Семинар 13 (04.12.2021)

~~Две~~ темы: <u>правило</u> <u>Лопиталя</u> и <u>построение</u> <u>эскиза</u> графика функции

1) Пусть $\frac{f(x)}{g(x)}$ – неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x \to x_0$
функции $f(x)$ и $g(x)$ – удовл. условиям
теоремы Коши (см. лекции) и

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

(Похожие правила действуют в случаях $\frac{\infty}{\infty}$; $x \to x_0$;
$\frac{0}{0}$; $x \to \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $x \to \infty$)

<u>Напоминание</u> $\boxed{\lim\limits_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a} \Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{\ln a \cdot y} = 1$

<u>Пример</u>: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(a^{\sin x} \cdot \left(\frac{a^{x - \sin x} - 1}{x^3} \right) \right) =$

1

$= \boxed{\lim\limits_{x \to 0} a^{\sin x}} \cdot \boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^{x - \sin x} - 1}{x - \sin x}} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) = \ln a \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(<u>Замечание</u> 1) Не существует (простого) способа решить эту задачу без использования правила Лопиталя.)

2) Ранее было установлено, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

<u>повторим</u> <u>это</u>:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

<u>Замечание</u> Можно применить к $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Окончательный ответ в исходной задаче

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}=\ln a\cdot\frac{1}{6}$$

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$ или $\ln(1+y)\sim y$ при $y\to 0$

и на эквивалентные б.м.ф. можно заменять сомножители, числители и знаменатели.

<u>Пример</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\operatorname{tg}x-x}{x}\right)}{x^2}\boxed{=}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1\Rightarrow$

<u>Замечание</u> Сразу брать производные <u>не</u> оптимально; <u>сложные</u> <u>вычисления</u>.

$\Rightarrow\ \frac{\operatorname{tg}x}{x}=1+\frac{\operatorname{tg}x-x}{x}=\Rightarrow$ б.м.ф. $\boxed{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}x-x}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=$

$=1+y$, $y\to 0$

Заменили $\ln\left(1+\frac{\operatorname{tg}x-x}{x}\right)$ на $\frac{\operatorname{tg}x-x}{x}$

<u>Замечание</u> Это еще одна задача, которую <u>нельзя</u> решить без применения правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{x^3} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$$

Ответ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}{x^2} = \frac{1}{3}$$

Замечание. Вообще говоря нельзя заменять на эквивалентные бесконечно малые слагаемые.

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$ — только что получили

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Хотя

$x \sim \sin x \quad (x\to 0)$

т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

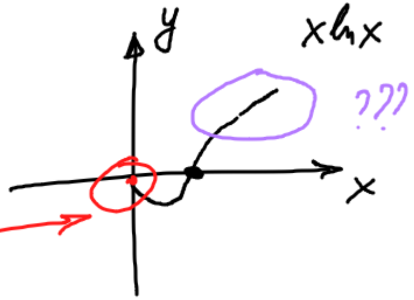
Еще пример на правило Лопиталя!

$$\lim_{\substack{x\to 0+0\\(x>0)}} x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0+0\\(>0)}} \frac{\ln x}{1/x} \overset{Л}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$$

Исходно это неопределенность вида $0\cdot\infty$

<u>Нужно</u> $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$

<u>Итого</u> $\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x = 0$



<u>Следствие</u>

Для любого положительного ε

$$\lim_{x\to 0+} x^{\varepsilon}\cdot\ln x = 0 \quad =$$

Доказательство
пусть. $\varepsilon>0$ $\quad y = x^{\varepsilon} \Rightarrow \ln y = \varepsilon\ln x \Rightarrow$

$$\ln x = \frac{1}{\varepsilon}\ln y$$

$$= \ \frac{1}{\varepsilon}\lim_{y\to 0} y\cdot\ln y = 0.$$

Еще один важной пример $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$ т.к. $(k\in\mathbb{N})$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x}\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{e^x}=0}_{}$$

k раз подряд применяем правило Лопиталя.

Замечание

Верно утверждение $\forall\varepsilon>0$ $\frac{x^\varepsilon}{e^x}\to 0$ при $x\to+\infty$

(не обязательно натуральн. число)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x}\Rightarrow 0$$

② Исследование функции и построение эскиза её графика.

