изгибания, что и отражено в их названии.

Конец лекции.