Семинар 11.12.2021

Исследование функции и построение эскиза её графика.

План

1) Область определения $f(x)$ D_f (те значения x, при которых $f(x)$ можно найти)

2) Чётность / нечётность

$f(x) = f(-x)$ — чётная функция, $x, -x \in D_f$

$-f(x) = f(-x)$ — нечётная функция

периодичность

Факты

1) график чётной функции симметричен относительно Oy
2) график нечётной функции симметричен относительно начала координат — точки $(0;0)$
3) периодическую функцию можно рассматривать "на одном из её периодов"

все это упрощает построение эскиза графика

$y = \frac{1}{x}$

$x = 0$ — вертик. асимпт.

3. Асимптоты

Определение Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

<u>Определение</u> Прямая $y = y_0$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$ — <u>пример</u> $y = \frac{1}{x}$

$y_0 = 0$ (ось Ox) — горизонтальная асимптота.

<u>Определение</u> Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx - b) = 0$

<u>Пример</u> $y = x + \frac{1}{x^2}$

$y = x$ — наклонная асимптота.

<u>Замечание</u>

1) Нахождение асимптот — это исследование функции "на границах её области определения D_f"

2) <u>Пример</u> $f(x) = \ln(4 - x^2) \Rightarrow D_f = (-2; 2)$ и <u>нет</u> смысла искать $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ — нет тут $x \to \infty$!

14. Первая производная $f'(x)$

Пример

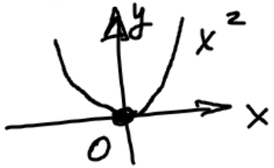
$f(x)=x^2 \quad f'(x)=2x=0$ в точке $x_0=0$

Производная меняет знак

— слева от $x_0=0$ $f'(x)<0$

— справа от $x_0=0$ $f'(x)>0$

$\Longrightarrow$ это точка минимума



Замечание

Необходимое условие

Пример $y=x^3$ не является достаточным

а) промежутки монотонности:

Было на лекции "достаточное условие монотонности"

I) Если на $(a;b)$ $f'(x)>0$ $(\forall x\in(a;b))$ то $f(x)\uparrow\uparrow$ на $(a;b)$

II) Если $f'(x)<0$ на $(a;b)$, то $f(x)\downarrow\downarrow$ на $(a;b)$

$(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1))$

б) точки экстремума

I) Необходимое условие

(Если в т x_0 $f(x)$ имеет лок. max/min и $f\in\mathcal{D}(x_0)$, то $f'(x_0)=0$

Теорема Ферма)

II) **Первое достаточное условие**

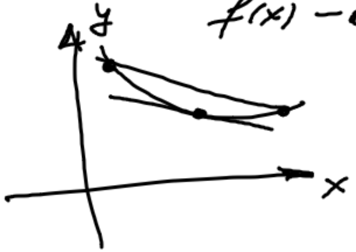
$f\in\mathcal{D}(a;x_0)\wedge\mathcal{D}(x_0;b)$ $\quad f\in C(a;b)$

и при переходе через т x_0 $f'(x)$ меняет знак $\Rightarrow$ x_0 — т. экстр.

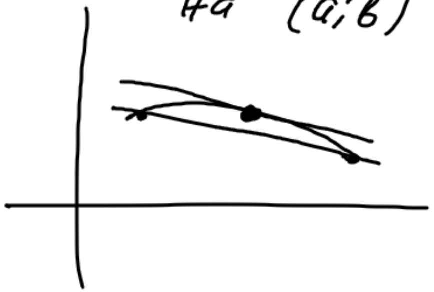
5. По второй производной: $f''(x)$

а) промежутки выпуклости:

Если на $(a;b)$ $f''(x)>0$, то $f(x)$ – выпуклая вниз на $(a;b)$



Если на $(a;b)$ $f''(x)<0$, то $f(x)$ выпуклая вверх на $(a;b)$



б) точки перегиба

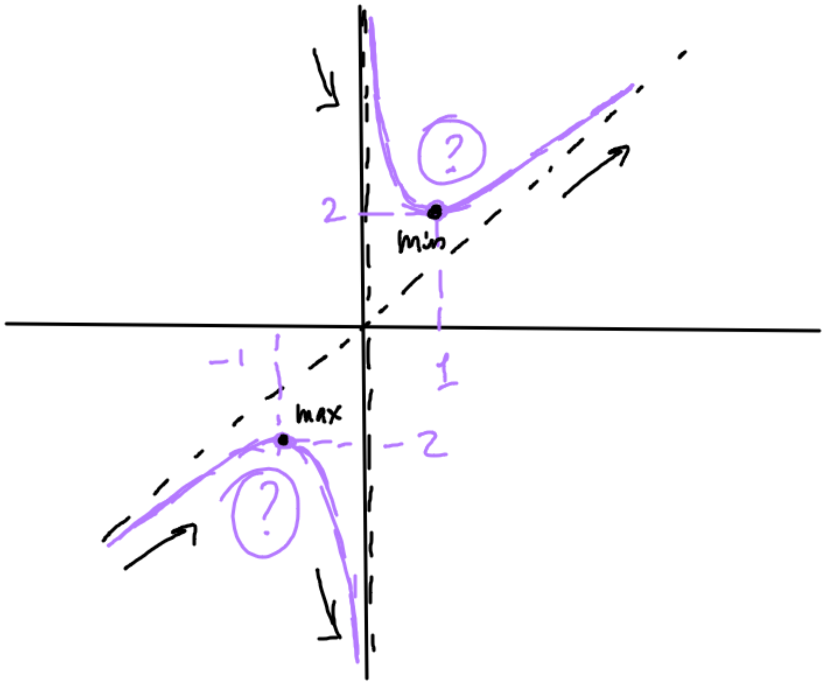
Определение точка x_0 – точка перегиба (графика) функции $f(x)$, если "при переходе через т x_0" меняется направление выпуклости.

I Необходимое условие точки перегиба: вторая производная $f''(x)$ в т перегиба x_0 равна нулю или не существует (Замечание Снова необходимое условие не явл-ся достаточным  ; Пример $y=x^4$)

II Достаточное условие точки перегиба – Если вторая производная меняет знак при переходе через т x_0, то x_0 – точка перегиба $(f \in C(x_0))$

Рассмотрим пример:

Функция $y = x + \frac{1}{x}$



1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\rightarrow$ "подозрительная" точка $x_0 = 0$ скорее всего, там будет вертикальная асимптота. (нужно будет проверить)

($\sin(\frac{1}{x})$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, но асимптоты в т. x_0 нет)

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -f(x)$ нечётная функция

график симметричен относительно начала координат

3) а) Асимптоты: $x_0 = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty \Rightarrow$ (вертикальная асимптота $x_0 = 0$)

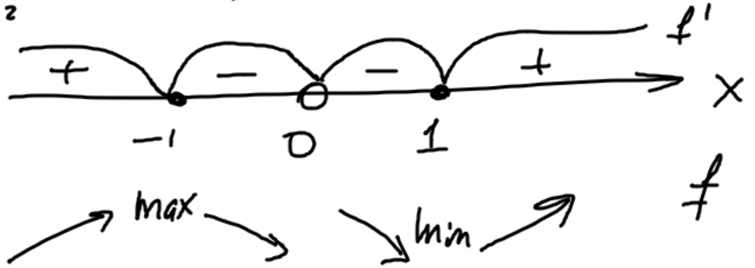
б) горизонтальной асимптоты нет $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

в) наклонная $y = x$ (проверить) (доказать)

④ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = -1$; не сущ. в т $x_0 = 0$

$f(x) \uparrow\uparrow$ $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$f(x) \downarrow\downarrow$ $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$



⑤ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ > 0 при $x \in (0; +\infty)$

< 0 при $x \in (-\infty; 0)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ – выпуклая вверх при $x \in (-\infty; 0)$

$f(x)$ – выпуклая вниз $x \in (0; +\infty)$

Точек перегиба нет

Важное замечание: $f''(x)$ меняет знак при переходе через т $x_0 = 0$, но это не точка перегиба, поскольку в т $x_0 = 0$ функция не определена!