Схема:

1) область определения D_f

2) четность / нечетность
периодичность

(четная функция $\Rightarrow$ график симметричен относительно Oy;
нечетная функция $\Rightarrow$ график симметричен относительно начала координат)

Пример
$y = \{x\}$ - дробная часть x
— периодичная функция, не тригонометрическая

3) Асимптоты (поведение функции на границах области определения)
вертикальные
горизонтальные
наклонные ~ как у гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

асимптоты $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

Определения

① прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

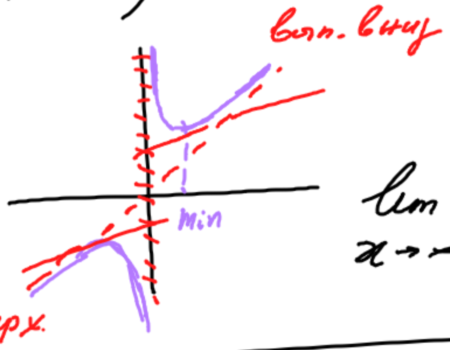
Пример $y = \frac{1}{x}$
ось y $(x=0)$ - вертик. асимпт.

② Прямая $y=y_0$ называется горизонтальной асимптотой графика ф-ции $y=f(x)$,
если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$

<u>Пример</u> $y=\frac{1}{x}$ ось X $y=0$ является горизонтальной асимптотой

③ Прямая $y=kx+b$ называется <u>наклонной</u> <u>асимптотой</u> графика ф-ции $y=f(x)$,
если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx-b)=0$
$(x\to\infty)$

<u>Пример</u> $y = x+\frac{1}{x}$ $\sim$ $yx=x^2+1$ гипербола.



Прямая $y=x$ — наклонная асимптота

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

4 п. По первой производной

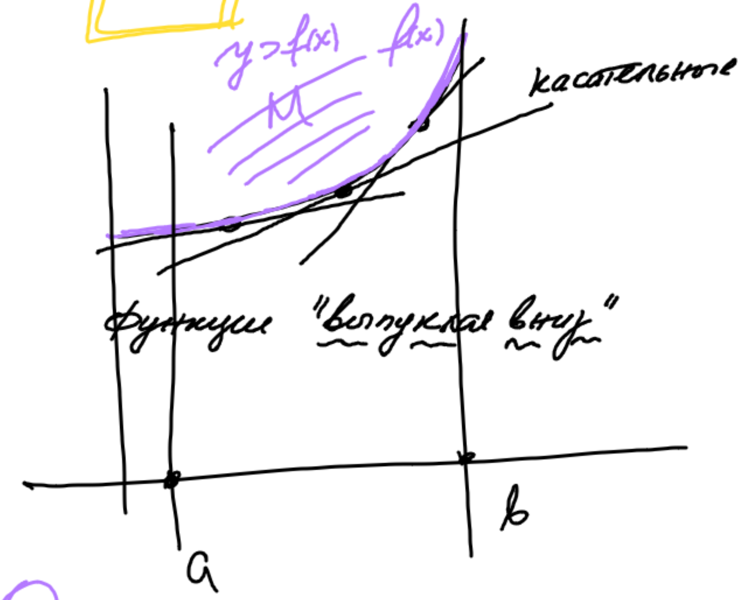
$f'(x)$ → <u>промежутки</u> <u>монотонности</u> (было на лекции $(a;b)$ $f'(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$ сл. из Т. Лагранжа $\Longrightarrow f\nearrow$ на $(a;b)$

→ <u>экстремум</u> (теорема Ферма и 1 достаточное условие) $f'(x)<0 \Longrightarrow f\searrow$ на $(a;b)$)

5п. По второй производной

а) промежутки выпуклости !!

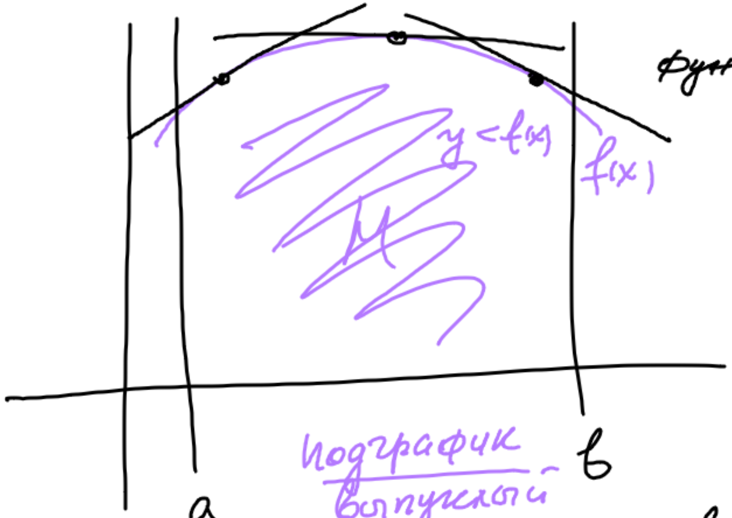
б) точки перегиба.



