Российская академия образования
Открытый лицей
«ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ МНОГОПРЕДМЕТНАЯ ШКОЛА»
при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

А. К. Рыбников

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Москва, 2003

УДК 517
ББК 22.16
Р93

Рыбников А. К.

Р93 Начальные понятия математического анализа (Теория пределов). — М., 2003. — 104 с.: ил.

Понятие предела — основное понятие математического анализа. В этом учебном пособии дано систематическое изложение теории пределов на уровне, доступном широкому кругу читателей. Теоретический материал сопровождается большим количеством примеров и задач для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для школьников (при изучении раздела «Алгебра и начала анализа» из школьного курса) и для студентов нематематических специальностей высших учебных заведений.

ББК 22.16

Алексей Константинович Рыбников

Начальные понятия математического анализа
(Теория пределов)

Компьютерная верстка Е. Е. Пушкарь

Подписано в печать 12.05.2003 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 6,5. Тираж 500 экз.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Оглавление

Предисловие

Понятие предела — основное понятие математического анализа. Все остальные понятия (производная, интеграл и др.) вводятся через понятие предела.

Цель настоящего пособия — дать систематическое изложение теории пределов, разъяснить само понятие предела, его свойства, доказать основные теоремы о пределах и научить читателя применять эти теоремы при решении задач. Изложение ведется на уровне, доступном широкому кругу читателей. Пособие снабжено достаточным количеством примеров и задач[1]. Оно одинаково пригодно как для школьников (при изучении раздела «Алгебра и начала анализа» из школьного курса), так и для студентов нематематических специальностей высших учебных заведений.

При работе с данным пособием читателю надо с самого начала хорошо осмыслить точное определение предела. Это потребует известных усилий. Однако, усилия не будут напрасными. Дело в том, что учащийся, усвоивший понятие предела лишь на интуитивном уровне, неизбежно будет испытывать серьезные затруднения при изучении последующих разделов. Мы убеждены, что изложение математических дисциплин не должно быть излишне упрощенным. Ведь учащемуся предстоит вникать в смысл математических рассуждений и научиться самому проводить их. Эти рассуждения не должны содержать логических противоречий, двусмысленностей и не вполне обоснованных заключений (в частности, при введении новых понятий следует избегать привлечения терминов, точный математический смысл которых неясен). Если в процессе обучения учащийся не достигнет необходимого уровня математической культуры, его знания будут поверхностными и формальными, что отрицательно скажется при изучении целого ряда дисциплин.

В пособии четко выделены вопросы, относящиеся к основным понятиям, которые имеют решающее значение для понимания всего курса. Мы не стремились изложить теорию пределов с наибольшей общностью. В частности, понятие предела функции при $x \to a$ (где a — число) вводится лишь для функций, определенных в некоторой проколотой окрестности a. Не ставилась цель привести доказательства всех утверждений — в ряде случаев мы ограничивались лишь формулировками теорем. Кроме того, мы отметили звездочкой некоторые параграфы, несколько более трудные для восприятия по сравнению с другими. При первом чтении эти параграфы можно опустить. Изложение ведется в

[1]При подборе задач было использовано «Пособие по высшей математике» (авторы С. Н. Олехник, Е. А. Орлова) — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

классической манере без использования логических символов, чтобы не затруднять читателя, не привыкшего к логической символике. Вместе с тем, в приложении I мы упоминаем о возможности применения логической символики для записи математических рассуждений и приводим соответствующие примеры. Логические символы употребляются лишь иногда (для иллюстрации), параллельно с основным текстом.

Рекомендуем читателю, работая с пособием, подробно, внимательно и самостоятельно (допуская исключения лишь в редких случаях) разбирать приведенные примеры. Это необходимо, чтобы знания были эффективными.

Автор признателен Ж. М. Рабботу, внимательно прочитавшему пособие в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний, и Е. Е. Пушкарь за весьма добросовестную, неформальную работу по подготовке пособия к изданию.

А. К. Рыбников
10 апреля 2003г.
Москва

Глава 1.

Действительные числа.

§1. Основные свойства действительных чисел.

Приступая к изучению основного понятия математического анализа — понятия предела, нам придется предварительно ознакомиться с некоторыми свойствами числовых множеств. Мы должны иметь представление о том, какие бывают числовые множества, какие числа они содержат.

Понятие числа формировалось в сознании людей постепенно. Сначала в процессе счета возник так называемый *натуральный ряд* чисел

$$1, 2, \ldots, n, \ldots$$

В дальнейшем запас чисел был под влиянием практики существенно расширен. Были введены целые отрицательные числа (вида -1, $-2, \ldots, -n, \ldots$) и число нуль, а затем и *рациональные числа* (вида $\frac{p}{q}$ где p, q — целые; $q \neq 0$). Были определены операции сложения, вычитания, умножения и деления. Проделывая эти действия над рациональными числами, мы получаем опять рациональные числа. Следовательно, четыре действия арифметики не выводят нас из класса рациональных чисел.

Некоторое время для нужд практики хватало одних только рациональных чисел. Но позднее потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений, привела к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел. К рациональным числам добавляются *иррациональные числа*. При этом возникает более широкая совокупность — класс *действительных* (или, говоря по-другому, *вещественных*) *чисел.*

Существуют различные способы введения понятия иррационального числа. Один из возможных способов — представить его в виде бесконечной непериодической десятичной дроби (любое рациональное число либо целое, либо представляется в виде конечной десятичной дроби, либо представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби).

После того, как мы расширили запас рассматриваемых чисел до совокупности всех действительных чисел, мы можем, выбрав произвольно масштабный отрезок (т. е. условившись считать его длину равной 1), измерить длину любого другого отрезка. Длина измеряемого отрезка выражается действительным числом. Это число может быть рациональным или иррациональным.

Замечание. Возможно, читающий эти строки еще не полностью осознал необходимость введения иррациональных чисел. В таком случае, процитируем ему одно место из книги А. Я. Хинчина «Восемь лекций по математическому анализу» (ГИТТЛ, М.–Л., 1948). «Почему бы не ограничиться одними рациональными числами? Мы не можем согласиться на это потому, что среди рациональных чисел нет, например, числа $\sqrt{2}$, т. е. нет числа, квадрат которого равнялся бы числу 2. А почему такое число необходимо иметь? Потому хотя бы, что диагональ квадрата, сторона которого равна 1, имеет как раз длину $\sqrt{2}$; следовательно, если бы мы пожертвовали существованием такого числа, то нам пришлось бы мириться с тем, что длины отрезков, которые с такой простотой возникают в геометрии, могут не выражаться никакими числами. Ясно, что на такой базе измерительная геометрия развиваться не может. Значит, $\sqrt{2}$ должен найти себе место среди вещественных чисел; но среди рациональных чисел его нет; поэтому мы называем это число иррациональным».

Полная теория действительных чисел достаточно сложна и в школьном курсе не обсуждается. Отметим лишь, что при построении этой теории формулируется ряд утверждений, некоторые из них принимаются без доказательства (они составляют систему аксиом действительных чисел), а все остальные доказываются. Систему аксиом можно выбирать различными способами. В качестве одной из аксиом мы примем аксиому о существовании точной верхней границы ограниченного сверху множества. Понятие о верхних и нижних границах (или, говоря по-другому, о гранях) числовых множеств мы обсудим в § 3.

Заметим, что иногда встречаются люди, бравирующие своим демонстративным неприятием всего абстрактного. Однако, они (как абсолютно все люди) постоянно имеют дело с действительными числами и не могут без них обходиться. При этом они не осознают, что понятие числа — это в высшей степени абстрактное понятие. Действительные числа являются порождением исключительно человеческого разума, но в то же время они ничуть не менее реальны, чем, к примеру, камни, деревья или другие окружающие нас предметы.

§ 2. Геометрическое изображение действительных чисел.

Задав на прямой систему координат (или, говоря по-другому, превратив ее в координатную ось), можно установить взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех действительных чисел и совокупностью всех точек на прямой. Из школьного курса читатель знает, что система координат на прямой определяется выбором одного из двух направлений (выбранное направление условно называем положительным и на чертеже обозначаем стрелкой), начальной точки O и масштабного отрезка. Соответствие между действительными числами и точками прямой, определяемое заданием на прямой системы координат, устанавливается следующим образом. Любой точке M (рис. 1а) на прямой, превращенной в координатную ось, соответствует вполне определенное действительное число x — координата точки M. Справедливо и обратное утверждение: каждому действительному числу x соответствует на координатной оси точка M (причем единственная), координата которой равна x. Таким образом, вещественные числа можно изображать точками на координатной оси (рис. 1б).

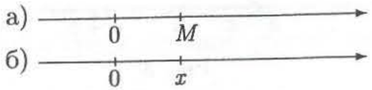


Рис. 1

Точку, изображающую число x, принято называть точкой x, а координатную ось — ***числовой прямой.***

Заметим, что расстояние между точками x_1 и x_2 (т. е. между точками, изображающими числа x_1 и x_2) равно $|x_2 - x_1|$ (очевидно, что $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$). Так, например, расстояние между $x_1 = 5$ и $x_2 = -3$ равно $|-3-5| = |5-(-3)| = 8$.

Как правило, горизонтальная числовая прямая изображается на чертеже с позиции наблюдателя, который видит положительное направление как направление, идущее слева направо. В этом случае для любых чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$, точка x_1 лежит на числовой прямой слева от точки x_2.

Любое множество чисел можно рассматривать как множество точек на числовой прямой. Наиболее употребительными числовыми множествами являются:

- отрезок (сегмент) с концами a и b, т. е. множество всех чисел x таких, что $a \leqslant x \leqslant b$ (для него принято обозначение $[a; b]$);

- интервал с концами a и b, т. е. множество всех чисел x таких, что $a < x < b$ (для него принято обозначение $(a;b)$).

Очевидно, что интервал $(a;b)$ — это множество, состоящее из всех *внутренних точек* (т. е. точек, лежащих строго между левым концом a и правым концом b); отрезок $[a;b]$, кроме всех внутренних точек, содержит также оба конца, a и b.

Очень часто рассматривается интервал вида $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, где ε — положительное число. Серединой этого интервала является точка a, а концы располагаются на одинаковом расстоянии ε от середины. Такой интервал называется *ε-окрестностью точки* a (см. рис. 2; здесь стрелки означают, что точки $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$ не принадлежат ε-окрестности).

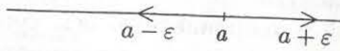


Рис. 2

Совокупность всех точек ε-окрестности точки a, отличных от самой точки a, называется *проколотой ε-окрестностью* (рис. 3).

Рис. 3

Очевидно, что проколотая ε-окрестность точки a является объединением $(a-\varepsilon;a)\cup(a;a+\varepsilon)$ двух интервалов, из которых $(a-\varepsilon;a)$ называется *левой полуокрестностью*, а $(a;a+\varepsilon)$ — *правой полуокрестностью*.

Наряду с отрезками и интервалами рассматриваются полуинтервалы $[a;b)$ $(a \leqslant x < b)$ и $(a;b]$ $(a < x \leqslant b)$.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются *конечными промежутками*. Отрезок называют также *замкнутым промежутком* (он содержит оба своих конца), а интервал — *открытым промежутком* (он не содержит своих концов, все его точки — внутренние). Полуинтервалы не являются ни замкнутыми, ни открытыми.

Рассматриваются также бесконечные промежутки:

- $[a;+\infty)$ $(a \leqslant x < +\infty)$;
- $(a;+\infty)$ $(a < x < +\infty)$;
- $(-\infty;a]$ $(-\infty < x \leqslant a)$;
- $(-\infty;a)$ $(-\infty < x < a)$;

- $(-\infty;+\infty)$ $(-\infty < x < +\infty)$, т. е. вся числовая прямая.

Промежуток вида $(\Delta;+\infty)$, где $\Delta > 0$ (т. е. совокупность всех x таких, что $x > \Delta$), принято называть *окрестностью символа* $+\infty$. Промежуток вида $(-\infty;-\Delta)$, где $\Delta > 0$ (т. е. совокупность всех x таких, что $x < -\Delta$) называют *окрестностью символа* $-\infty$. Термином *окрестность символа* ∞ обозначают объединение двух бесконечных промежутков $(-\infty;-\Delta)\cup(\Delta;+\infty)$, где $\Delta > 0$; в ней содержатся точки x такие, что $|x| > \Delta$.

§ 3*. Грани числовых множеств.

3.1. Числовые множества, ограниченные сверху. Понятие точной верхней границы.

Числовое множество X называется *ограниченным сверху*, если существует число B такое, что для любого $x \in X$ имеет место неравенство $x \leqslant B$ (обратите внимание: неравенство, вообще говоря, нестрогое; оно может быть строгим лишь в частных случаях). При этом число B называется *верхней границей* (или *верхней гранью*) множества X. Очевидно, что справа от точки B нет ни одной точки множества X. Очевидно также, что если B — верхняя граница, то любое число B', большее B $(B < B')$, также является верхней границей. Следовательно, если множество X ограничено сверху, оно имеет бесконечно много верхних границ (рис. 4). При этом среди верхних границ всегда существует наименьшая.

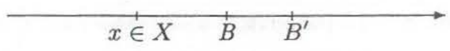


Рис. 4

Она называется *точной верхней границей*. Утверждение о ее существовании может быть принято в качестве одной из аксиом теории действительных чисел (эта аксиома называется *аксиомой полноты*):

Аксиома полноты. *Любое ограниченное сверху непустое числовое множество имеет точную верхнюю границу.*

Аксиому полноты называют также *аксиомой непрерывности*.

Замечание. Если в числовом множестве имеется наибольший элемент, то он, очевидно, является точной верхней границей.

Пример 1. Рассмотрим множество X, элементами которого являются числа $1+\frac{1}{2}, -3, 1+\frac{1}{4}, -5, \ldots$ (см. рис. 5). В дальнейшем мы будем использовать следующую форму записи множества:

$$X\left\{1+\frac{1}{2}, -3, 1+\frac{1}{4}, -5, \ldots\right\}.$$

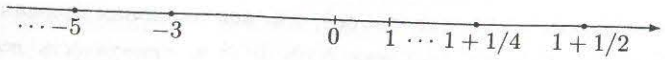


Рис. 5

В этом множестве имеется наибольший элемент $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Это число является точной верхней границей множества X.

Множество X, ограниченное сверху, может не иметь наибольшего элемента. Приведем пример такого множества:

Пример 2. Рассмотрим множество

$$Y\left\{1-\frac{1}{2},\,1-\frac{1}{3},\,1-\frac{1}{4},\,\dots\right\}$$

(см. рис. 6).

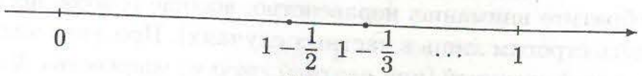


Рис. 6

Никакое число $a < 1$ не является верхней границей множества Y, так как всегда можно указать достаточно большое натуральное число n такое, что $a < 1 - \frac{1}{n}$. Так, например, если $a = 0{,}97$, то $a < 1 - \frac{1}{n}$ при всех $n > 34$ (обратите внимание на то, что $0{,}97 = 1 - \frac{3}{100}$); если $a = \frac{170}{191}$, то $a < 1 - \frac{1}{n}$ при всех $n > 10$ (обратите внимание на то, что $\frac{170}{191} = 1 - \frac{21}{191}$). Число 1 является точной верхней границей множества Y. Множеству Y оно не принадлежит.