Пример 2

$f(x) = x - \frac{1}{x}$ (был $\oplus$)

1) $D_f = R\setminus\{0\}$ (в т. $x_0 = 0$ — вертик. асимптота)

2) $f(x)$ — нечетная функция

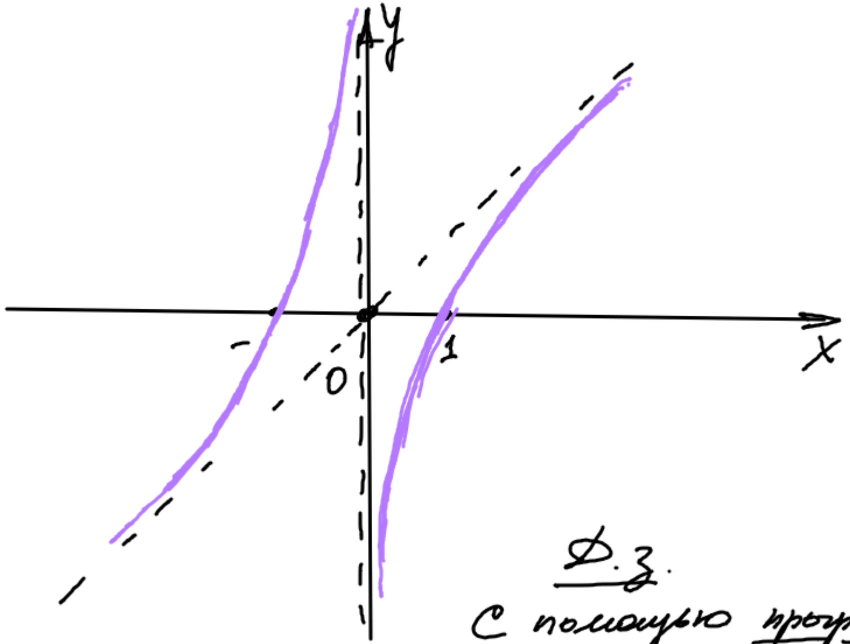
3) $x_0 = 0$ — вертик. асимпт.
горизонт. асимптоты нет
наклонная асимптота $y = x$

4) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in R\setminus\{0\}$

$\Rightarrow f(x) \uparrow\uparrow$ на $D_f \Rightarrow$
экстремумов нет

5) $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$ > 0 при $x \in (-\infty; 0)$
< 0 при $x \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow$ выпуклая вверх $x \in (0; +\infty)$
выпуклая вниз при $x \in (-\infty; 0)$
точек перегиба нет.



Д.З.

С помощью программ построить графики.

$y = x + \frac{1}{x}$; $y = x - \frac{1}{x}$

Пример № 3

$$y=(x+1)e^{x}$$

4) $f'(x)=(x+1)'e^{x}+(x+1)(e^{x})'=$

$= 1\cdot e^{x}+(x+1)e^{x}=(x+2)e^{x}$

$\Rightarrow f'(x)=0$ при $x=-2$

$-\quad\quad +$

-2

$\to$ min

5) $f''(x)=((x+2)e^{x})'=$

$\longrightarrow\ =(x+3)e^{x}=0$ при $x=-3$

Д.з. проверить.

$f''(x)$: $-\quad\quad +$

-3

вып. вверх вып. вниз.

1) $D_f=\mathbb{R} \Rightarrow$ Сразу замечание: вертикальных асимптот не будет (поскольку в каждой точке x_0 f — непрерывна, т.е. имеет конечный предел).