функция "выпуклая вниз"

Опр надграфик выпуклый $\Rightarrow$ $f(x)$ – выпуклая вниз

"функция над касательной"
(если она у неё есть)



функция "выпуклая вверх"

подграфик выпуклый

$\Downarrow$

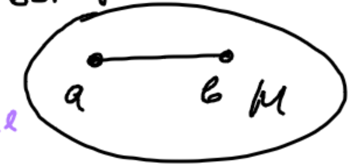
Опр $f(x)$ – выпуклая вверх

"функция под касательной"

Определение

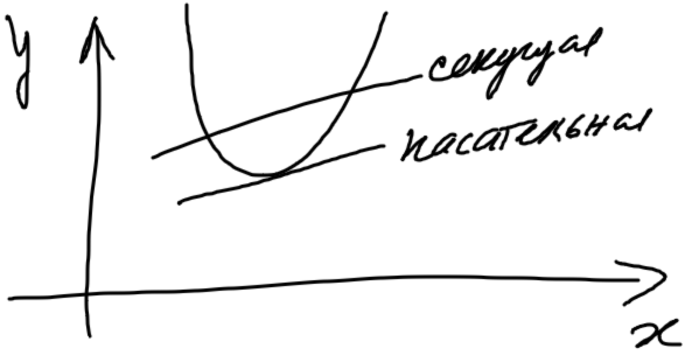
Мн-во M называется выпуклым, если $\forall\, a, b \in M$ $[a; b] \subset M$

выпуклое



не выпуклое

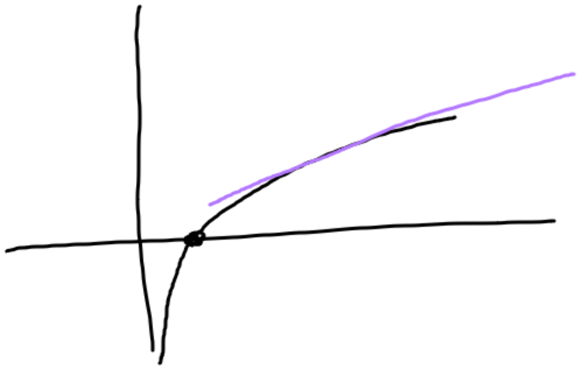
Теорема 1) Если $f''(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $f(x)$ — выпукла вниз на $(a;b)$
(её график на $(a;b)$ всегда лежит выше касательной, но ниже секущей



Пример $y = ax^2 + bx + c$; $a > 0 \Rightarrow y'' = 2a > 0$

2) Если $f''(x) < 0$ на $(a;b)$ то ф-ция $f(x)$ —
— выпукла вверх на $(a;b)$
(график — выше секущей, но ниже касательной)

Следует из формулы Тейлора, если чуть-чуть поменять определение выпуклости.

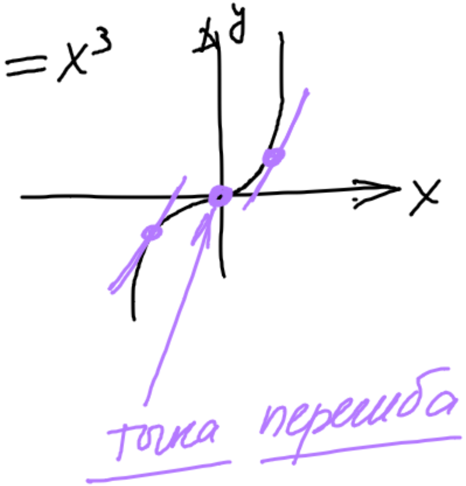


$y = \ln x$

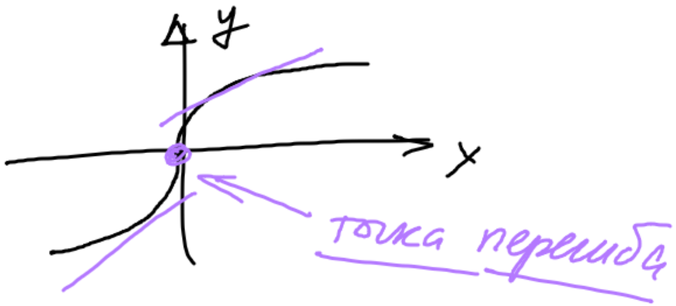
Определение Точка перегиба — это такая точка, в которой меняется направление выпуклости функции.

Замечание. Из теоремы следует, что в точке перегиба x_0 $f''(x_0)=0$ или <u>не</u> существует.

