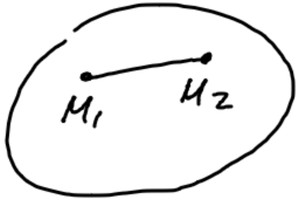
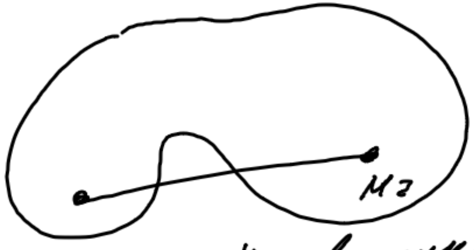
Лекция № 15
15.12.2021.

Окончание рассказа про выпуклость

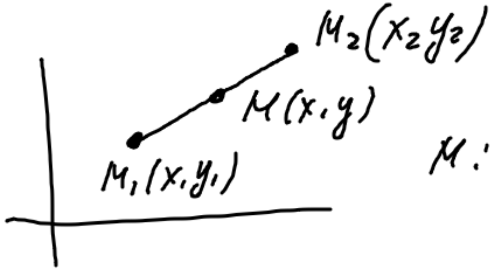
Определение Множество M называется выпуклым, если $\forall\, M_1, M_2 \in M \Rightarrow [M_1 M_2] \subset M$



выпуклое M



M_1 Не выпуклое



Факт (опытный)

M: $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ $\lambda \in [0;1]$

$y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$

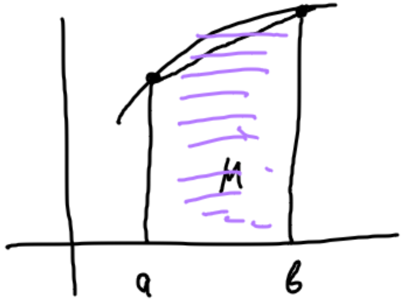
Например M^* – середина отрезка $M_1 M_2$ получается $\lambda = 1/2$

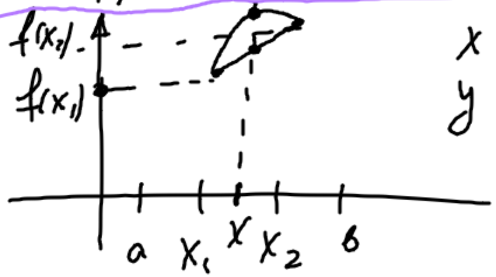
$$x^* = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y^* = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Определение

Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на промежутке $(a;b)$ если

$$\forall \; x_1, x_2 \in (a;b) \quad [x_1 \; x_2]$$





$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

$$y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$f(x) \geq y$$

Вот определение выпуклой вверх ф-ции

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$(>)$$

$$M = \{(x,y): y \leq f(x), x \in (a;b)\} = \text{"подграфик"}$$

выпуклое множество

(т.е. выпуклая функция не обязана быть гладкой!)

! Из определения не следует, что $f(x)$ имеет производную в каждой точке $(a;b)$

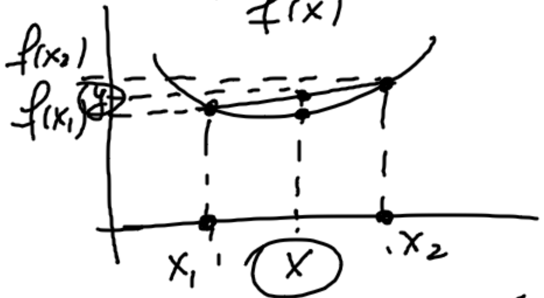
Пример

$y = 2 - |x|$

В точке $x_0 = 0$ нет касательной

Замечание: Определение выпуклой вниз функции.

$$\underset{f(x)}{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} \le \underbrace{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}_{y}$$



$\forall \lambda \in [0;1]$

$\forall x_1, x_2 \in (a;b)$

! Но

Если у функции в каждой точке $(a;b)$ есть $f''(x)$ то можно доказать, что у выпуклой вверх функции в окрестности каждой точки $x_0 \in (a;b)$ график "лежит ниже касательной" (не выше) (но по определению будет лежать выше любой секущей, проходящей через точки $M_1(x_1, f(x_1))$ $M_2(x_2, f(x_2))$). Аналогично про выпуклую (вниз)

(см. лекции А.С.Т.)

Достаточное условие выпуклости вверх на $(a;b)$ — это $f''(x)<0$ $\forall x \in (a;b)$.