2) $f(x)$ — общего вида (не четная, не нечетная) не периодическая

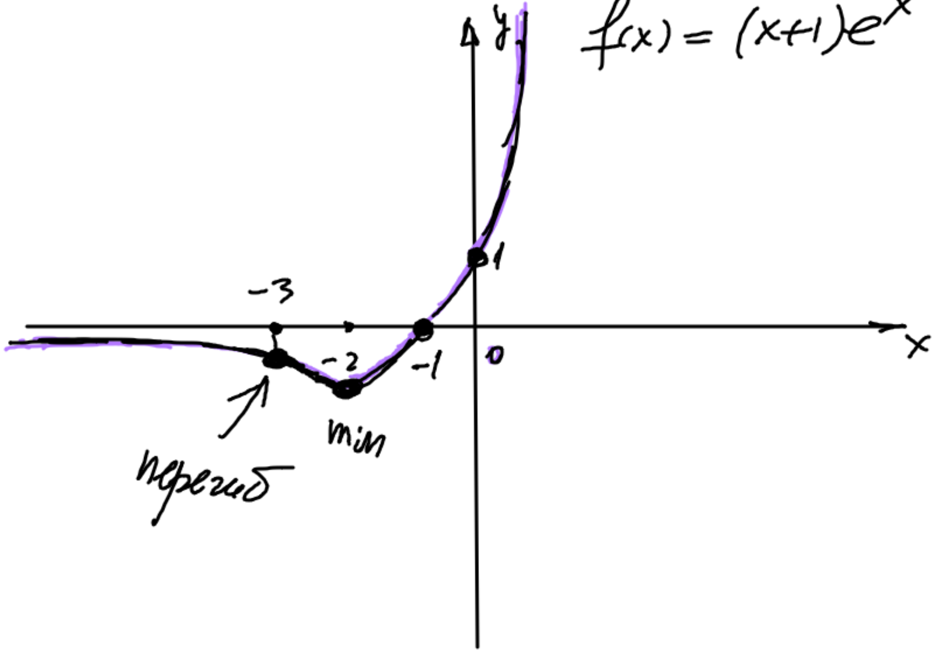
3) горизонтальная асимптота есть $y_0=0$ при $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=0$$

Д.з. доказать по правилу Лопиталя.

Нет наклонной асимпт. (проверить)

$f(x) = (x+1)e^x$



Пример $y = x^2 + \frac{1}{x}$

1) $D_f = R \setminus \{0\}$

(в т. $x_0 = 0$ у этой функции – вертик. асимптота)

2) Функция общего вида <u>не</u> периодическая.

Асимптоты 3) горизонт, накл. – нет

вертик. $x_0 = 0$

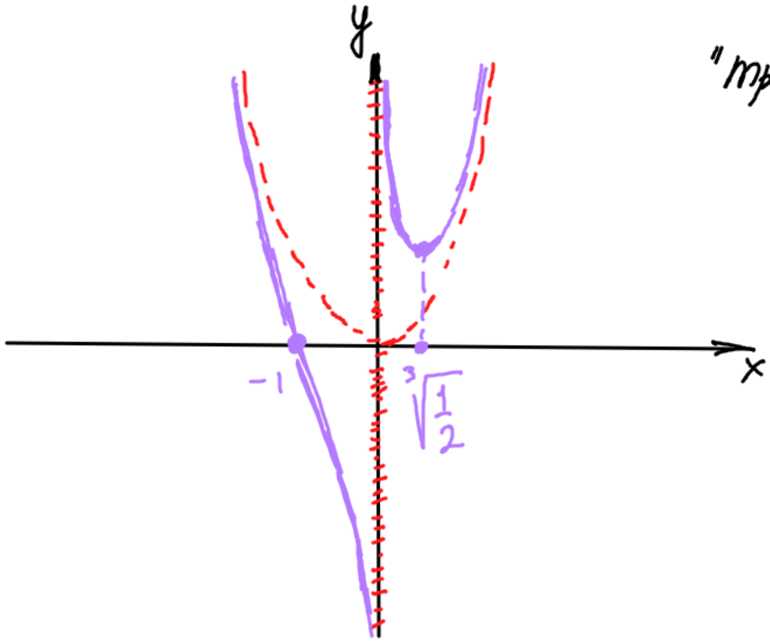
4) $y'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 0$

$$\frac{2x^3 - 1}{x^2} = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

точка минимума

5 – самим



"Трезубец Ньютона."

$y = x^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow$

$y(x) - x^2 = \frac{1}{x} \to 0$
$x \to \pm\infty$

график нашей функции будет "сближаться" с графиком функции $y = x^2$

На дом:

1) $y = x + \frac{1}{x^2}$

2) $y = x + \frac{1}{x-3}$

3) $y = (x^2 + 2x - 1)e^x$

4) $y = xe^{-x^2}$

5) $y = e^x \cdot \sin x$

провести иссл-е
Построить эскиз графиков

В след. раз — контрольная работа с теоретич. вопросами.

Задачи:

1). Вычислить определитель / решить сист. по ф-лам Крамера
2). Решить систему уравнений методом Гаусса
3). Провести плоскость через три заданные точки
4). Найти предел (элемент. методы)
5). Найти предел с помощью правила Лопиталя
6). Исследовать функцию и построить эскиз её графика

Теория по 1 вопросу из программ 1-го и 2-го коллоквиумов.