Отметим

Основное свойство точной верхней границы. *Пусть b — точная верхняя граница числового множества X. Тогда, как бы мало́ ни было число $\varepsilon > 0$, всегда найдется число $x \in X$, расположенное между $b - \varepsilon$ и b (рис. 7), и притом такое, что $b - \varepsilon < x \leqslant b$ (обратите внимание на то, что левое неравенство — строгое, а правое, вообще говоря, — нестрогое).*

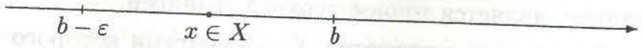


Рис. 7

Доказательство. Это утверждение нетрудно доказать, рассуждая от противного. Допустим, что для какого-то $\varepsilon > 0$ не найдется ни одного элемента $x \in X$ такого, что $b - \varepsilon < x \leqslant b$. Но тогда все числа из

интервала $(b - \varepsilon; b)$ являются верхними границами множества X, и все они меньше числа b. Таким образом, из нашего предположения следует, что b не является наименьшей верхней границей, т. е., говоря другими словами, b не является точной верхней границей, что противоречит условию. □

Замечание. Возможен случай, когда при любом $\varepsilon > 0$ между $b - \varepsilon$ и b находится бесконечно много элементов множества X (именно такая ситуация имела место в примере 2). Вместе с тем возможен и такой случай, когда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ между $b - \varepsilon$ и b располагается только один элемент $x \in X$ такой, что $b - \varepsilon < x \leqslant b$ (это может иметь место только, если $x = b$; это означает, что $b \in X$ и является наибольшим элементом множества). С такой ситуацией мы встретились в примере 1.

3.2. Числовые множества, ограниченные снизу. Понятие точной нижней границы.

Числовое множество X называется *ограниченным снизу*, если существует число A такое, что для любого $x \in X$ имеет место неравенство $A \leqslant x$. Число A в этом случае называется *нижней границей* множества X. Очевидно, что любое число $A' < A$ также является нижней границей множества X (рис. 8).

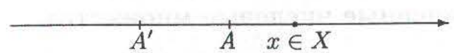


Рис. 8

Наибольшая из нижних границ называется *точной нижней границей*.

Справедливо следующее утверждение:

Любое ограниченное снизу числовое множество имеет точную нижнюю границу.

Отметим

Основное свойство точной нижней границы. *Пусть a — точная нижняя граница числового множества X. Тогда, как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, всегда найдется число $x \in X$, расположенное между a и $a + \varepsilon$ (рис. 9), и притом такое, что $a \leqslant x < a + \varepsilon$.*

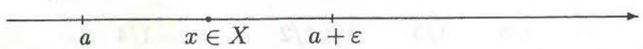


Рис. 9

Полагаем, что читатель в состоянии самостоятельно доказать это утверждение, рассуждая по аналогии с доказательством соответствующего свойства точной верхней границы.

Замечание. Очевидно, что если в множестве X имеется наименьший элемент, то именно он и является точной нижней границей.

Множеством, ограниченным снизу, является множество Y из примера 2 (оно ограничено и снизу, и сверху). Оно имеет наименьший элемент $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Это число является его точной нижней границей.

Рассмотрим еще один пример:

Пример 3. Множество $U\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ (см. рис. 10) ограничено снизу. Среди нижних границ этого множества содержится число 0. Никакое $a > 0$ не является нижней границей, так как для любого $a > 0$ можно указать натуральное число n такое, что $U \ni \frac{1}{n} < a$. Следовательно, число 0 является точной нижней границей. Множеству U оно не принадлежит.

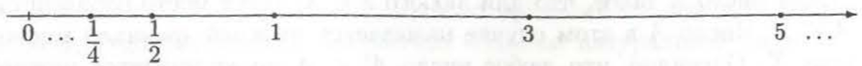


Рис. 10

3.3. Ограниченные числовые множества.

Ограниченным числовым множеством называется множество, ограниченное одновременно и снизу, и сверху. Оно имеет и точную нижнюю границу, и точную верхнюю границу. Таким множеством является, например, множество Y из примера 2. Заметим, что множество M из примера 3 — неограниченное (хотя и ограничено снизу).

Приведем еще один пример:

Пример 4. Множество $V\left\{1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ (см. рис. 11) — ограниченное. Оно состоит из чисел вида $1 - \frac{1}{2k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ и чисел вида $\frac{1}{2l+1}$ $(l = 1, 2, \dots)$. Все элементы множества V расположены между 0 и 1. При этом число 0 является точной нижней границей, а число 1 — точной верхней границей. Ни 0, ни 1 не принадлежат множеству V.

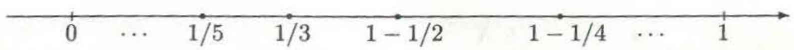


Рис. 11

Заметим, что если множество X ограничено, то найдется константа $C > 0$ такая, что для всех $x \in X$ имеет место неравенство $|x| < C$ (или, что то же, $-C < x < C$). В самом деле, в этом случае существуют числа A и B такие, что для всех $x \in X$

$$A < x < B.$$

Если взять произвольное число C, которое больше и $|A|$, и $|B|$, то очевидно (см. рис. 12)

$$-C < x < C.$$

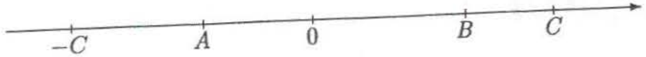


Рис. 12

Глава 2.

Предел последовательности.

§ 4. Числовые последовательности и арифметические действия над ними.

С числовыми последовательностями читатель уже встречался в школьном курсе. Тем не менее, мы считаем необходимым еще раз вернуться к этому понятию и напомнить основные сведения о последовательностях и арифметических действиях над ними.

Числовой последовательностью (или просто *последовательностью*) называется соответствие

$$n \to x_n,$$

при котором каждому натуральному числу n сопоставляется некоторое вполне определенное действительное число x_n, которое называется n-м элементом последовательности. Каждый элемент x_n последовательности имеет свой номер n. Значения некоторых (или даже всех) элементов могут совпадать, однако все элементы различаются своими номерами.

Можно задать последовательность, указав функцию $f(x)$, определенную аналитически (т. е. формулой), такую, что $f(n) = x_n$ (такую функцию обычно называют производящей функцией), и обозначить последовательность символом (x_n), где $x_n = f(n)$.

Наряду с краткой записью последовательности в виде символа (x_n) используется также развернутая запись в виде строки

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Так, например, развернутая запись последовательности, обозначенной символом $\left(\frac{1}{n}\right)$, имеет вид

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

Примеры последовательностей:

1) $\left(n^{(-1)^n}\right)$

Развернутая запись

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots, n^{(-1)^n}, \ldots.$$

2) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

Развернутая запись

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots.$$

3) $\left(\frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Развернутая запись

$$-1, 1+\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}, \ldots.$$

Замечание 1. Следует различать понятие элемента последовательности и понятие его значения. Элементы последовательности, соответствующие различным номерам, могут иметь одинаковые значения. Поэтому, задавая элемент последовательности, надо указать не только его значение, но и его номер. Говоря другими словами, множество элементов последовательности (x_n), где $x_n = f(n)$, — это множество упорядоченных пар чисел $(n, f(n))$, где первое число — номер элемента, а второе число — его значение.

К примеру, запись $x_{10} = -3$ означает, что элемент последовательности с номером $n = 10$ имеет значение -3 (или, говоря другими словами, представляет собой пару $(n = 10, f(10) = -3)$).

Замечание 2. Среди последовательностей содержится, в частности, последовательность, n-й элемент которой при каждом n имеет одно и то же постоянное значение a. Развернутая запись такой последовательности имеет вид

$$a,\ a,\ \ldots,\ a,\ \ldots.$$

Множество элементов этой последовательности — это, по существу, бесконечное множество пар чисел (n, a), где n — номер элемента. В то же время множество значений элементов этой последовательности состоит из одного–единственного числа a.

Последовательность называется *ограниченной сверху* (или *снизу*), если ограничено сверху (или снизу) множество значений ее элементов. Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена одновременно и снизу, и сверху. Рассматривая приведенные выше примеры последовательностей, мы видим, что элементы последовательности $\left(n^{(-1)^n}\right)$ при n — четном с увеличением номера принимают сколь угодно большие значения. Эта последовательность — неограниченная (хотя и ограничена снизу $(x_n > 0)$). Последовательности $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ и $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ — ограниченные $\left(-1 \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{2};\quad -1 \leqslant\right.$ $\left.\leqslant \dfrac{1+(-1)^n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\right)$.

Можно определить операции над последовательностями, аналогичные арифметическим действиям над числами.

Если заданы две последовательности (x_n) и (y_n), то их *суммой* называется последовательность $(x_n + y_n)$, *произведением* — последовательность $(x_n \cdot y_n)$. Если $x_n \neq 0$ для любых номеров n, можно определить последовательность $\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$, которая называется *частным* этих двух последовательностей. Последовательности (ax_n) и $\left(\dfrac{a}{x_n}\right)$, где $a = \mathrm{const}$, можно рассматривать соответственно, как $(x_n \cdot y_n)$ и $\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$, где $y_n = a$ при любом n.

§ 5. Понятие предела последовательности.

5.1. Предел последовательности. Определения и примеры.

С высказываниями типа «последовательность (x_n) стремится к пределу a при n, стремящемся к бесконечности» (или, что абсолютно то же, «число a является пределом последовательности (x_n) при $n \to \infty$») читатель уже встречался в школьном курсе (например, когда речь шла

о сумме бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$, где q — знаменатель прогрессии). Слова «стремится к числу a при $n \to \infty$» представляются понятными с точки зрения наглядных геометрических представлений. Если отметить на числовой прямой неподвижную точку a и подвижную точку x_n, положение которой на прямой изменяется при изменении n, то можно представить себе как точка x_n, «перескакивая» с ростом номера n из одного положения в другое, постепенно приближается к a все ближе и ближе. Однако, для проведения математических доказательств и обоснования вычислений такие интуитивно понятные, наглядные представления оказываются недостаточными. Необходимо определить понятие предела таким образом, чтобы выражения «n стремится к бесконечности» и «x_n стремится к a» получили бы точный смысл.

Примем следующее

Определение. Число a называется *пределом последовательности* x_n при n, стремящемся к бесконечности, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует номер N такой, что все значения x_n с номерами $n > N$ содержатся в ε-окрестности a (или, что то же, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$).

Подчеркнем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует свой номер N, т.е. N зависит от выбора ε $(N = N(\varepsilon))$. В ε-окрестности a, т.е. в интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, содержатся все элементы x_n, для которых $n > N$ (рис. 13). За ее пределами может находиться не более, чем конечное число элементов. Это число либо равно N (если за пределами ε-окрестности находятся все N элементов $x_1, \ldots, x_N$), либо меньше N (если некоторые из элементов $x_1, \ldots, x_N$ находятся внутри ε-окрестности). Возможна и такая ситуация, когда за пределами ε-окрестности не находится ни одного элемента последовательности (т.е. абсолютно все элементы содержатся внутри ε-окрестности).

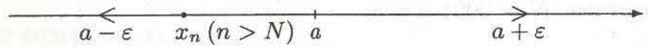


Рис. 13

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся последовательностью*. Про последовательность, не имеющую предела, говорят, что она *расходится*. Если последовательность x_n сходится и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{или} \qquad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В приложении I приведена запись определения предела последовательности с использованием логических символов.

Замечание. Из принятого нами определения последовательности с очевидностью следует, что последовательность

$$a,\ a,\ \ldots,\ a,\ \ldots,$$

где $a = \mathrm{const}$, сходится и имеет своим пределом число a (это утверждение принято записывать так: $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$). В самом деле, в этом случае $x_n = a$ при любом n и для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \quad \text{при всех } n.$$

Пример 1. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n}{n} = 1$.

Решение. Чтобы доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n}{n} = 1$, нам надо доказать (см. определение предела), что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что $|x_n - 1| < \varepsilon$ для всех $n > N$ (где $x_n = \dfrac{n+\sin n}{n}$).

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Заметим, что $|x_n - 1| = \dfrac{|\sin n|}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Очевидно, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно указать номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ будет иметь место неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ и, следовательно, $|x_n - 1| < \varepsilon$. В качестве N, соответствующего заданному $\varepsilon > 0$, можно взять любое натуральное число большее, чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Так, например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то можно взять $N = 100$ (но можно взять и любой другой номер больший, чем 100, например, $N = 203$, т. к. не обязательно брать минимально возможное значение N); если $\varepsilon = 0{,}001$, то можно взять $N = 2001$ и т. д. □

Пример 2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 1$.

Решение. Заметим предварительно, что $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} > 1$. Следовательно,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 > 2$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} < \frac{1}{2}.$$

Заметим также, что

$$\left|\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} < \frac{1}{2n^2}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Очевидно, что $\dfrac{1}{2n^2} < \varepsilon$, если $n > \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$.

Если взять в качестве N любое натуральное $N > \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, то при $n > N$ имеем

$$\left|\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right| < \frac{1}{2n^2} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 1$. □

Пример 3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 1$.

Решение. В этом примере (подобно предыдущему) мы рассмотрим модуль разности $\left|\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right|$ и представим его в виде дроби, числитель которой не содержит корней:

$$\left|\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right| = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right) \cdot \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right]}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + 1}.$$

Заметим, что $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} > 1$. Следовательно, имеют место неравенства

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} > 1;$$

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + 1 > 3;$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + 1} < \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\left|\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right| < \frac{1}{3n^2}.$$

Теперь уже нетрудно доказать (см. предыдущий пример 2), что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

□

5.2. Основные свойства предела последовательности.

Отметим три свойства сходящихся последовательностей (справедливость каждого из этих утверждений следует из самого определения предела).

Теорема 1. *Последовательность может иметь только один предел.*

Доказательство. Это утверждение можно доказать рассуждением от противного. Допустим, что два различных числа a и b (пусть для определенности $a < b$) одновременно являются пределами одной и той же последовательности (x_n):

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{и} \quad b = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы ε-окрестность числа a располагалась слева от ε-окрестности числа b (следует взять $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, т.е. меньше половины расстояния между a и b) (см. рис. 14).

Рис. 14

Поскольку $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, существует номер N_1 такой, что $x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_1$. С другой стороны, так как $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, существует номер N_2 такой, что $x_n \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ при всех $n > N_2$. Если взять номер n, который больше и N_1, и N_2, то соответствующий элемент x_n должен одновременно содержаться в двух непересекающихся интервалах $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$, что невозможно. Это противоречие является следствием предположения о неединственности предела. Следовательно, предел (если он существует) определяется единственным образом. □

Теорема 2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем произвольное фиксированное число $\varepsilon > 0$; например, $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела, существует номер N такой, что $a - 1 < x_n < a + 1$ для всех $n > N$. Вне интервала $(a-1; a+1)$ может находиться не более, чем конечное число элементов последовательности — это элементы $x_1, \ldots, x_N$ или, может быть, некоторые из них (не исключено, что какие-то из элементов $x_1, \ldots, x_N$, или даже все они, могут оказаться внутри интервала $(a-1; a+1)$). Отсюда следует, что можно указать 2 числа A и B таких, что абсолютно для всех n ?

$$A < x_n < B.$$

В качестве A можно взять любую точку числовой прямой, которая находится левее $a-1$ и одновременно левее самого левого из тех элементов, что находятся слева от $a-1$ (если такие элементы существуют). аналогичным образом можно выбрать B (рис. 15).

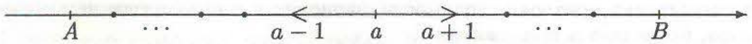


Рис. 15

Следовательно, последовательность (x_n) ограничена. □

Теорема 3 (свойство предела, связанное с неравенствами). *Пусть последовательность* x_n *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > b$ *(или же* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b$*). Тогда существует номер* n_0 *такой, что для всех* $n > n_0$ *имеет место неравенство* $x_n > b$ *(соответственно* $x_n < b$*).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a > b$ (в случае $a < b$ доказательство аналогично — проведите его самостоятельно). Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы ε-окрестность числа a располагалась справа от b (рис. 16), т.е. $\varepsilon < a - b$.