(А это мы проверили с использованием формулы Тейлора)

(вниз — $f''(x)>0$)

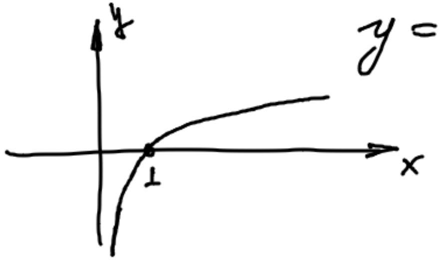
$f(x)$ — описывает процесс

1-я производная показывает скорость и "куда идет процесс"

$f'>0 \Rightarrow f$ — растет

$f'<0 \Rightarrow f$ — уменьшается.

2-я производная показывает "ускорение" процесса.



$y = \ln x \qquad y'(x) = \frac{1}{x} > 0$ при $x>0$

$\Rightarrow$ функция растет.

Но её "рост" замедляется

$\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$

и $\quad y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ замедление; $\quad y'' \to 0 \quad x \to \infty$

$\overline{x} \Rightarrow \vec{V} = \dot{\vec{x}} = const \Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{x}} = 0$

$\Rightarrow$ движение по прямой.

Пример:

f = "число людей"

$\dot{f}(t) = k \cdot f(t)$ — 1-я гипотеза

$\dot{f}(t) = k \cdot f^2(t)$ — 2-я гипотеза

При $x \to 0+0$ $\ln x \to -\infty$ но по правилу Лопиталя можно установить

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = 0$$

Напоминание:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

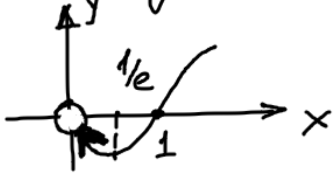
при $X \to X_0$ или $X \to \infty$

$$0 \cdot \infty \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{Л}{=}$$

$$\overset{Л}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to 0+} x = 0$$

Более того! $\forall \varepsilon > 0$ фикс. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\varepsilon} \cdot \ln x = 0$

График $y = x \ln x$



Проверить по схеме исследования.

Пример $y=\frac{1}{1+x^2}$ исследуем и построим эскиз графика.

1. $D_f=\mathbb{R}$ — определена всюду $\Rightarrow$ всюду непрерывна
$\Rightarrow$ в каждой точке имеет конечный предел
$\Rightarrow$ нет вертикальных асимптот.

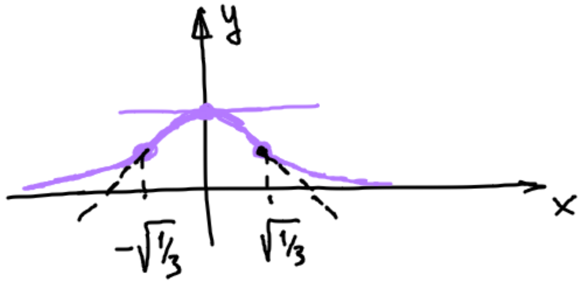
2. $f(x)=f(-x)$ чётная функция $\Rightarrow$ симметричная относ. оси Oy.

Непериодическая.

3. горизонтальная асимптота $y_0=0$ наклонной нет (проверить самим)
($y=kx+b$ $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$)

4. $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0$ в т. $x_0=0$.
$f'(x)>0$ при $x<0$ $f'(x)<0$ при $x>0$ $\Rightarrow$
в точке $x_0=0$ — лок. $\underline{max}$. (4а) и 4б))

5. $$f''(x)=-\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)'=\dots(-2)\frac{(1+x^2)^{\cancel{2}}\cdot 1-x\cdot 2\cancel{(1+x^2)}2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}=-2\cdot\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3}=$$



$$f''(x) = 2\cdot\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ точки перегиба

(т.к. $f''(x)$ меняет знак при переходе через эти точки).

$f(x)$ – вып. вверх $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(x)$ – вып. вниз $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

Д.з.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

На будущий семестр $(F(x))' = f(x)$; $f(x)$ - дана.
Найти $F(x)$, если

$F(x)$ - первообразная.

таблица первообразных ~ таблица производных.

Пример (было)

$$F(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+k}) \text{ — "длинный логарифм"}$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \Rightarrow \text{Будем писать } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+k}) + C$$

Теорема Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные для $f(x)$, то

$$F_1(x) - F_2(x) \equiv const.$$

(Следует из теоремы Лагранжа).

Материал 2-го семестра начнем 22 декабря на лекции.

Д.з. Выучить таблицу производных.