<u>Лекция</u> <u>16</u>

Первообразная и неопределенный интеграл.

<u>Определение</u> Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ $(x \in M)$ если

$$(F(x))' = f(x) \quad \forall x \in M$$

$(M = (a;b)$ <u>или</u> $M = (a;+\infty)$ <u>или</u> $M = \mathbb{R}$ и т.д.)

<u>Пример</u> $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$ (как возможный вариант)

$F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ – тоже первообразная для x^2.

<u>Определение</u> <u>Неопределенным</u> <u>интегралом</u> функции $f(x)$ $(x \in M)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$.

$\int$ – увеличенная буква S

"summae"

<u>Обозначение</u> $\int f(x)dx$ $\quad f(x)dx = dF$ т.к. $F'(x) = f(x)$

F – первообразная.

Замечание
Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ $(x \in M)$ то
$F(x)+C$ — тоже первообразная. (C — произвольная константа).
Вопрос Можно ли что-то другое, кроме константы, добавить к первообразной, чтобы снова получилась первообразная?
Ответ Нет, нельзя.

Теорема Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для $f(x)$ $x \in (a;b)$
Тогда $F_1(x) - F_2(x) = const.$

Доказательство Пусть $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$; $x_1, x_2 \in (a;b)$; $(x_1 < x_2)$
Тогда на отрезке $[x_1 x_2]$ применим теорему Лагранжа:
$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi'(c)(x_2 - x_1) \quad c \in (x_1, x_2) \subset (a;b)$$
$$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a;b)\,!$$
$\Rightarrow \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0$. Фиксируем x_1 и пусть x_2 — произвольная точка $(a;b) \Rightarrow \forall x_2 \in (a;b)$ $\Phi(x_2) = \Phi(x_1) \Rightarrow \Phi(x) = const$ $\forall x \in (a;b)$ Δ.

Замечание Нахождение (всех) первообразных функции $f(x)$

① называется неопределенным интегрированием (функции $f(x)$)

② Интегрирование (неопр-е) и дифференцирование — взаимно-обратные операции.

т.е.

$$\int dF = F(x) + C$$

$$\underbrace{d\left(\int f(x)dx\right) = dF = f(x)dx}_{\text{вот поэтому дифференциал } dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

(3) Таблица производных "превращается" в таблицу первообразных:

задача

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

	$f(x)$	$F(x)$
а)	x^{α}	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$; $\alpha \neq -1$
б)	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
в)	e^x	e^x
г)	$\sin x$	$-\cos x$
	$\cos x$	$\sin x$
д)	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$
е)	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{т.к.} \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \text{т.к.} (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

поскольку $(e^x)' = e^x$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

т.к. $(\cos x)' = -\sin x$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C \quad \text{т.к.} (\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C \quad \text{т.к.} (\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Продолжение таблицы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$ ("длинный логарифм")

т.к. (см. лекции и семинары) $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{т.к.} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$ проверить дифференцированием. (задача).

Наша цель: Освоить основные приемы неопределенного интегрирования. Их три: 1) разложением на простейшие (табличные) с помощью арифм. действий (Следуют из свойств дифференциалов!)

2) заменой переменной (занесением под знак дифференциала)

3) "по частям"

Напомним свойства дифференциалов: Пусть f, g — дифференцируемы на ~~X~~ $(a;b)$

Тогда

① $d(\alpha f+\beta g) = \alpha df + \beta dg$ (следует из соотв-го свойства производной)

$$\Rightarrow \int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \underbrace{\alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx}_{\text{если они существуют.}}$$

$\Rightarrow$ это и есть первый приём интегрирование "...разложением..." (на табличное).

Пример

1) $$\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx = \int\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}dx = \int 1dx + 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\frac{dx}{x} =$$

$$= x + 2\cdot 2\sqrt{x} + \ln|x| + C$$

(см. задачу)

$$\int tg^2x\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx}_{!} - \int 1\,dx = tg\,x - x + C$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

2-е Сейчас его напишем и немного его "подержим"!

(свойство дифф-лов) $(f\cdot g)' = f'g + fg'$ правило Лейбница $\Rightarrow$

$$\Rightarrow d(f\cdot g) = g\,df + f\,dg \Rightarrow \int d(f\cdot g) = \int g\,df + \int f\,dg$$

(по 1-му свойству)

$$f\cdot g$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int f\,dg = f\cdot g - \int g\,df}$$

"правило интегрирования по частям"

!!! Поскольку мы сделали замечание, что $\int$ и d – (взаимно) обратные операции.

Замена переменной $\Leftrightarrow$ Производная сложной функции

$f(x) \quad x = x(t)$

$$f'_t = f'_x \cdot x'_t \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

или

$$df = f'_x dx = \underbrace{f'_x \cdot x'_t}_{} dt = f'_t dt$$

f'_t — по теореме о производной сложной функции.

("начерно"; на уровне идей)

$$\int \underbrace{(x^2+3)^{100} \cdot 2x}_{} dx =$$

Никак не сделать разложением (за разумное время).

$y = x^2+3$

$dy = (x^2+3)' dx =$

$= 2x\,dx$

$$= \int y^{100} dy = \frac{y^{101}}{101} + C = \frac{(x^2+3)^{101}}{101} + C$$

Теорема

$$\Rightarrow F(x)+C = \int dF = \int F'_x dx = \int F'_x \cdot x'_t dt = \int F'_t dt$$

замена переменной в неопределенном интеграле

(если все производные непрерывны; $x \in (a;b)$ $t \in (\alpha;\beta)$; $x'_t \neq 0$; $x(\alpha) = a$; $x(\beta) = \beta$;)

$$\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right| = \int e^y dy = e^y + C = e^{\sqrt{x}} + C$$

Ещё раз:

$y = \varphi(x)$

$dy = \varphi'(x)dx$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{l} y = x^2+1 \\ dy = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}dy \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|y| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = (\cos x)'dx = \\ = -\sin x\,dx \\ \sin x\,dx = -dy \end{array} \right| = -\int\frac{dy}{y} = -\ln|y| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

Задача

Проверить $(-\ln(\cos x))' = \operatorname{tg}x$

$$\int \cos x \, e^{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \underline{\text{Замена}} \\ t = \sin x \\ dt = (\sin x)'_x \, dx = \\ = \underline{\underline{\cos x \, dx}} \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

$$\cos x \, dx = dt$$

Домашнее задание

а) Прочесть соотв. раздел в учебнике н.ш.к.

б) Решить некоторое кол-во задач.

(*)

Демонстрация "по частям"

$$d(\ln x) = (\ln x)' \cdot dx = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f} \underbrace{dx}_{dg} = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot d(\ln x) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = $$
$$= x \ln x - x + C$$

$$\int f dg = f \cdot g - \int g df$$

Д.з. а) Осознать эту формулу

б) Проверить дифференцированием.

Замечание

1. Нельзя выразить с помощью элементарных функций такой интеграл $\int e^{-x^2}dx$ (первообразная есть).
Т.е. далеко не всегда можно выразить первообразную от элементарной функции через элементарные ф-ции

2. Будет "доказано", что у функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, существует первообразная $F(x)$ (на $(a;b)$)