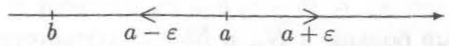


Рис. 16

Поскольку $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, существует номер N такой, что $x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ для всех $n > N$. Взяв произвольный номер $n_0 > N$, получаем

$$x_n > a - \varepsilon > b$$

для всех $n > n_0$. □

Формулировка этой теоремы, записанная с использованием логических символов, приведена в приложении I.

5.3. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

В заключение этого параграфа приведем без доказательства следующую теорему:

Теорема 4 (необходимое и достаточное условие сходимости последовательности). *Для того, чтобы последовательность* (x_n) *имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа* ε*, сколь бы мало оно ни было, существовал номер* N *такой, что для всех номеров* n *таких, что* $n > N$*, и для любых натуральных* p *было бы справедливо неравенство* $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ *(т. е. чтобы для всех* $n > N$ *имели бы место неравенства* $|x_{n+1}| < \varepsilon$; $|x_{n+1} + x_{n+2}| < \varepsilon$; $|x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}| < \varepsilon$; $\ldots$*).*

Эту теорему называют также *критерием Коши*[1] или же *критерием сходимости* (критерием в математике принято называть условие, которое является одновременно и необходимым, и достаточным).

Формулировка критерия сходимости, записанная с использованием логических символов, приведена в приложении I.

[1] *Огюстен Луи Коши* (1789–1857) — выдающийся французский математик. Курсы лекций Коши послужили образцами для большинства курсов позднейшего времени.

Пример. Докажите, что последовательность (x_n), где $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, не удовлетворяет условию критерия сходимости и, следовательно, расходится.

Доказательство. Доказательство проведем рассуждением от противного. Допустим, что последовательность удовлетворяет условию критерия сходимости. Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{2}$; например, $\varepsilon = \frac{1}{4}$. В силу нашего предположения существует номер N такой, что для всех натуральных n и p, где $n > N$, а p — любое, имеет место неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} < \frac{1}{4}.$$

В частности, если $n = n_0 > N$ и $p = n_0$, то

$$|x_{n_0+n_0} - x_{n_0}| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n_0+n_0} < \frac{1}{4}.$$

Но в то же самое время (поскольку в этой сумме n_0 слагаемых и наименьшее из них равно $\frac{1}{n_0+n_0} = \frac{1}{2n_0}$)

$$|x_{n_0+n_0} - x_{n_0}| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n_0+n_0} > n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Мы пришли к противоречию. От предположения приходится отказаться. Последовательность не удовлетворяет условию критерия сходимости и, следовательно, расходится. □

§6. Предельный переход в неравенствах.

Нередко возникает вопрос: можно ли из неравенства $x_n \leqslant y_n$ (имеющего место для всех n) заключить, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (если обе последовательности сходятся)? Такое заключение сделать можно: справедлива

Теорема 1. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся и их элементы, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству* $x_n \leqslant y_n$*, то и их пределы удовлетворяют неравенству*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n \leqslant y_n$ для всех номеров n, больших некоторого n_0. Требуется доказать, что $a \leqslant b$. Допустим противное, т.е. что $a > b$, или, говоря по-другому, что a лежит правее b. Возьмем положительное число ε, выбрав его таким образом, чтобы ε-окрестность точки a располагалась правее ε-окрестности точки b (в качестве ε можно взять любое положительное число, которое меньше, чем $\frac{a-b}{2}$).

Так как $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то существуют:

1) номер N_1 такой, что $x_n \in (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ для всех $n > N_1$;

2) номер N_2 такой, что $y_n \in (b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$ для всех $n > N_2$.

Если $n > N_1$, N_2 (т.е. n больше как N_1, так и N_2), то

$$x_n \in (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon), \quad y_n \in (b-\varepsilon;\ b+\varepsilon),$$

и, следовательно,

$$x_n > a-\varepsilon > b+\varepsilon > y_n,$$

т. е.

$$x_n > y_n,$$

что противоречит условию теоремы (см. рис. 17).

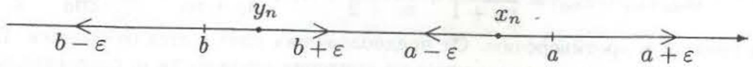


Рис. 17

Итак, предположение, что $a > b$, приводит к противоречию. Следовательно, $a \leqslant b$. □

Утверждение теоремы 1 останется в силе, если в ее условии заменить нестрогое неравенство $x_n \leqslant y_n$ строгим неравенством $x_n < y_n$. А именно, очевидным следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и их элементы, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n < y_n$, то их пределы удовлетворяют неравенству*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Замечание. Обращаем внимание читателя на то, что из строго неравенства $x_n < y_n$, вообще говоря, *не следует* строгое же неравенство для пределов, но по-прежнему: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Так, например, для последовательностей $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ и $y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ имеем $x_n < y_n$ для всех n и при этом

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

т. е. в этом случае строгое неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ не выполняется.

Отметим полезное

Следствие теоремы 2. *Если последовательность (x_n) сходится и все ее элементы, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n < a$, где $a = const$, $(x_n > a)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant a$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a)$.*

§ 7. Бесконечно большие последовательности.

Последовательность (x_n) называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа A (как бы велико оно ни было) существует номер N такой, что все x_n, для которых $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n| > A.$$

Бесконечно большую последовательность называют также последовательностью, ***стремящейся к бесконечности*** при $n \to \infty$.

Если последовательность (x_n) бесконечно большая, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \to \infty \ \text{при} \ n \to \infty.$$

Приведем определение бесконечно большой последовательности, записанное с использованием логических символов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \overset{def}{\iff} \forall A > 0\ \exists N = N(A) \ \text{ такой, что } \ \forall n > N:\ |x_n| > A.$$

Примеры: Последовательности

$$x_n = (-1)^n \cdot n; \qquad x_n = n; \qquad x_n = -n$$

— бесконечно большие.

Действительно, для каждой из этих последовательностей $|x_n| = n$ и для любого $A > 0$ (как бы велико оно ни было) можно указать номер N такой, что $N > A$ (можно взять любое натуральное число бо́льшее A). Очевидно, что если $n > N$, то $|x_n| = n > N > A$, т.е. $|x_n| > A$.

Очевидно, что бесконечно большая последовательность является неограниченной и, следовательно, не имеет предела (вспомните теорему 2 из § 5). Следовательно, справедливо следующее утверждение, которое, возможно, кому-то из читателей в первое мгновение покажется парадоксальным:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

Надеемся, что это утверждение не вызовет у читателя недоумения. Вспомните определение предела (§ 5) и обратите внимание на то, что предел последовательности — действительное число, а символ ∞ числом не является.

Замечание. Заметим, что неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой (хотя любая бесконечно большая последовательность является неограниченной). Например, последовательность

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots, n^{(-1)^n}, \ldots,$$

будучи неограниченной, не является бесконечно большой: какое бы число $A > 1$ мы ни взяли, мы *не сможем* указать номер N такой, что для *всех* $n > N$ будет выполнено неравенство $|x_n| > A$ (ни для одного элемента с нечетным номером оно не имеет места).

Если последовательность (x_n) — бесконечно большая и, начиная с некоторого номера, $x_n > 0$, то ее называют *положительной бесконечно большой* (или же последовательностью, *стремящейся к плюс бесконечности* при $n \to \infty$).

Аналогичным образом определяется понятие *отрицательной бесконечно большой* последовательности (если (x_n) — бесконечно большая и $x_n < 0$, начиная с некоторого номера), или же, что абсолютно то же, последовательности, *стремящейся к минус бесконечности* при $n \to \infty$.

Для положительных бесконечно больших последовательностей принято символическое обозначение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad (\text{или} \quad x_n \to +\infty \ \text{при} \ n \to \infty).$$

Соответственно для отрицательных бесконечно больших последовательностей используется символическое обозначение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \qquad (\text{или} \quad x_n \to -\infty \ \text{при} \ n \to \infty).$$

Выше мы привели 3 примера бесконечно больших последовательностей. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty; \qquad \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$$

Про последовательность $x_n = (-1)^n \cdot n$ можно сказать, что она стремится к ∞, но нельзя сказать, что она стремится к $+\infty$ либо к $-\infty$, т.е. она бесконечно большая, но не является ни положительной бесконечно большой, ни отрицательной бесконечно большой.

§ 8. Бесконечно малые последовательности.

Среди сходящихся последовательностей особый интерес представляют последовательности, стремящиеся к нулю. Такие последовательности принято называть *бесконечно малыми*. Изучив бесконечно малые последовательности и их свойства, мы сможем (в § 9) доказать основные теоремы о пределах (о пределе суммы, произведения и частного двух последовательностей), знание которых необходимо для вычисления пределов.

Термин «бесконечно малая последовательность» сохранился в силу традиции с той поры, когда математический анализ еще только начал формироваться. Этот не вполне удачный термин не должен вводить читателя в заблуждение. Отдельные элементы бесконечно малой последовательности могут не иметь столь уж и малые значения. Лишь в процессе стремления номера n к бесконечности значения элементов x_n делаются сколь угодно малыми. Об этом хорошо сказал Н. Н. Лузин (один из величайших математиков нашей страны) в своей книге «Дифференциальное исчисление» (М.: «Советская наука», 1946): «В сущности говоря, было бы гораздо правильнее употреблять не термин «*бесконечно малое*», но термин «*бесконечно умаляющееся*», как более ярко выражающий *идею переменности*».

8.1. Понятие бесконечно малой последовательности.

Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если она удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Это означает, что для любого положительного числа ε (как бы мало оно ни было) существует номер N такой, что для всех номеров $n > N$ имеет место неравенство

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Следующие два утверждения равносильны:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;

2) n-ый элемент последовательности имеет вид

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n — бесконечно малая.

Говоря по-другому, это означает, что если последовательность можно представить в виде суммы постоянной a и бесконечно малой, то последовательность сходится и постоянная a является ее пределом (и обратно).

В этом можно убедиться следующим образом. Заметим сначала, что второе утверждение означает, что последовательность $(x_n - a)$ — бесконечно малая, т. е. что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$. Для читателя, усвоившего определение предела, очевидно, что оба утверждения ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$) означают (на «языке ε») одно и то же. А именно: для любого положительного числа ε (как бы мало оно ни было) существует номер N такой, что для всех $n > N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Замечание 2. Пусть (x_n) — последовательность, все элементы которой отличны от нуля. Тогда если (x_n) — бесконечно большая, то $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ — бесконечно малая. Обратно: если (x_n) — бесконечно малая, то $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ — бесконечно большая.

Предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно. Это под силу тем, кто хорошо осмыслил определение бесконечно малой последовательности (на «языке ε») и определение бесконечно большой последовательности (§ 7).

8.2. Основные свойства бесконечно малых.

Отметим основные свойства бесконечно малых, сформулировав их в форме следующих двух теорем.

Теорема 1. *Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть (α_n) и (β_n) — две бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $(\alpha_n \pm \beta_n)$ — бесконечно малая.

Выпишем предварительно очевидное неравенство

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Согласно определению бесконечно малой последовательности по числу $\dfrac{\varepsilon}{2}$ для бесконечно малой (α_n) найдется такой номер N_1, начиная с которого (т. е. для всех $n > N_1$)

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точно так же (в соответствии с определением бесконечно малой последовательности) и для бесконечно малой (β_n) существует номер N_2,

начиная с которого (т. е. для всех $n > N_2$)

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять натуральное число N такое, что $N > \max(N_1, N_2)$, то при $n > N$ будут одновременно выполняться два неравенства $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $(\alpha_n \pm \beta_n)$ действительно является бесконечно малой. □

Следствие. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Читатель в состоянии самостоятельно доказать справедливость этого утверждения. Он может, по своему желанию, либо применить метод математической индукции, либо провести доказательство, аналогичное доказательству теоремы 1 (в случае, когда число слагаемых равно m, следует вместо $\dfrac{\varepsilon}{2}$ взять $\dfrac{\varepsilon}{m}$, принимая во внимание, что модуль алгебраической суммы m слагаемых меньше или равен сумме их модулей).

Теорема 2. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть (α_n) — бесконечно малая последовательность, а (x_n) — ограниченная последовательность, т. е. существует такое число $M > 0$, что для всех номеров n имеет место неравенство

$$|x_n| < M.$$

Если дано произвольное число $\varepsilon > 0$, то по числу $\dfrac{\varepsilon}{M}$ для бесконечно малой последовательности (α_n) найдется такой номер N, что для $n > N$ будет справедливо неравенство

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Поэтому для всех $n > N$ имеем

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

что и означает, что последовательность $(\alpha_n \cdot x_n)$ — бесконечно малая. □

Следствие 1. *Если последовательность (α_n) — бесконечно малая и $c = \text{const}$, то последовательность $(c \cdot \alpha_n)$ — бесконечно малая.*

В самом деле, последовательность $(c \cdot \alpha_n)$ — это произведение последовательности (α_n) на последовательность

$$c,\ c,\ \dots,\ c,\ \dots\ .$$

Очевидно, что последовательность $(c \cdot \alpha_n)$ является произведением бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность.

Следствие 2. *Если (α_n) и (β_n) — две бесконечно малые последовательности, то их произведение $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ является бесконечно малой последовательностью.*

Это очевидно, поскольку бесконечно малая последовательность (β_n) — ограниченная (напомним теорему 2 из § 5 о том, что всякая сходящаяся последовательность ограничена).

§ 9. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух последовательностей.

9.1. Предварительные замечания.

В этом параграфе мы сформулируем и докажем основные теоремы о пределах: теоремы о пределах суммы, произведения и частного двух последовательностей. Эти теоремы позволяют во многих случаях находить значение предела, не обращаясь всякий раз к определению предела (с разысканием по заданному $\varepsilon > 0$ соответствующего N и т. д.). Достаточно найти пределы лишь нескольких наиболее часто встречающихся последовательностей. В большинстве случаев рассматриваемую последовательность удается представить в виде суммы, произведения или частного таких последовательностей.

В дальнейшем для доказательства одной из теорем (теорема 2) нам понадобится

Лемма. *Если последовательность (x_n) сходится, причем $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ — ограниченная.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a \neq 0$. Рассмотрим случай, когда $a > 0$ (в случае $a < 0$ доказательство проводится аналогично). Согласно определению предела, для любой ε-окрестности $(\varepsilon > 0)$ числа a

существует номер, начиная с которого все элементы последовательности будут находиться в ε-окрестности a. Можно выбрать $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы ε-окрестность вся целиком располагалась на положительной полуоси. В частности, если $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, то ε-окрестностью a является интервал $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{3}{2}a\right)$ (см. рис. 18).

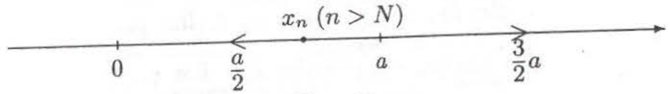


Рис. 18

Для выбранного $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ найдется номер N такой, что при всех $n > N$ элементы x_n располагаются между двумя положительными числами $\dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{3}{2}a$ и, следовательно,

$$\frac{2}{3a} < \frac{1}{x_n} < \frac{2}{a} \qquad (n > N).$$

Таким образом, все элементы последовательности $(1/x_n)$ с номерами $n > N$ лежат внутри интервала $\left(\dfrac{2}{3a}, \dfrac{2}{a}\right)$, а за пределами этого интервала располагается не более, чем конечное число элементов (элементы $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \dots, \dfrac{1}{x_N}$ или их часть). Следовательно, найдется число $C > 0$ настолько большое, что между $-C$ и C будут располагаться и интервал $\left(\dfrac{2}{3a}, \dfrac{2}{a}\right)$, и все элементы $\dfrac{1}{x_n}$, расположенные вне интервала $\left(\dfrac{2}{3a}, \dfrac{2}{a}\right)$, если таковые найдутся (рис. 19).

