

Коллоквиум № 2.

Тема: Теория пределов.

1. Предел последовательности и его свойства. Бесконечно большие последовательности. Бесконечно малые последовательности, свойства бесконечно малых.
2. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух последовательностей.
3. Теорема Вейерштрасса. Число e .
4. Предел функции и его свойства. Бесконечно большие при $x \rightarrow a$ (где a - число или символ бесконечности) функции, их свойства. Бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции, их свойства.
5. Теорема о переходе к пределу в неравенствах $x_n < y_n$ ($n > n_0$), если пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ существуют. Теорема о переходе к пределу в неравенствах $f(x) < g(x)$ при $x \rightarrow a$, если пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ существуют.
6. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций.
7. Оценочный признак существования предела (теорема о "зажатой" функции). Первый замечательный предел $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)$.
8. Второй замечательный предел $\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)$ и два его следствия, (равенство $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ привести без вывода, оба следствия вывести).
9. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Понятие о точках разрыва, классификация точек разрыва. Перечислить свойства функций, непрерывных на отрезке.

Примеры дополнительных вопросов (задач):

1. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$. Доказать непрерывность функции $f(x)$ при любом x . Построить график.
2. Убедиться в том, что функции $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ и $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow \infty$.
3. Функция $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Доопределить функцию задав $f(0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывной при $x = 0$.
4. Доказать, что имеет место равенство: $2^x = 1 + x \ln 2 + x \cdot \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

5. Дана функция $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{2-x}\right)$. Найти точки разрыва, определить тип разрыва.

Построить график. Имеет ли эта функция точку устранимого разрыва? Если не имеет, то привести пример функции, для которой такая точка существует.

6. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3$. Доказать, что $x_n > -5$, начиная с некоторого n .

7. Определить род точки разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Привести пример ограниченной функции, имеющей точку разрыва второго рода.

8. Функции $\alpha(x) = 2x + x \cdot \sin(x)$ и $\beta(x) = x + \arcsin(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Имеют ли они один и тот же порядок малости при $x \rightarrow 0$? Эквивалентны ли они?

9. Функция $f(x) = 3 \sin^2(x^2) + 5x^5$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$. Каков её порядок малости относительно x ?