$y = x^3$



$y = \sqrt[3]{x}$



Точки перегиба ищут так

1. Ищут $f''(x)$ и те точки, в которых $f''(x)=0$ или <u>не</u> существует (необх. условие)
2. Проверяют достаточное условие

Если при переходе через x_0 $f''(x)$ меняет знак, то x_0 — точка <u>перегиба</u>

Наш пример

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

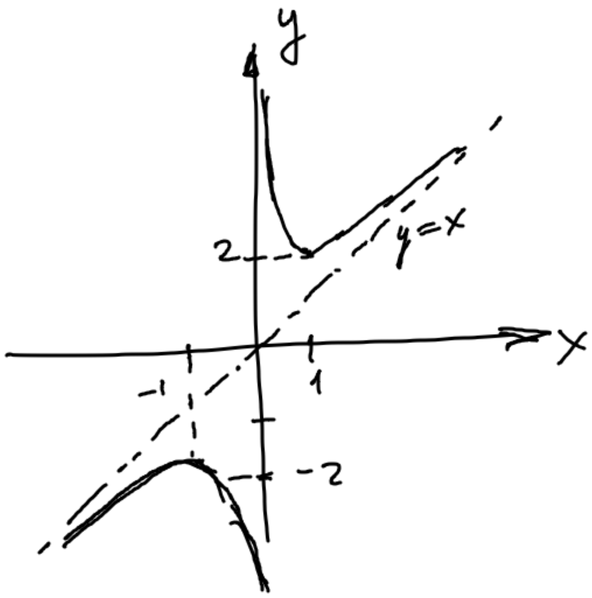
точки экстремума $x_{1,2} = \pm 1$

$$y''(x) = \frac{2}{x^3} \begin{matrix} >0 \text{ при } x>0 \\ <0 \text{ при } x<0 \end{matrix}$$

— вып. вниз при $x>0$

— вып. вверх при $x<0$

Пример $y = x + \frac{1}{x}$



1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\Rightarrow$ в т. $x=0$ подозреваем вертикальную асимпт.)

2) $y(x)$ – нечетная, не периодическая.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty \Rightarrow$ действительно $x=0$ – вертик. асимптота

$\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty \Rightarrow$ горизонтальной асимптоты нет.

$y = x$ – наклонная асимптота.
(было доказано)

4) $y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

< 0 при $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

$y'(x) = 0$ при $x_1 = -1 \leftarrow \max$

$x_2 = +1 \leftarrow \min$.

5) $y''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ при $x > 0$

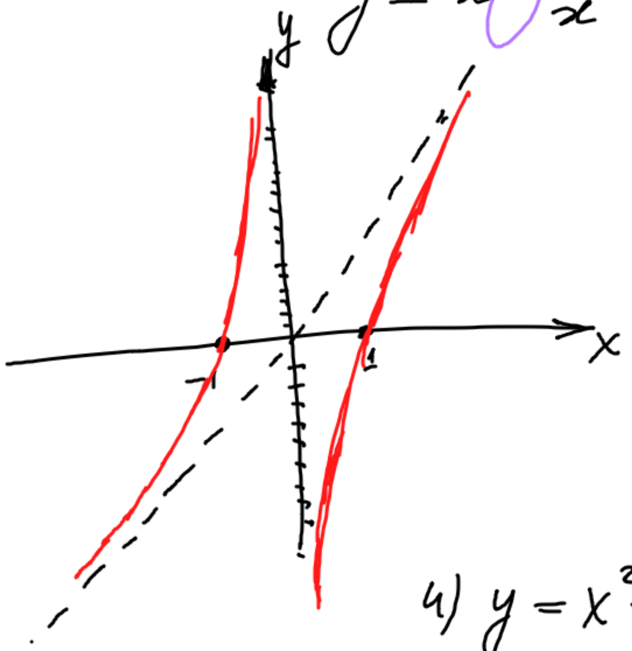
< 0 при $x < 0$

точек перегиба НЕТ

Д.з. Построить с помощью ПК или моб. приложения.

Пример!

$$y = x - \frac{1}{x}$$



1). $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2). $y(x)$ — нечётная, не периодическая

3). асимптоты — те же, что и в предыдущем примере.

4). $y'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ всегда $\Rightarrow$ нет экстремумов.

5) $y''(x) = -\frac{2}{x^3}$ < 0 при $x > 0$

> 0 при $x < 0$

4) $y = x^2 + \frac{1}{x}$ "трезубец Ньютона"

5) $y = xe^x$

И на правило Лопиталя! (см. прил. файл)

1319 – 1328 10 задач.

Домашнее задание

1) $y = \frac{1}{x^2+1}$ с исследованием эскиз

2) $y = \frac{2x}{x^2+1}$ —//—

3) $y = \frac{x^3 - x}{x^2+1}$ (возможно, без $y''(x)$)