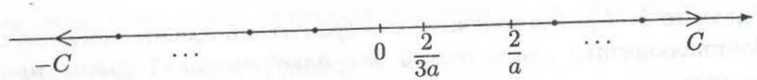


Рис. 19

Это означает, что абсолютно для всех номеров n

$$\frac{1}{|x_n|} < C. \quad \square$$

9.2. Теорема о пределе суммы и произведения двух последовательностей.

Справедлива

Теорема 1. *Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то сходятся также последовательности $(x_n \pm y_n)$ и $(x_n \cdot y_n)$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Из условия нашей теоремы (с учетом замечания 1 из § 8) следует, что

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n,$$

где (α_n) и (β_n) — бесконечно малые. Таким образом,

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n),$$
$$x_n \cdot y_n = (a \cdot b) + (a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n).$$

При этом $(\alpha_n \pm \beta_n)$ и $(a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ являются бесконечно малыми в силу теорем 1 и 2 из § 8 и их следствий. Следовательно, $a \pm b$ является пределом последовательности $(x_n \pm y_n)$, а $a \cdot b$ есть предел последовательности $(x_n \cdot y_n)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Предел конечной алгебраической суммы сходящихся последовательностей равен такой же алгебраической сумме пределов слагаемых.*

Следствие 2. *Если последовательность (x_n) сходится, то сходится также последовательность (cx_n), где $c = \mathrm{const}$. При этом*

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

9.3. Теорема о пределе частного двух последовательностей.

Справедлива также

Теорема 2. *Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Если при этом $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, то последовательность $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(a \neq 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n,$$

где (α_n) и (β_n) — бесконечно малые. Следовательно,

$$\frac{y_n}{x_n} - \frac{b}{a} = \frac{ay_n - bx_n}{ax_n} = \frac{a(b+\beta_n) - b(a+\alpha_n)}{ax_n} = \frac{1}{x_n}\cdot\frac{1}{a}(a\beta_n - b\alpha_n).$$

Последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ — ограниченная (в силу леммы), последовательность $\left(\frac{1}{a}\cdot(a\beta_n - b\alpha_n)\right)$ — бесконечно малая. Их произведение

$$\left(\frac{1}{x_n}\cdot\frac{1}{a}\cdot(a\beta_n - b\alpha_n)\right)$$

— также бесконечно малая. Таким образом,

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{b}{a} + \frac{1}{x_n}\cdot\frac{1}{a}(a\beta_n - b\alpha_n),$$

т. е. представляет собой сумму постоянной $\frac{b}{a}$ и бесконечно малой $\frac{1}{x_n}\cdot\frac{1}{a}(a\beta_n - b\alpha_n)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{b}{a} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}. \quad \square$$

В следующем параграфе (§ 10) будут приведены примеры вычислений пределов последовательностей (рекомендуем читателю разобрать эти примеры прежде, чем идти дальше).

§ 10. Вычисление пределов последовательностей. Примеры.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{2n^2-n+1}$.

Решение. Дробь $\dfrac{n^2+3n}{2n^2-n+1}$ не удовлетворяет условиям теоремы о пределе частного, т.к. является отношением двух бесконечно больших (принято говорить, что она представляет собой *неопределенность типа* $\frac{\infty}{\infty}$). Однако, разделив числитель и знаменатель на один и тот же множитель n^2, мы избавимся от неопределенности и сможем применить теорему о пределе частного (это преобразование является тождественным — при этом числитель и знаменатель изменяются, но само выражение — их отношение, дробь — остается тем же самым):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}$.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right) = 0$$

(см. пример 2 из § 5). На этот раз мы имеем *неопределенность типа* $\frac{0}{0}$, т.е. отношение двух бесконечно малых. Избавиться от неопределенности можно, умножив и числитель и знаменатель на один и тот же множитель $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1$. При этом в знаменателе появится произведение разности $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1$ на сумму $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1$. Оно равно разности

квадратов, т.е. $\frac{1}{n^2}$. В числителе добавится множитель $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1$, который при $n\to\infty$ стремится к пределу, равному 2. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) =$$

$$= 1\cdot(1+1) = 1\cdot 2 = 2. \quad \square$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\cdot n^2\right]$.

Решение. Здесь мы имеем произведение бесконечно малой последовательности $\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)$ (см. пример 3 из § 5) на бесконечно большую последовательность (n^2) (*неопределенность типа* $0\cdot\infty$). От неопределенности можно избавиться, умножив и одновременно разделив выражение на неполный квадрат суммы: $\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)$ — мы применяли этот прием в примере 3 из § 5. В результате (поскольку $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, а у нас $a=\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}$, $b=1$, поэтому $a^3-b^3=\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^3-1=1+\frac{1}{n^2}-1=\frac{1}{n^2}$) числитель станет равным $\frac{1}{n^2}\cdot n^2=1$, а в знаменателе появится сумма $\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1$, предел которой при $n \to \infty$ равен 3. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\cdot n^2\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}=\frac{1}{3}.$$ □

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-2n-5}\right)$.

Решение. Здесь и уменьшаемое, и вычитаемое являются положительными бесконечно большими (*неопределенность типа* $\infty-\infty$). Чтобы избавиться от неопределенности, можно умножить и одновременно разделить выражение на сумму $\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-5}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-2n-5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-2n-5}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-5}\right)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+1)-(n^2-2n-5)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-5}}.$$

Далее разделим числитель и знаменатель полученной дроби на одно и то же число — число n — и воспользуемся тем, что

$$\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n}=\sqrt{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}=\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}};$$

$$\frac{\sqrt{n^2-2n-5}}{n}=\sqrt{\frac{n^2-2n-5}{n^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-2n-5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{6}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{6}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}\right)}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Утверждения

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}=1$$

докажите самостоятельно (предварительно разберите пример 2 из § 5, затем рассуждайте аналогично). □

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1}$.

Решение. Это выражение можно представить в виде произведения двух величин:

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\cdot\sin(n!).$$

Первая из них — бесконечно малая:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{0}{1}=0,$$

а вторая — ограниченная:

$$|\sin(n!)|\leqslant 1.$$

Следовательно, их произведение — бесконечно малая:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1}=0.$$ □

Приведем без вывода две формулы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \quad (k>0,\ a>1); \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\varepsilon}=0 \quad (\varepsilon>0,\ a>1),$$

которые необходимо принять во внимание при рассмотрении следующих примеров (примеры 6, 7).

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+n^2}{2^n+n\cdot 5^n}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на 5^n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+n^2}{2^n+n\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{n^2}{5^n}}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+n}=0,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{5^n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+n\right]=+\infty$. □

Пример 7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\lg n}{\lg(4^n+1)}$.

Решение. Преобразуем предварительно знаменатель

$$\lg(4^n+1)=\lg\left[4^n\cdot\left(1+\frac{1}{4^n}\right)\right]=n\lg 4+\lg\left(1+\frac{1}{4^n}\right),$$

после чего разделим числитель и знаменатель на n. При этом заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)=0$. Это требует доказательства (хотя интуитивно может показаться очевидным). Провести доказательство читатель сможет после того, как проработает § 19.

В итоге получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\lg n}{\lg(4^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\lg n}{n\cdot\lg 4+\lg\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{\lg n}{n}}{\lg 4+\dfrac{1}{n}\cdot\lg\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lg n}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\lg 4+\dfrac{1}{n}\cdot\lg\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)\right]}=$$

$$=\frac{1}{\lg 4+0}=\frac{1}{\lg 4}. \quad □$$

§ 11*. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса.

Последовательность (x_n) называется *монотонно возрастающей*, если для каждого номера n имеет место неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$.

Соответственно последовательность (x_n) называется *монотонно убывающей*, если для каждого номера n имеет место неравенство $x_n \geqslant x_{n+1}$.

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие последовательности имеют общее название: *монотонные последовательности.*

Если для каждого номера n имеет место *строгое* неравенство $x_n < x_{n+1}$ (или же $x_n > x_{n+1}$), последовательность (x_n) называется *строго монотонно возрастающей* (соответственно *строго монотонно убывающей*). Строго монотонно возрастающие и строго монотонно убывающие последовательности называются *строго монотонными* последовательностями.

Имеет место следующая очень важная теорема о монотонных последовательностях:

Теорема Вейерштрасса[1]**.** *Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел.*

Доказательство. Проведем доказательство существования предела ограниченной сверху монотонно возрастающей последовательности (доказательство существования предела ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности проводится аналогично).

По условию, множество значений элементов последовательности ограничено сверху. Поэтому в силу аксиомы полноты (§ 3) существует число b, которое является точной верхней границей множества X.

Докажем, что

$$b=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Согласно основному свойству точной верхней границы, существует элемент последовательности x_N такой, что

$$b-\varepsilon<x_N\leqslant b.$$

[1] *Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс* (1815–1897) — выдающийся немецкий математик. В своих лекциях Вейерштрасс построил систему логического обоснования математического анализа и впервые с достаточной строгостью рассмотрел ряд понятий математического анализа.

Так как последовательность (x_N) — монотонно возрастающая, то $x_N \leqslant x_n$ для всех номеров $n > N$. Следовательно, для всех $n > N$ имеем

$$b - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant b.$$

Таким образом, для всех номеров $n > N$ имеет место неравенство

$$|x_n - b| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

§ 12. Число e.

В этом параграфе мы приведем интересный (и очень важный для дальнейшего) пример сходящейся последовательности.

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Докажем, что эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса (§ 11) и, следовательно, сходится. Применив формулу бинома (приложение II), получаем

$$x_n = 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\,\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\,\frac{1}{n^n}.$$

Представим x_n в следующей форме:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогичным образом представим x_{n+1}:

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим, что $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ при $0 < k \leqslant n$. Поэтому каждое слагаемое с третьего по $(n+1)$-е в выражении для x_n меньше соответствующего слагаемого в выражении для x_{n+1} (первые два слагаемых одинаковы), и, кроме того, у x_{n+1} по сравнению с x_n добавляется еще одно положительное слагаемое. Следовательно, $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность (x_n) — *монотонно возрастающая.*

Теперь обратим внимание на то, что в выражении для x_n каждая из скобок вида $1 - \frac{k}{n}$ меньше единицы, и на то, что $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ (так как $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k \geqslant 2^{k-1}$). Следовательно,

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ — это сумма первых n членов геометрической прогрессии. Она равна

$$\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$2 < x_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Последовательность (x_n) — *ограничена* (как сверху, так и снизу).

Итак, последовательность (x_n) удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса (она монотонно возрастает и ограничена сверху), и, следовательно, она имеет предел. Этот предел есть число, которое принято обозначать буквой e.

Из установленных нами неравенств $2 < x_n < 3$ следует (в силу теоремы о предельном переходе в неравенствах), что число e заключено между 2 и 3. Можно доказать, что число e является иррациональным (доказательство этого мы приводить не будем). Укажем значение числа e с первыми семью десятичными знаками после запятой: $e = 2{,}7182818\ldots$.

Число e в математике играет особую роль. В частности, именно это число в особенности удобно выбирать в качестве основания для системы логарифмов (ряд формул, в которые входят логарифмы, имеют в этом случае более простой вид). Логарифмы по основанию e называются *натуральными логарифмами* и обозначаются знаком ln (т.е. $\log_e x = \ln x$).

Задачи.

Найдите пределы последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-5}{8-5n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}-1\right)$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{5}-1}$

Указание. При решении этой задачи следует принять во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a$ $(a>0)$ (см. замечание к следствию 2 теоремы 2 из § 20).

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}-1}{1+n\cdot(1,1)^n}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-\ln n}{n-3,5}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2+2)\cdot\ln\dfrac{n^2+0,2}{n^2}$

Указание. При решении этой задачи следует принять во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}=1$, если $\alpha_n\to 0$ (см. следствие 1 теоремы 2 из § 20).

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n+3)}{n-1,3}$

Ответы.

1. 0. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** 0. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{3}{2}$. **6.** $\frac{2}{3}$. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{\ln 3}{\ln 5}$. **10.** $\frac{1}{3}$.
11. 0. **12.** 5. **13.** 0,6. **14.** 0.

Глава 3.

Предел функции.

§ 13. Определение функции. Основные способы задания функции.

Напомним читателю

Определение функции. Функцией, заданной на числовом множестве X, называется соответствие, при котором каждому $x\in X$ сопоставляется некоторое единственное число y.

Это соответствие обозначают некоторым символом, например, f и пишут

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

Множество X называют *областью определения* функции. Число y_0, соответствующее элементу $x_0\in X$, обозначается символом $f(x_0)$ (пишут также $y_0=f(x_0)$) и называется *значением функции* при $x=x_0$ (или значением функции в точке x_0 числовой прямой). Множество Y, элементами которого являются числа $y=f(x)$, соответствующие всевозможным $x\in X$, называется *областью значений* функции.

Переменная величина, принимающая всевозможные значения $x\in X$ (их можно выбирать произвольно) называется *независимой переменной* (или *аргументом*) функции f, а переменная, принимающая всевозможные значения $y\in Y$ (где $y=f(x)$), называется *зависимой переменной.*

Запись $y=f(x)$ (или $f(x)$) употребляется как для обозначения значения функции, соответствующего заданному $x\in X$, так и для обозначения самой функции (наряду с символом f).

Функция f является однозначным соответствием

$$f\colon X\to Y,$$

но это соответствие далеко не всегда — взаимно однозначное. Каждому $x \in X$ соответствует единственное значение $f(x) = y \in Y$, но для $y \in Y$ может существовать несколько (или даже бесконечно много) значений x таких, что $f(x) = y$). Так, например, функция

$$f(x) = 1, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

представляет собой отображение

$$f\colon (-\infty; +\infty) \ni x \to 1 \in \{1\},$$

которое, будучи однозначным, не является взаимно однозначным. Здесь каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ сопоставлено единственное число $y = 1$. В то же время для $y = 1$ имеется бесконечно много x таких, что $f(x) = 1$ (множество таких x заполняет всю числовую прямую).

В школьном курсе освещается понятие функции и дается представление об основных способах задания функции: аналитическом, графическом и описательном.

При аналитическом способе задания функция задана формулой. При этом указана та совокупность действий, которую нужно в определенном порядке произвести над значением аргумента x, чтобы получить соответствующее значение зависимой переменной $y = f(x)$. Функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ является примером функции, заданной аналитически.

При графическом способе задания функции соответствие

$$f\colon X \ni x \to y = f(x)$$

устанавливается с помощью графика. Опишем процедуру установления соответствия в случае, когда область определения является отрезком ($X = [a; b]$), а график функции представляет собой линию AB (рис. 20). При проектировании на ось Ox линия AB отображается в отрезок $[a; b]$. Каждой точке $x \in X (= [a; b])$ соответствует единственная точка $M\,(x, f(x))$, расположенная на графике (т. е. на линии AB). Соответствие

$$f\colon [a; b] \ni x \to y = f(x)$$

— это не что иное, как движение от точки x на оси Ox к точке $y = f(x)$ на оси Oy вдоль ломаной, составленной из двух звеньев, параллельных координатным осям (стрелки на чертеже указывают направление движения).

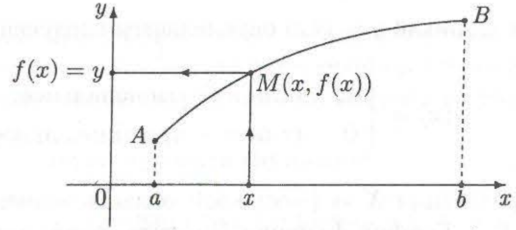


Рис. 20

При описательном способе задания функции соответствие между областью определения X и областью значений y

$$f\colon X \to Y$$

описывается словами. Приведем 2 примера:

Пример 1. Функция «сигнум x» (обозначение $y = \operatorname{sgn} x$).

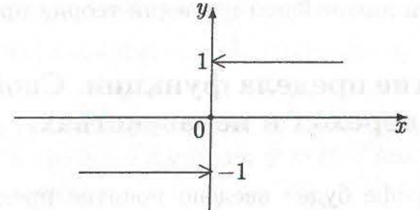
Название этой функции происходит от латинского слова signum — знак. Здесь область определения $X = (-\infty; +\infty)$, а область значений Y состоит из трех чисел: $-1, 0, 1$. Отображение

$$\operatorname{sgn} x\colon\ (-\infty; +\infty) = X \longrightarrow Y = \{-1, 0, 1\}$$

определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = \operatorname{sgn} x$ имеет следующий вид:



Пример 2. Функция Дирихле.

Этот поучительный пример был построен выдающимся немецким математиком XIX века Дирихле[1].

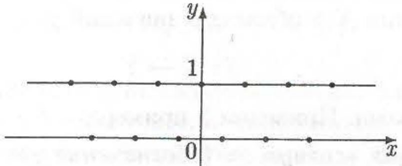
[1] Читатель, несомненно, обратил внимание на то, что немецкий математик Дирихле имел французскую фамилию.

Петер Густав Лежен-Дирихле (1805–1859) — потомок гугенотов, которые в период религиозных войн эмигрировали в Германию, спасаясь от преследований.

Функция Дирихле $y = \chi(x)$ определяется следующим образом:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Область определения $X = (-\infty; +\infty)$; область значений Y состоит из двух чисел: $0, 1$. График функции Дирихле можно схематически изобразить следующим образом:



Он не является линией и состоит из отдельных точек, часть из которых располагается на оси Ox, а часть на прямой $y = 1$ (между любыми двумя числами x_1 и x_2 содержится бесконечно много рациональных и бесконечно много иррациональных чисел). Мы видим, таким образом, что график функции не всегда является линией (возможно, в первый момент кому-то из читателей это покажется неожиданным).

Из школьного курса читатель знает об основных элементарных функциях и их свойствах (к основным элементарным функциям относят степенную, показательную, логарифмическую функции, а также тригонометрические и обратные тригонометрические функции). Эти знания будут полезны при дальнейшем изучении теории пределов.

§ 14. Понятие предела функции. Свойства предела. Предельный переход в неравенствах.

В этом параграфе будет введено понятие предела функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, где a — некоторое число. Речь пойдет о пределе, к которому стремится функция $f(x)$ в случае, когда аргумент x, непрерывно изменяясь, приближается как угодно близко к точке a. Судить об изменении значения функции $f(x)$ в ходе этого процесса можно лишь в том случае, когда точка a является *предельной точкой* области определения X, т. е. если в любой сколь угодно малой проколотой окрестности точки a (о понятии проколотой окрестности см. § 2) содержится бесконечно много точек $x \in X$ (сама точка a может не принадлежать области

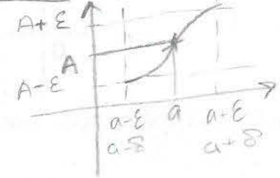
определения X). В простейшем случае можно предполагать, что функция $f(x)$ определена во всех точках некоторой проколотой окрестности точки a. Этот простейший случай мы и будем рассматривать.

14.1. Определение предела функции.

Дадим теперь определение предела функции в точных терминах.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a (в самой точке a функция $f(x)$ не обязательно имеет смысл). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε существует число $\delta > 0$ (выбор δ зависит от ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$) такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки a (т. е. таких, что $|x - a| < \delta$, $x \neq a$) имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$



или, что абсолютно то же,

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

$a-\delta < x < a+\delta$

Если число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, то символически это записывается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Используя логические символы, можно записать определение предела функции следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \text{такое, что}$$
$$\forall x \{|x - a| < \delta \text{ и } x \neq a\} : \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл определения предела функции можно выяснить, обратившись к графику функции $y = f(x)$ (см. рис. 21).

Выполнение неравенства

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

для всех x из проколотой δ-окрестности точки a означает, что точки графика функции для всех $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ находятся в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Какой бы узкой мы ни взяли эту полосу (т. е. каким бы малым мы бы ни выбрали $\varepsilon > 0$), всегда найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, в которой график функции не выйдет за пределы полосы.

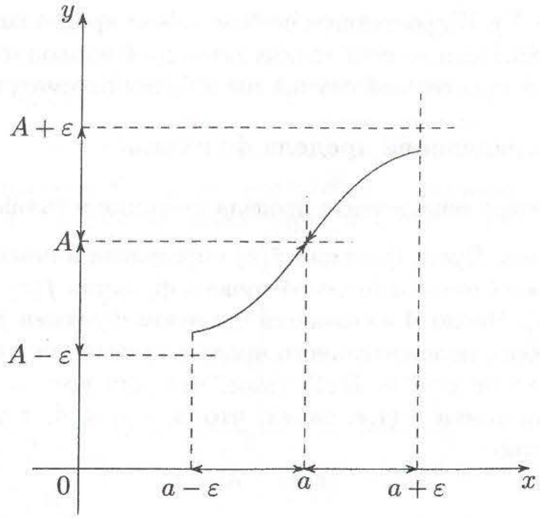


Рис. 21.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

Решение. Согласно определению предела, мы должны доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки $x = 3$ будет иметь место неравенство

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

или, что абсолютно то же, что

$$|x + 3| \cdot |x - 3| < \varepsilon.$$

Нам будет существенно легче найти $\delta = \delta(\varepsilon)$, если предварительно мы наложим ограничение на размер δ-окрестности. Условимся, например, выбирать δ таким, что $\delta < 1$. В этом случае δ-окрестность точки $x = 3$ будет располагаться внутри отрезка $[2; 4]$ (рис. 22).

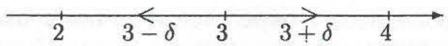


Рис. 22

Тогда $|x + 3| < 7$ и, следовательно,

$$|x^2 - 9| = |x + 3| \cdot |x - 3| < 7|x - 3|.$$

Теперь мы видим, что заданному $\varepsilon > 0$ соответствует любое δ такое, что $\delta < \frac{\varepsilon}{7}$ и $\delta < 1$. В частности, если $\varepsilon = 0{,}01$, мы можем взять любое δ такое, что $\delta < \frac{1}{700}$ (например, $\delta = 0{,}001$), поскольку в этом случае $\frac{\varepsilon}{7} < 1$. Если же $\varepsilon > 7$ (например, $\varepsilon = 10$), то $\frac{\varepsilon}{7} > 1$ и можно взять любое $\delta < 1$ (например, $\delta = 0{,}95$). □

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$.

Решение. В предыдущем параграфе мы рассматривали функцию $y = \operatorname{sgn} x$ (пример 1 из § 13). Теперь рассмотрим функцию $y = (\operatorname{sgn} x)^2$. Ее можно записать так:

$$(\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 23.

Равенство $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$ очевидно, так как для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|(\operatorname{sgn} x)^2 - 1| < \varepsilon$$

имеет место в любой проколотой окрестности нуля, ибо для любого $x \neq 0$

$$|(\operatorname{sgn} x)^2 - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Обращаем внимание читателя на то, что предел нашей функции при $x \to 0$ существует, но не равен значению функции при $x = 0$. □

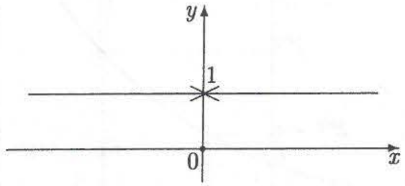


Рис. 23

В следующем примере речь пойдет о пределе показательной функции a^x $(a > 0)$. В школьном курсе перечислены основные свойства этой функции. Отмечено, в частности, что

1) областью определения функции $y = a^x$ $(a > 0)$ является вся числовая прямая $(-\infty < x < +\infty)$;

2) областью значений функции $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ является множество всех положительных действительных чисел $(0 < y < +\infty)$;

3) функция a^x $(a > 0, a \neq 1)$ строго монотонно возрастает, если $a > 1$, и строго монотонно убывает, если $a < 1$.

Вместе с тем понятие степени a^x (где $a > 0$) в случае, когда x — иррациональное, в школьных учебниках, как правило, отсутствует. Читатель может восполнить этот пробел, обратившись к следующим пособиям:

1. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. «Лекции и задачи по элементарной математике.» — М.: Наука, 1971.

2. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. «Задачи по математике. Алгебра (Справочное пособие).» — М.: Наука, 1987.

Пример 3. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} 2^x = 2^{x_0}$, где x_0 — произвольное действительное число.

Решение. Отметим, что функция $y = 2^x$ определена на всей оси Ox $(-\infty < x < +\infty)$, область значений — положительная полуось оси Oy $(0 < y < +\infty)$, функция $y = 2^x$ — строго монотонно возрастающая на всей области определения, $2^0 = 1$ (см. рис. 24).

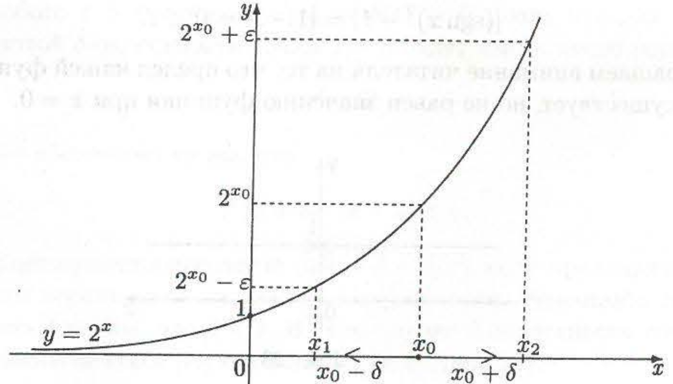


Рис. 24

Так как функция $y = 2^x$ принимает все значения от 0 до $+\infty$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют x_1 и x_2 такие, что

$$2^{x_1} = 2^{x_0} - \varepsilon, \qquad 2^{x_2} = 2^{x_0} + \varepsilon.$$

Поскольку $2^{x_1} < 2^{x_2}$, а функция — строго монотонно возрастающая, то

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

Всегда можно выбрать $\delta > 0$ такое, что $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (x_1; x_2)$, и в силу строгой монотонности для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ имеют место неравенства

$$2^{x_0} - \varepsilon = 2^{x_1} < 2^x < 2^{x_2} = 2^{x_0} + \varepsilon,$$

т.е. $|2^x - 2^{x_0}| < \varepsilon$ (это неравенство имеет место не только для всех точек из проколотой δ-окрестности, но и для $x = x_0$).

Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} 2^x = 2^{x_0}$. □

Пример 4. Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$, где $x_0 > 0$ — произвольное положительное число.

Предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно по аналогии с предыдущим примером, так как функция $y = \ln x$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ и строго монотонно возрастает всюду в области определения $(0 < x < +\infty)$. График функции $y = \ln x$ изображен на рис. 25.

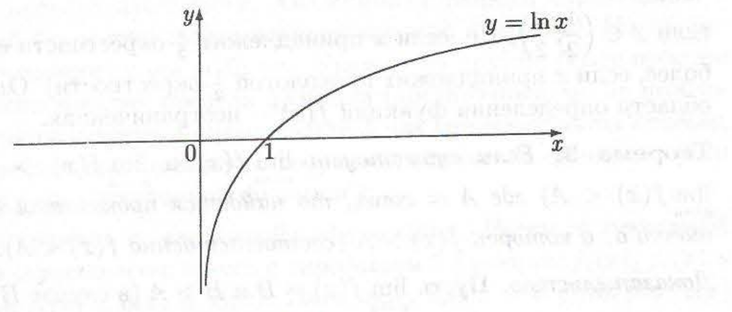


Рис. 25

14.2. Свойства предела.

Предел функции обладает теми же свойствами, что и предел последовательности. Для него справедливы теоремы 1–4 (точные формулировки которых мы приведем ниже), аналогичные теоремам 1, 2, 3 из § 5 и теоремам 1, 2 из § 6. Доказательства теорем 1–4, по существу, ничем на отличаются от доказательств соответствующих теорем о пределах последовательностей. Читатель убедится в этом, ознакомившись с доказательствами теорем 2 и 3 (теоремы 1 и 4 приводятся без доказательства — предлагаем читателю доказать их самостоятельно).

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *существует, то он — единственный.*

Теорема 2. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то функция* $f(x)$ *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* a.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Возьмем произвольное фиксированное число $\varepsilon > 0$; например, $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела функции, для любого $\varepsilon > 0$, в частности, для $\varepsilon = 1$, существует проколотая δ-окрестность точки a, в которой

$$A - 1 < f(x) < A + 1. \quad \square$$

Замечание. Для последовательности, имеющей предел при $n \to \infty$, все множество значений элементов последовательности ограничено. Однако, для функции, имеющей предел при $x \to a$, ограниченность имеет место лишь в некоторой проколотой окрестности точки a, в то время как вся область значений функции может оказаться неограниченной. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 1$ стремится к единице. Очевидно, что

$$\frac{2}{3} < f(x) < 2,$$

если $x \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, т.е. если x принадлежит $\frac{1}{2}$-окрестности единицы (тем более, если x принадлежит проколотой $\frac{1}{2}$-окрестности). Однако на *всей* области определения функция $f(x)$ — неограниченная.

Теорема 3. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > A$ (*или же* $\lim\limits_{x\to a} f(x) < A$) *где* $A = \text{const}$, *то найдется проколотая окрестность точки* a, *в которой* $f(x) > A$ (*соответственно* $f(x) < A$).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ и $B > A$ (в случае $B < A$ доказательство проводится аналогично). Рассмотрим точки A и B на числовой прямой, отличной от оси Ox (например, на оси Oy). Очевидно, что B лежит справа от A (как всегда, наблюдатель располагается таким образом, что для него числовая прямая горизонтальна и положительное направление идет слева направо).

Возьмем число $\varepsilon > 0$. При этом выберем его таким образом, чтобы вся ε-окрестность точки B располагалась справа от A (следовательно, $\varepsilon < B - A$) (см. рис. 26).

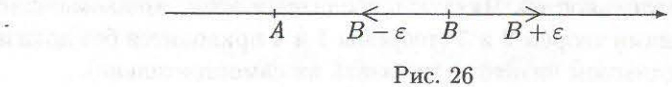


Рис. 26

Согласно определению предела функции, для выбранного нами $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки a имеем

$$B - \varepsilon < f(x) < B + \varepsilon$$

и, так как $B - \varepsilon > A$, то $f(x) > A$. $\square$

Теорема 4 (о предельном переходе в неравенствах). *Пусть существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *и в некоторой проколотой окрестности точки* a *имеет место неравенство* $f(x) < g(x)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

§15. Оценочный признак существования предела (теорема о «зажатой» функции).

Выше (см. теорему 4 из §5) мы привели формулировку критерия сходимости последовательности. Аналогичная теорема справедлива и для функций (критерий существования предела функции). Но приводить ее формулировку мы не будем. Укажем на другой, более простой признак существования предела функции (достаточный, но не необходимый) — так называемый *оценочный признак существования предела*, который известен под названием “теорема о «зажатой» функции” (или же “теорема о промежуточной функции”):

Теорема (теорема о «зажатой» функции). *Пусть в некоторой проколотой окрестности точки* a *определены* 3 *функции:* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *и* $g(x)$, *причем* $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$. *Тогда, если при* $x \to a$ *функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *стремятся к общему пределу* A:

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A,$$

то функция $g(x)$ *стремится при* $x \to a$ *к тому же пределу:*

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

Доказательство. По условию теоремы,

$$A = \lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует проколотая δ_1-окрестность точки a, в которой

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

и проколотая δ_2-окрестность точки a, в которой

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

Всегда можно выбрать проколотую δ-окрестность точки a, в которой $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$, и притом такую, что $\delta < \delta_1, \delta_2$. Очевидно, что в такой δ-окрестности

$$A - \varepsilon < f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) < A + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$|g(x) - A| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $A = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. □

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Решение. Доказательство проведем в 2 этапа.

1) Сначала докажем, что при всех x справедливо неравенство

$$\sin^2 x \leqslant x^2.$$

С этой целью в круге радиуса R с центром в точке O рассмотрим *острый* центральный угол $\angle AOB$ (рис. 27).

Пусть x — радианная мера $\angle AOB$. Так как угол острый, то $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Очевидно, что $S_{\triangle OAB}$ (площадь треугольника OAB) меньше, чем $S_{\text{сект.}\,OAB}$ (площадь сектора). Так как $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \sin x$; $S_{\text{сект.}\,OAB} = \dfrac{1}{2}x \cdot R^2$, то мы имеем

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x,$$

откуда

$$\sin x < x.$$

Это неравенство получено нами при условии, что $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (т.к. $\angle AOB$ — острый). В этом случае $\sin x > 0$, $x > 0$, и следствием нашего неравенства является неравенство

$$\sin^2 x \leqslant x^2,$$

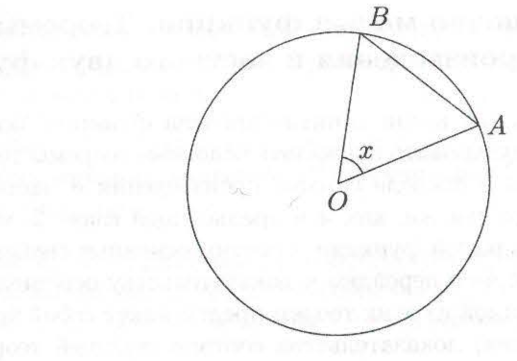


Рис. 27.

которое в силу четности функций $\sin^2 x$ и x^2 справедливо уже как при положительных, так и при отрицательных x таких, что $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

А так как $|\sin x|$ не превосходит 1 и при $x = 0$ функции $\sin^2 x$ и x^2 принимают одно и то же значение 0, то абсолютно при любом x

$$\sin^2 x \leqslant x^2.$$

2) Заметим, что

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

Теперь можно применить теорему о «зажатой» функции. Мы видим, что функция $1 - \cos x$ «зажата» между двумя функциями: $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}$, каждая из которых стремится к нулю при $x \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0.$$

Поскольку

$$\cos x = 1 + (\cos x - 1),$$

а $\cos x - 1$ является бесконечно малой функцией при $x \to 0$, то очевидно, что

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \quad □$$

§ 16. Бесконечно малые функции. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций.

После того, как мы ввели понятие предела функции, ближайшая наша цель — сформулировать и доказать основные теоремы теории пределов, т. е. теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций. Для этого так же, как и в предыдущей главе 2, мы введем понятие бесконечно малой функции, отметим основные свойства бесконечно малых, после чего перейдем к доказательству основных теорем. Доказательство каждой из этих теорем представляет собой повторение (почти без изменения) доказательства соответствующей теоремы для последовательностей.

16.1. Бесконечно малые функции.

Начнем с определения понятия бесконечно малой функции.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$, если она удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Это означает, что для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки a имеет место неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Следующие два утверждения равносильны:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

2) функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.

Действительно, и первое утверждение ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$), и второе утверждение (которое можно записать в виде $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$) означают (на «языке ε») одно и то же.

Отметим основные свойства бесконечно малых функций, аналогичные свойствам бесконечно малых последовательностей (см. § 8). Сформулируем их в форме двух теорем (предлагаем читателю доказать эти теоремы самостоятельно) и их следствий:

Теорема 1. *Если две функции, $f(x)$ и $g(x)$, являются бесконечно малыми при $x \to a$, то их сумма и разность $f(x) \pm g(x)$ также являются бесконечно малыми при $x \to a$.*

Следствие. *Алгебраическая сумма любого конечного числа функций, каждая из которых является бесконечно малой при $x \to a$, есть бесконечно малая при $x \to a$.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, а $g(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.*

Следствия:

а) *Если $g(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, то функция $c \cdot g(x)$* (где $c = \mathrm{const}$) *есть бесконечно малая при $x \to a$.*

б) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.*

16.2. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного.

Справедливы теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций (аналогичные соответствующим теоремам для последовательностей).

Теорема 3. *Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то существуют также $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x))$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x))$, причем*

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 4. *Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и при этом*

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0,$$

то существует также $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно доказать обе теоремы. Доказательства этих теорем идентичны доказательствам соответствующих теорем для последовательностей. В процессе доказательства теоремы 4 используется

Лемма. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *и при этом* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то найдется проколотая окрестность точки* a, *в которой функция* $\dfrac{1}{g(x)}$ *существует и ограничена.*

§ 17. Бесконечно большие функции.

Понятие функции, бесконечно большой при $x \to a$, вводится следующим образом:

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to a$, если для любого положительного числа A (как бы велико оно ни было) существует проколотая δ-окрестность точки a такая, что для всех x из этой проколотой δ-окрестности имеет место неравенство

$$|f(x)| > A.$$

Если $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$ функция, то символически это записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{или} \qquad f(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Используя логические символы, определение бесконечно большой (при $x \to a$) функции можно записать так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{def}{\iff} \forall A > 0\ \exists \delta = \delta(A) > 0 \quad \text{такое, что}$$
$$\forall x\ \{|x - a| < \delta,\ x \neq a\}: \quad |f(x)| > A.$$

Заметим, что из определения бесконечно большой (при $x \to a$) функции следует, что существует проколотая окрестность точки a, в которой $f(x) \neq 0$, и, следовательно, функция $\dfrac{1}{f(x)}$ существует.

Очевидно, что *если функция* $y = f(x)$ *имеет бесконечный предел при* $x \to a$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *не существует* (вспомните аналогичное утверждение о бесконечно большой последовательности из § 7).

Замечание. Если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \to a$ и существует проколотая окрестность точки a, в которой $f(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$. Если же функция $f(x)$

бесконечно большая при $x \to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$.

Читатель, внимательно и осмысленно прочитавший определения бесконечно малой и бесконечно большой функции, в состоянии самостоятельно доказать оба эти утверждения.

Если бесконечно большая (при $x \to a$) функция $y = f(x)$ положительна (или отрицательна) в некоторой проколотой окрестности точки a, то она называется *положительной бесконечно большой* (соответственно *отрицательной бесконечно большой*) при $x \to a$. Для положительных бесконечно больших (при $x \to a$) функций принята запись

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Соответственно для отрицательных бесконечно больших (при $x \to a$) функций пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

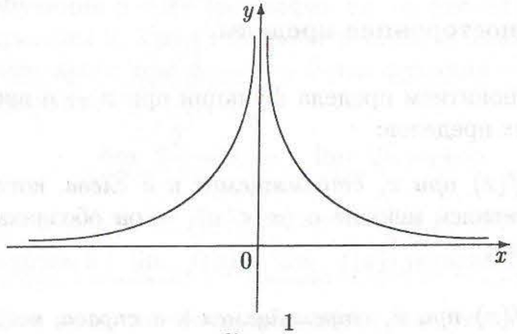
Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$;

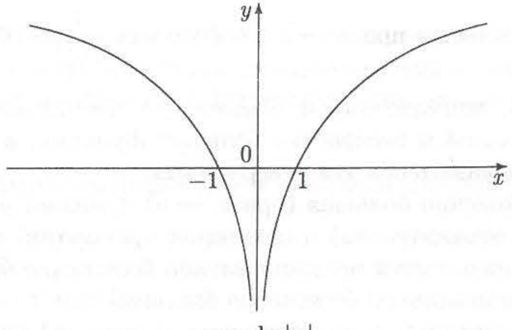
3) про функцию $y = \dfrac{1}{x}$ можно сказать, что она является бесконечно большой при $x \to 0$; вместе с тем она не является ни положительной бесконечно большой, ни отрицательной бесконечно большой.

Графики функций $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \ln|x|$, $y = \dfrac{1}{x}$ см. на рис. 28, рис. 29, рис. 30 соответственно.



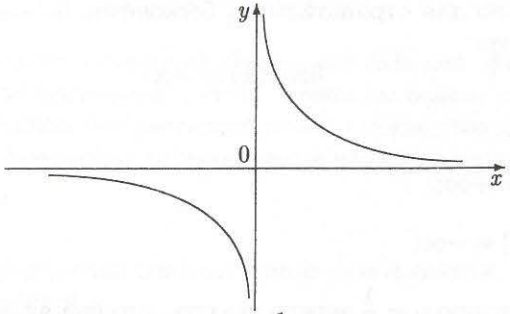
$y = \dfrac{1}{x^2}$

Рис. 28



$y = \ln|x|$

Рис. 29



$y = \dfrac{1}{x}$

Рис. 30

§ 18. Расширение понятия предела.

18.1. Односторонние пределы.

Наряду с понятием предела функции при $x \to a$ вводятся понятия односторонних пределов:

1) *предел $f(x)$ при x, стремящемся к a слева*, когда x стремится к a, оставаясь меньше a ($x < a$), — он обозначается символом $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$;

2) *предел $f(x)$ при x, стремящемся к a справа*, когда x стремится к a, оставаясь больше a ($x > a$), — он обозначается символом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

Односторонние пределы называют также *левым и правым пределами функции $f(x)$ в точке a.*

Дадим теперь односторонним пределам точное

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой левой (или же правой) полуокрестности точки a. Число A называется левым (соответственно правым) пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует левая (соответственно правая) δ-полуокрестность ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$) точки a, для всех точек которой имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

или, что абсолютно то же,

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Используя логические символы, можно записать это определение следующим образом:

$$1)\quad \lim_{x\to a-0} f(x) = A \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{такое, что} \quad \forall x\,\{a - \delta < x < a\}: \quad |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$2)\quad \lim_{x\to a+0} f(x) = A \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{такое, что} \quad \forall x\,\{a < x < a + \delta\}: \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теоремы о пределах остаются в силе и для односторонних пределов.

Пример 1. Читатель, усвоивший определение односторонних пределов, может легко убедиться в существовании односторонних пределов функции $y = \operatorname{sgn} x$ (пример 1 из § 13)

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1; \qquad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Пример 2. Функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (ее график см. на рис. 31), как мы увидим ниже (см. примеры 2, 3 из § 19), имеет в точке 0 только левый предел, который равен нулю; при $x \to 0 + 0$ эта функция — положительная бесконечно большая

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0; \qquad \lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Связь между пределом $f(x)$ при $x \to a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)$) и односторонними пределами в точке a ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) устанавливает следующая

Теорема. *Для того, чтобы существовал $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела и чтобы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.*

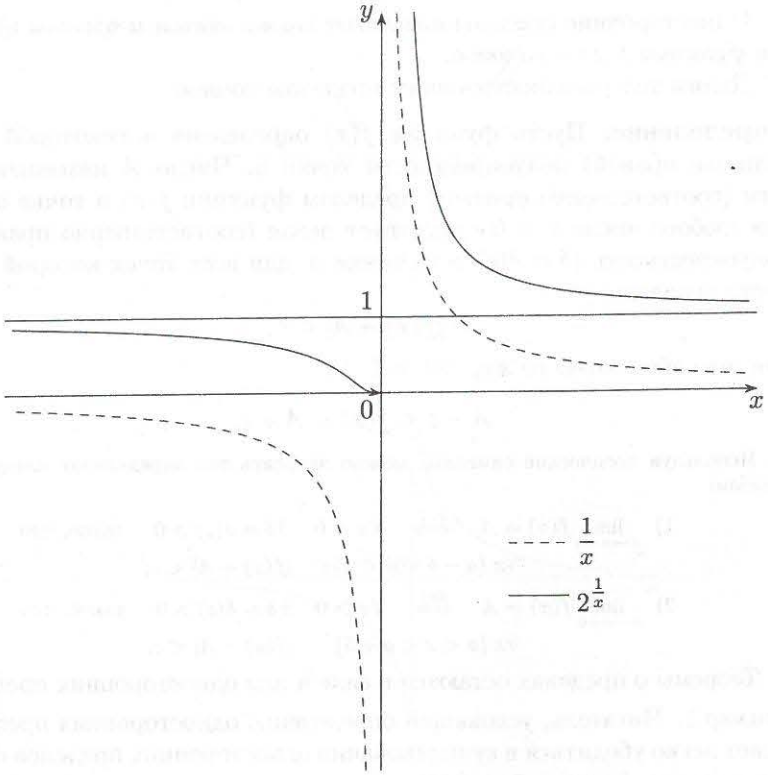


Рис. 31.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему. Ему предстоит доказать 2 утверждения:

1) Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Требуется доказать, что

$$A = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

2) Пусть дано $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$. Требуется доказать, что $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 3. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует, так как $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x \neq$ $\neq \lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x$ (см. пример 1).

18.2. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Кроме рассмотренных понятий предела функции при $x \to a$ и односторонних пределов, вводятся понятия предела функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. При этом определение предела отличается от определения понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где a — число, только тем, что вместо существования проколотой окрестности точки a, соответствующей произвольному $\varepsilon > 0$, говорится о существовании окрестности символа ∞ ($+\infty$ или $-\infty$), соответствующей произвольному $\varepsilon > 0$ (о понятии окрестности символа бесконечности см. § 2).

Например, утверждение

$$\lim_{x\to\infty} = A$$

означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует окрестность символа ∞ (т.е. существует множество $(-\infty; \Delta) \cup (\Delta; +\infty)$, где $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$) такая, что для всех x из этой окрестности (т.е. для всех x таких, что $|x| > \Delta$) имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

или, что абсолютно то же

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Теоремы о пределах остаются в силе и для пределов при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Пример 4. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$.

Решение. Согласно определению предела при $x \to \infty$, нам требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x таких, что $|x| > \Delta$, имеет место неравенство $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$, т.е. что $\dfrac{1}{|x+1|} < \varepsilon$.

Нера́венство $\dfrac{1}{|x+1|} < \varepsilon$ равносильно совокупности неравенств:

1) $x > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

или

2) $x < -\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = -\left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right)$.

В качестве $\Delta(\varepsilon)$ можно взять любое число, которое больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}+1$. Если $|x| > \Delta > \frac{1}{\varepsilon}+1$, то $\left|\frac{x}{x+1}-1\right| = \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon$. Для любого $\varepsilon > 0$ такое $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ существует. Это означает, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1. \quad \square$$

Приведем еще два примера:

Пример 5. Докажите, что $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$.

Пример 6. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эти два утверждения, используя свойства функции $y = 2^x$ (обратите внимание на ее график (см. рис. 24)), в частности, строгую монотонность.

§ 19. Замена переменной при вычислении предела.

Функция $F(y)$, где $y = f(x)$, т.е. функция вида $F(f(x))$ называется *сложной функцией*. Наряду с термином «сложная функция» употребляется равнозначный термин «суперпозиция функций» (иногда говорят «комбинация функций»).

Возникает естественный вопрос: имеем ли мы право при вычислении предела сложной функции $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))$ в случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и существует $\lim\limits_{x\to b} F(y)$, производить замену $y = f(x)$ и писать

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y)?$$

На первый взгляд может показаться, что такая замена переменной возможна всегда. Однако, в общем случае это утверждение неверно. Приведем пример. Пусть

$$F(y)=\begin{cases}1 & \text{при } y=0,\\ 0 & \text{при всех } y\neq 0;\end{cases}$$

$$f(x)=0 \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y\to 0} F(y) = 0$. Сложная функция $F(f(x)) = 1$ при всех x и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} F(f(x)) = 1$. Мы видим, что

$$\lim_{x\to 0} F(f(x)) \neq \lim_{y\to 0} F(y),$$

т.е. в данном случае замена $y = f(x)$ при вычислении предела сложной функции недопустима.

Вместе с тем при некоторых дополнительных условиях производить замену переменной при вычислении предела можно. Справедливы следующие 2 теоремы (мы приводим их без доказательства):

Теорема 1 (первая теорема о пределе сложной функции). *Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (где a — число или символ бесконечности), и функция $F(y)$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{y\to b} F(y) = F(b),$$

то существует $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))$, причем

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y) = F(b).$$

Замечание. Заметим, что в случае, когда выполнены условия теоремы 1, мы имеем право писать

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = F\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Теорема 2 (вторая теорема о пределе сложной функции). *Пусть*

1) *существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (a — число или символ бесконечности);*

2) *существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{y\to b} F(y)$;*

3) *для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a (если $a = \infty, +\infty, -\infty$, то из некоторой окрестности соответствующего символа бесконечности)*

$$f(x) \neq b.$$

Тогда существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))$, причем

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y).$$

В следующих примерах 1, 2, 3 рассматривается задача вычисления предела функции $2^{\frac{1}{x}}$ (см. рис. 31) при $x\to\infty$, $x\to 0-0$, $x\to 0+0$. Функция $2^{\frac{1}{x}}$ — это сложная функция вида 2^y (см. рис. 24), где $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 30).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{y\to 0}2^y=2^0=1$ (см. пример 3 из § 14), и выполнены условия теоремы 1. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}2^y=2^0=1. \quad \square$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{y\to-\infty}2^y=0$ (см. пример 5 из § 18), и выполнены условия теоремы 2. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to-\infty}2^y=0. \quad \square$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty}2^y=+\infty$, и выполнены условия теоремы 2. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}2^y=+\infty. \quad \square$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Решение. Положим $x=t^{12}$ ($t=\sqrt[12]{x}$ и $t\to 1$ при $x\to 1$). Такая замена предпринята с целью избавиться от радикалов. Мы надеемся таким путем свести задачу к вычислению более простого предела.

Итак,

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{t^4-1}{t^3-1}.$$

При $t\neq 1$ имеем

$$\frac{t^4-1}{t^3-1}=\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{t\to 1}(t+1)(t^2+1)}{\lim\limits_{t\to 1}(t^2+t+1)}=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}. \quad \square$$

§ 20. Два замечательных предела.

В этом параграфе мы рассмотрим два предела, имеющие важное значение для дальнейшего (их принято называть *замечательными пределами*). Мы установим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{(первый замечательный предел)},$$

и отметим, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \text{(второй замечательный предел)}.$$

20.1. Первый замечательный предел.

Справедлива

Теорема 1. *Функция* $\dfrac{\sin x}{x}$ *имеет предел при* $x\to 0$, *причем*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. В круге радиуса R с центром в точке O рассмотрим *острый* центральный угол $\angle AOB$ (вспомните пример из § 15), имеющий радианную меру x (т.к. угол острый, то $0<x<\frac{\pi}{2}$). Проведем хорду AB и касательную к окружности в точке A. Она перпендикулярна радиусу OA и пересекается с продолжением радиуса OB в точке C (рис. 32). Очевидно, что

$$S_{\triangle OAB}<S_{\text{сект. } OAB}<S_{\triangle OAC}.$$

Так как $S_{\triangle OAB}=\dfrac{R^2}{2}\sin x$; $S_{\text{сект. } OAB}=\dfrac{R^2}{2}x$; $S_{\triangle OAC}=\dfrac{R^2}{2}\operatorname{tg} x$, то

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{R^2}{2}x<\frac{R^2}{2}\operatorname{tg} x.$$

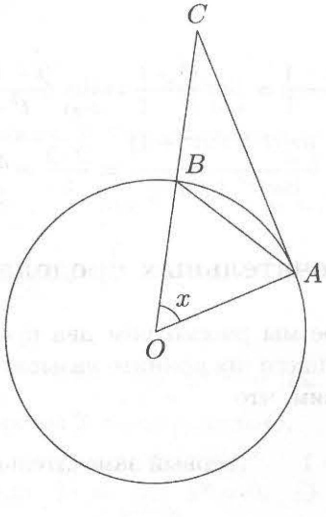


Рис. 32.

Умножив все члены этого двойного неравенства на положительную величину $\dfrac{2}{R^2\sin x}$ ($\sin x > 0$, поскольку $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$), получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Заменяя эти величины им обратными, будем иметь

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ввиду четности функций $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ полученные неравенства справедливы как для положительных, так и для отрицательных x таких, что $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (см. пример из § 15), то в силу теоремы о «зажатой» функции (см. § 15) имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

что и требовалось доказать. □

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\cdot\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x} = 1$ в силу второй теоремы о пределе сложной функции (§ 19).

Возможно также введение новой переменной $5x = t$. Тогда $x = \dfrac{t}{5}$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{t\to 0} 5\cdot\frac{\sin t}{t} = 5. \quad \square$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Здесь мы имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$, но от нее можно избавиться, представив функцию следующим образом

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{\cos x}.$$

Теперь можно применить теорему о пределе частного, так как существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1 \neq 0$ (пример из § 15):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Положим $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$. Заметим, что $y \to 0$ при $x \to 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

Замечание. Аналогичным образом, принимая во внимание, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

(см. пример 2), можно установить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ в силу второй теоремы о пределе сложной функции (возможна замена $\frac{x}{2}=t$) и первого замечательного предела. □

20.2. Второй замечательный предел.

Имеет место

Теорема 2. *Функция* $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *имеет предел при* $x\to 0$, *причем*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Мы приводим эту теорему без доказательства. Ранее (в § 12) была доказана справедливость этого соотношения в случае $x=\dfrac{1}{n}$, где $n=1,2,\ldots$.

Следствие 1. *Справедливо соотношение* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Доказательство. Положим $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ и примем во внимание, что $\lim\limits_{y\to e}\ln y=\ln e=1$ (см. пример 4 из § 14). Теперь можно вычислить искомый предел, используя первую теорему о пределе сложной функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to e}\ln y=\ln e=1.\quad □$$

Следствие 2. *Справедливо соотношение* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Доказательство. Положим $e^x-1=y$. Тогда $x=\ln(1+y)$. Заметим, что $y\to 0$ при $x\to 0$. Итак, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1\quad \text{в силу следствия 1.}\quad □$$

Замечание. Это соотношение является частным случаем более общего соотношения

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad (a>0),$$

которое нетрудно установить, если заметить, что

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a\qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

и сделать замену $x\ln a=t$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Решение. Здесь неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Избавиться от неопределенности можно, принимая во внимание первый замечательный предел и следствие 1 из второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]}{\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left[1+\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]}{\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]}{\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=-\frac{1}{2}.\quad □$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Решение. Здесь мы снова имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Избавиться от неопределенности можно, принимая во внимание первый замечательный предел и следствие 2 из второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.\ \square$$

§ 21*. Вычисление пределов степенно-показательных функций.

Рассмотрим задачу вычисления предела степенно-показательной функции $y=[u(x)]^{v(x)}$ $(u(x)>0)$.

В выражении $[u(x)]^{v(x)}$ можно перейти к постоянному основанию, например, e. Очевидно, что $u(x)=e^{\ln u(x)}$ (вспомните определение логарифма) и, следовательно,

$$[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}.$$

Если существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a}v(x)\cdot\ln u(x)$, то для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$ можно применить первую или вторую теорему о пределе сложной функции.

В случае, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$ $(A>0)$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$, имеем (в силу первой теоремы о пределе сложной функции):

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=A^B=\left(\lim_{x\to a}u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}.$$

В случае, когда $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=+\infty$ (или $\lim\limits_{x\to a}v(x)=$ $=-\infty$), вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ также не вызывает затруднений.

Затруднения могут возникнуть в тех случаях, когда в произведении $v(x)\cdot\ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x\to a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией. Такое возможно в трех случаях:

а) $\lim\limits_{x\to a}v(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a}u(x)=+\infty;$

б) $\lim\limits_{x\to a}v(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a}u(x)=0;$

в) $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a}u(x)=1.$

В этих случаях принято говорить, что выражение $[u(x)]^{v(x)}$ представляет собой *неопределенность типа* ∞^0, 0^0, 1^∞ соответственно.

Если u^v представляет собой неопределенность типа 1^∞, возможен переход к новому основанию, стремящемуся к e при $x\to a$. В самом деле, поскольку $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$, функция $u(x)$ имеет вид

$$u(x)=1+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, и выражение u^v можно преобразовать следующим образом:

$$u^v=(1+\alpha)^v=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{v\cdot\alpha}.$$

Теперь можно приступить к вычислению предела $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$. В частности, если существует $\lim\limits_{x\to a}(v(x)\cdot\alpha(x))$, то

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\lim_{x\to a}\left[1+\alpha(x)^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{v(x)\cdot\alpha(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\cdot\alpha(x))}.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.\ \square$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2)=+\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=0.\ \square$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$. Имеем неопределенность типа 1^∞. Осуществим переход к новому основанию, стремящемуся к e (произведя указанное выше преобразование). Итак, имеем (заметим, что $\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$, т.е. $\alpha(x)=\dfrac{-2}{x+1}$, и что $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{x+1}=0$):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.\ \square$$

§ 22. Примеры вычисления пределов функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$ (неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Решение. Можно избавиться от неопределенности, разделив числитель и знаменатель на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{1-\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0.\ \square$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2+\sqrt{x^4+2x^2+3}}$ (неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Решение. От неопределенности можно избавиться, разделив числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2+\sqrt{x^4+2x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}\right)}=\frac{3}{1}=3.\ \square$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$ (неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\to 1$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln\left[x^{10}\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x^{10}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|x|+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln|x|\left[2+\dfrac{1}{\ln|x|}\cdot\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln|x|\left[10+\dfrac{1}{\ln|x|}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)\right]}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{\ln|x|}\cdot\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(10+\dfrac{1}{\ln|x|}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}\right)\right)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.\ \square$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$ (неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. В числителе и знаменателе дроби $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$ стоят многочлены, которые обращаются в нуль при $x=-1$. Следовательно, каждый из этих многочленов содержит множитель $x+1$. Дробь представляет собой неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ при $x\to-1$. От неопределенности можно избавиться, выделив в числителе и знаменателе указанный множитель и затем сократив на него дробь:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to-1}(x-2)}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}.\ \square$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$ (неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, — сумму $\sqrt{x+3}+2$, мы избавимся от радикалов в знаменателе. После этого наше выражение предстанет в виде дроби, в числителе и знаменателе которой содержится общий множитель $x-1$, стремящийся к нулю при $x \to 1$. После сокращения на $x-1$ мы избавимся от неопределенности:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left((x^2+x+1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)\cdot\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+2)=3\cdot4=12.\ \square$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{99}-1}{x^{61}-1}$ (неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. Положим $x-1=t$ (следовательно, $x=1+t$). Заметим, что $t\to0$ при $x\to1$. Принимая во внимание формулу бинома (см. приложение II), мы можем представить числитель и знаменатель следующим образом:

$$x^{99}-1=(1+t)^{99}-1=1+99t+t(\text{б. м.})_1-1=t(99+(\text{б. м.})_1);$$
$$x^{61}-1=(1+t)^{61}-1=1+61t+t(\text{б. м.})_2-1=t(61+(\text{б. м.})_2),$$

если использовать менее формальную, но более наглядную форму записи, при которой символ (б. м.) обозначает бесконечно малую (конкретное выражение величины, обозначенной символом (б. м.), при вычислении предела не имеет значения).

Таким образом,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{99}-1}{x^{61}-1}=\lim_{t\to0}\frac{t(99+(\text{б. м.})_1)}{t(61+(\text{б. м.})_2)}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{99+(\text{б. м.})_1}{61+(\text{б. м.})_2}=\frac{\lim\limits_{t\to0}(99+(\text{б. м.})_1)}{\lim\limits_{t\to0}(61+(\text{б. м.})_2)}=\frac{99}{61}.\ \square$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$ (неопределенность типа $\infty-\infty$).

Решение. Умножив и разделив это выражение на неполный квадрат разности чисел x и $\sqrt[3]{1-x^3}$, т.е. на $x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2$, мы

избавимся от неопределенности

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\left[x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2\right]}{x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^3}{x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=0.$$

В результате преобразований мы пришли к выражению, где в числителе стоит единица, а в знаменателе — сумма трех слагаемых: x^2; $-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}$; $\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$, каждое из которых стремится к $+\infty$ при $x\to+\infty$. $\square$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos3x}$ (неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. От неопределенности можно избавиться, умножив числитель и знаменатель на $1+\sqrt{\cos x}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos3x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})\,(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\cos3x)\,(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos3x)\,(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{3x}{2}\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\dfrac{x^2}{4}}{\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{9x^2}{4}\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2\cdot9\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2\cdot9\cdot(1+\sqrt{\cos x})\right]}=\frac{1}{1\cdot9\cdot2}=\frac{1}{18}.\ \square$$

Пример 9. Найти
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)\right)$$
(неопределенность типа $\infty\cdot 0$).

Решение. Положим $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x=y$ ($y\to 0$ при $x\to+\infty$). Тогда
$$\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-y$$
и, следовательно,
$$x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\operatorname{ctg}y=\frac{1}{\operatorname{tg}y}.$$

Таким образом,
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}y}=1$$
(см. пример 2 из §20). $\square$

Пример 10. Найти
$$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)$$
(неопределенность типа $\infty\cdot 0$).

Решение. Используем следствие 1 из второго замечательного предела (§20):
$$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3(x+1)}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3(x+1)}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}=3\cdot 1=3.\ \square$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$ (неопределенность типа $\frac{0}{0}$).

Решение. Положим $x-2=y$ (заметим, что $y\to 0$ при $x\to 2$).

В дальнейшем используем замечание к следствию 2 из второго замечательного предела (§20):
$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=\lim_{y\to 0}\frac{2^{y+2}-(2+y)^2}{y}=\lim_{y\to 0}4\cdot\frac{2^y-\left(1+\frac{y}{2}\right)^2}{y}=$$
$$=4\lim_{y\to 0}\frac{(2^y-1)-y-\frac{1}{4}y^2}{y}=4\lim_{y\to 0}\left(\frac{2^y-1}{y}-1-\frac{1}{4}y\right)=$$
$$=4(\ln 2-1-0)=4(\ln 2-1)=4\ln\frac{2}{e}.\ \square$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (неопределенность типа 1^∞).

Решение. Применим метод вычисления подобных пределов, описанный в §21.
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right\}^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$
$$=\left\{\lim_{x\to 0}\left[1+\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.\ \square$$

Анализируя приведенные выше примеры, читатель может получить представление о приемах вычисления пределов, которые применяются чаще всего.

Так, при отыскании предела отношения двух многочленов относительно x при $x\to\infty$ полезно предварительно разделить и числитель, и знаменатель на x^n, где n — наивысшая степень этих многочленов (см. пример 1). Аналогичный прием во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности, или, проще говоря, корни (см., например, пример 2). С похожей ситуацией мы встретились в примере 3. Там выяснилось, что как числитель, так и знаменатель являются при $x\to\infty$ бесконечно большими одного порядка роста (см. § 23), того же, что $\ln|x|$. В результате деления на $\ln|x|$ и того, и другого, мы смогли избавиться от иррациональности.

При вычислении предела отношения двух многочленов при $x \to a$ (где a — число)

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

в случае, когда $P(a) = Q(a) = 0$, рекомендуется сократить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на $x - a$ один или несколько раз (см. пример 4).

При отыскании предела выражений, содержащих иррациональности, нередко оказывается полезным перевод иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель (см. примеры 5, 7, 8).

При вычислении пределов от выражений, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, часто используется первый замечательный предел и его следствия. При нахождении пределов от выражений, содержащих логарифмическую и показательную функцию, во многих случаях используются следствия второго замечательного предела (см. примеры 8, 9, 10, 11 и примеры из § 20).

В примере 12 мы встретились с задачей отыскания предела степенно-показательной функции и применили прием вычисления подобных пределов, описанный в § 21.

Во многих случаях полезно вводить новую переменную (мы использовали этот прием в примерах 6 и 11).

В примерах, рассмотренных выше, мы нередко использовали формулы (примеры 3 и 4 из § 14)

$$\lim_{x \to x_0} 2^x = 2^{x_0}; \qquad \lim_{x \to x_0} \ln x = \ln(x_0) \quad (x_0 > 0).$$

В дальнейшем (в главе 4) мы сможем доказать, что этим свойством обладают все элементарные функции. В ряде случаев для вычисления пределов необходимо знание этого факта.

§ 23*. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций.

23.1. Сравнение бесконечно больших функций.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — две бесконечно большие при $x \to a$ (a — число или символ бесконечности) функции и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$, где $C \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются *бесконечно большими одного порядка роста* при $x \to a$. В частном случае, когда $C = 1$,

функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно большими.*

Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие одного порядка роста при $x \to a$, то символически это обозначается так:

$$f(x) \asymp g(x) \qquad (x \to a).$$

Для обозначения отношения эквивалентности принята символическая запись

$$f(x) \sim g(x) \qquad (x \to a).$$

Пример 1. Бесконечно большие при $x \to \infty$ функции $f(x) = -x^2 + 1$ и $g(x) = 2x^2 + 1$ имеют одинаковый порядок роста (но не эквивалентны):

$$-x^2 + 1 \asymp 2x^2 + 1 \qquad (x \to \infty).$$

Действительно,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2+1}{2x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Имеет место эквивалентность двух бесконечно больших при $x \to 0$ функций $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\frac{1+x}{x} \sim \frac{1}{x} \qquad (x \to 0),$$

поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x) = 1$.

Возможен также случай, когда $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$ и при этом $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ или, что равносильно, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ (допуская вольность речи, можно сказать, что «$f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ быстрее, чем $g(x)$»). В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой более высокого порядка роста*, чем $g(x)$.

Пример 3. Функция $f(x) = x^3 - 2$ является при $x \to \infty$ бесконечно большой более высокого порядка роста, чем $g(x) = x^2 + 4$. Действительно,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4}{x^3-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^3}} = 0,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Если $f(x) \asymp \dfrac{1}{(x-a)^n}$ $(n>0)$ при $x \to a$ (a — число), то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой порядка* n при $x \to a$. Если $f(x) \asymp x^n$ $(n>0)$ при $x \to \infty$, то $f(x)$ называется бесконечно большой порядка n при $x \to \infty$.

Пример 4. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + \ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)}$ является бесконечно большой порядка 2 при $x \to 0$:

$$\frac{1}{x^3 + \ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)} \asymp \frac{1}{x^2} \qquad (x \to 0).$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot f(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3 + \ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)}{\dfrac{x^2}{3}} \cdot \dfrac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(x + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)}{\dfrac{x^2}{3}} \cdot \dfrac{1}{3}\right)} = \frac{1}{0+\dfrac{1}{3}} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3.$$

23.2. Сравнение бесконечно малых функций.

Выше (в п. 23.1) мы рассматривали вопрос о сравнении бесконечно больших. Аналогичным образом можно сравнивать и бесконечно малые.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые при $x \to a$ функции (a — число или символ бесконечности). Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \qquad \text{где} \quad C \neq 0,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка малости* при $x \to a$ (символическое обозначение: $\beta(x) \asymp \alpha(x)$ при $x \to a$). В частном случае, когда $C = 1$, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* (символическое обозначение: $\beta(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$).

Пример 5. Бесконечно малые при $x \to 0$ функции $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$ и $\beta(x) = x$ — одного порядка малости (при этом они не эквивалентны):

$$\sqrt{1+x} - 1 \asymp x \qquad (x \to 0),$$

так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - 1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Пример 6. При $x \to 0$ справедливы эквивалентности (см. примеры из предыдущих параграфов):

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые при $x \to a$ функции. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем $\alpha(x)$, если существует бесконечно малая при $x \to a$ функция $\gamma(x)$ такая, что $\beta(x) = \alpha(x) \cdot \gamma(x)$, т.е.

$$\beta(x) = \alpha(x) \cdot (\text{б.м.}),$$

если использовать менее формальную запись (см. пример 6 из § 22).

Замечание 1. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции при $x \to a$, где a — число или один из символов бесконечности, причем $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой окрестности a (проколотой, если a — число). Очевидно, что $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$, в том и только в том случае, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$.

Пример 7. Бесконечно малая при $x \to 0$ функция $1 - \cos x$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем x. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Если $\alpha(x) \asymp (x-a)^n$ $(n > 0)$ при $x \to a$ (a — число), то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* n при $x \to a$.

Пример 8. Функция $1-\cos x$ является бесконечно малой порядка 2 при $x \to 0$, так как (см. пример 4 из § 20)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Замечание 2. Если $f(x)$ является бесконечно малой порядка n при $x \to 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=C\neq 0$, то функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=Cx^n+x^n\cdot(\text{б. м.}).$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=C$, то $\dfrac{f(x)}{x^n}=C+(\text{б. м.})$ (см. замечание из § 16). Умножая обе части равенства на x^n, получим

$$f(x)=Cx^n+x^n\cdot(\text{б. м.}).\ \square$$

В этом случае слагаемое Cx^n называется *главной частью* функции $f(x)$ при $x\to 0$.

Пример 9. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (пример 4 из § 20), то

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+x^2\cdot(\text{б. м.}).$$

Следовательно,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^2\cdot(\text{б. м.}).$$

Пример 10. Из эквивалентностей

$$x\sim\sin x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1 \qquad (x\to 0)$$

следует:

$$\sin x=x+x\cdot(\text{б. м.});$$
$$\ln(1+x)=x+x\cdot(\text{б. м.});$$
$$e^x=1+x+x\cdot(\text{б. м.}).$$

Выделение главной части может упростить выкладки при вычислении пределов (запись может стать короче и приобрести более обозримый, иногда более выразительный, вид).

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Так как $e^x=1+x+x\cdot(\text{б. м.})$ (см. пример 10), то

$$e^x+x=1+2x+x\cdot(\text{б. м.})=1+x(2+\text{б. м.}).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+x\cdot(2+\text{б. м.})]^{\frac{1}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+x\cdot(2+\text{б. м.})]^{\frac{1}{x(2+\text{б. м.})}}\right\}^{2+\text{б. м.}}=$$
$$=\left\{\lim_{x\to 0}[1+x(2+\text{б. м.})]^{\frac{1}{x(2+\text{б. м.})}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}(2+\text{б. м.})}=e^2.$$

$\square$

Задачи.

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x-2}{x^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[4]{4x^2+2}}{x+3}$.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+2}}{x+4}$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$.

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1+x^2}+x)$.

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x+4})$.

10. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2})$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 mx}{\sin^3 nx}$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

14. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 5x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 7x}{\ln\cos 4x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x-2)}{x^2-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$.

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

24. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$.

25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} 2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\pi-6x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

33. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

34. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-3^x}{\ln(1+x)}$.

36. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

37. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\log_5 x-1}{x-5}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{6^x-7^x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)\,(e^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+\operatorname{tg} x)}{\log_3(1+\sin 3x)}$.

41. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^x-8}{\sin\pi x}$.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\left(\sqrt[3]{1+3x^2}-1\right)}{x\cdot\ln\cos 3x}$.

43. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4}{x^2-1}$.

44. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4-1}{x^3+2}$.

45. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+5}{x^2+x+1}$.

46. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^{17}\cdot(x^2+3x)^5}{(x^2+1)^{11}\cdot(x+4)^5}$.

47. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

48. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^{100}-11x+2}{(1+x)^{100}}$.

49. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

50. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin(x+2)}{x+2}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2x}}$.

52. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

53. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

54. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{1-4x}$.

55. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2x+3}\right)^{3x+1}$.

56. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2+3x}\right)^{2x-4}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x+2}}$.

59. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

60. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

61. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

63. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

64. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}-1}{x\cdot\operatorname{tg}(\sin x)}$.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\ln(1+x)-1}{\operatorname{tg} x}$.

Ответы.

1. 2. **2.** -2. **3.** $\frac{3}{2}$. **4.** $\frac{4}{3}$. **5.** 3. **6.** 1. **7.** 0. **8.** 0. **9.** 3. **10.** 1. **11.** $\frac{5}{3}$. **12.** $\frac{m^3}{n^3}$. **13.** $-\sin a$. **14.** $\cos a$. **15.** 2. **16.** $-\frac{1}{6}$. **17.** $\frac{2}{3}$. **18.** $\frac{1}{4}$. **19.** $\frac{49}{16}$. **20.** $\sqrt{2}$. **21.** $\frac{1}{4}$. **22.** $\frac{1}{6}$. **23.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **24.** $\frac{1}{\cos^2 a}$. **25.** $-\frac{1}{\sin^2 a}$. **26.** 1. **27.** $\frac{4}{3}$. **28.** $-\frac{1}{54}$. **29.** $\frac{1}{2}$. **30.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **31.** π. **32.** 3. **33.** 0. **34.** -1. **35.** $\ln\frac{e}{3}$. **36.** $\frac{1}{e}$. **37.** $\frac{1}{5\cdot\ln 5}$. **38.** $\ln\frac{2}{5}:\ln\frac{6}{7}$. **39.** $-\frac{2}{3}$. **40.** $\frac{\ln 3}{\ln 1000}$. **41.** $-\frac{8\ln 2}{\pi}$. **42.** $-\frac{10}{9}$. **43.** 3. **44.** $-\infty$. **45.** 0. **46.** 1. **47.** 1. **48.** 7. **49.** -1. **50.** 0. **51.** $\sqrt{e}$. **52.** e. **53.** e^{-2}. **54.** e^{20}. **55.** 0. **56.** 0. **57.** 2. **58.** $\sqrt{2}$. **59.** e. **60** 1. **61.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **62.** e^2. **63.** $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. **64.** $\frac{3}{2}$. **65.** -1. **66.** 0.

Глава 4.

Непрерывные функции.

§ 24. Непрерывность функции.

24.1. Непрерывность функции в точке.

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, называется *непрерывной* в этой точке (или, что то же, при $x = a$), если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Подчеркнем, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции). При этом $f(a)$ существует и разность $f(x) - f(a)$ при $x = a$ обращается в нуль. Поэтому нам безразлично, будет ли x в своем стремлении к a принимать, в частности, значение a, или нет.

На языке «$\varepsilon - \delta$» определение 1 звучит так:

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, называется непрерывной при $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x из δ-окрестности точки a имеет место неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Термин «непрерывность» связан с интуитивным представлением о непрерывности (неразрывности) кривой. Если кривую, являющуюся графиком функции $f(x)$, представить себе в виде тонкой нити, то в случае, когда $f(x)$ непрерывна при $x = a$, эта нить в соответствующей точке не имеет разрыва.

Пример 1. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в каждой точке a. В самом деле, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, и этот предел совпадает со значением $f(a) = a^2$ (условие $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ выполняется).

Пример 2. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (см. пример 1 из § 13) не является непрерывной при $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует ($\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$; $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$) и, следовательно, условие $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(0)$ не выполнено.

Пример 3. Функция $f(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$ не является непрерывной при $x = 0$. В этом случае существует $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$ (пример 2 из § 14), но этот предел не совпадает со значением $f(0) = 0$.

Пример 4. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (ее график изображен на рис. 33) не является непрерывной при $x = 0$, так как $f(0)$ не существует (функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$).

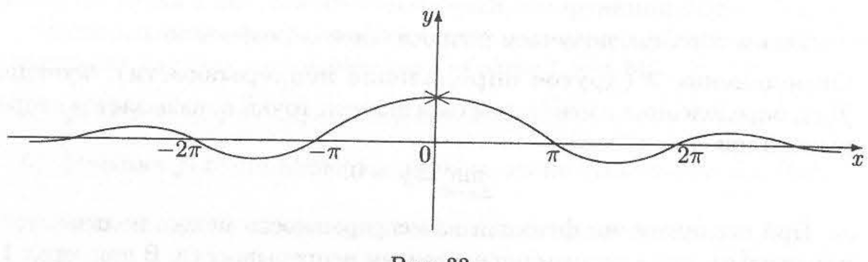


Рис. 33

Пример 5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$. Она определена при $x = 0$ (в отличие от функции $\dfrac{\sin x}{x}$), ее значение $f(0) = 1$ равно пределу $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

24.2. Другое определение непрерывности.

Условие непрерывности $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ равносильно условию

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0.$$

Обозначим разность $x - a$ символом Δx:

$$\Delta x = x - a$$

и назовем ее *приращением аргумента*. Тогда

$$x = a + \Delta x.$$

Разность $f(x) - f(a)$ обозначим символом Δy:

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

и назовем *приращением функции* в точке $x = a$, соответствующим данному приращению аргумента Δx.

Условие непрерывности $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$ после замены переменной $x = a + \Delta x$ примет вид

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, получаем равносильное определению 1

Определение 2 (другое определение непрерывности). Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, называется непрерывной при $x = a$, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

При исследовании функции на непрерывность можно пользоваться как первым, так и вторым определением непрерывности. В примерах 1–5 нам было удобно использовать определение 1. В следующем примере более удобным оказывается определение 2.

Пример 6. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна при любом $x = a$.

Решение. Воспользуемся определением 2. Для любой точки a и любого Δx имеем

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Так как $\sin\dfrac{\Delta x}{2}$ является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$, а $\sin\left(a + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ — ограниченная функция аргумента Δx, то

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

будучи произведением бесконечно малой на ограниченную, является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$. Итак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

и, следовательно, функция $y = \sin x$ непрерывна при любом $x = a$. □

Можно доказать, что не только $\sin x$, но и каждая из простейших элементарных функций (к ним относятся x^a, a^x, $\log_a x$, тригонометрические и обратные тригонометрические функции) непрерывна в любой точке своей области определения.

§ 25. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (проколотой или непроколотой) и в точке a непрерывность не имеет места, то точка a называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Непрерывность функции $f(x)$ в точке a может не иметь места в следующих случаях (вспомните определение 1 из § 24):

а) функция $f(x)$ не определена при $x = a$;

б) функция $f(x)$ определена в точке a, но не существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

в) функция $f(x)$ определена в точке a и существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, но $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Точки разрыва подразделяются на 2 класса:

1) *точки разрыва 1-го рода*, в которых существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (они могут отличаться друг от друга или быть равными — разрыв может иметь место и в том, и в другом случае);

2) *точки разрыва 2-го рода* — все остальные (для которых хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ не существует).

Точки разрыва 1-го рода, для которых оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ не только существуют, но, к тому же, равны:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

называются *точками устранимого разрыва.* Очевидно, что в этом случае существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но непрерывность не имеет места либо потому, что $f(x)$ не определена при $x = a$, либо потому, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Название «точка устранимого разрыва» оправдано тем, что если в этом случае доопределить функцию в точке a (если она не была определена при $x = a$) либо изменить ее значение в этой точке, положив его равным $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то получится непрерывная в точке a функция.

Частным случаем точек разрыва 2-го рода являются *точки бесконечного разрыва,* когда по меньшей мере один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ является бесконечным.

Пример 1. Определить характер точки разрыва $x = 0$ функции

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

(см. пример 1 из § 13).

Решение. Здесь мы имеем

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1, \qquad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Следовательно, $x = 0$ является точкой разрыва 1-го рода. □

Пример 2. Определить характер точки разрыва $x = 0$ функции

$$f(x) = (\operatorname{sgn} x)^2.$$

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0-0} (\operatorname{sgn} x)^2 = \lim\limits_{x\to 0+0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$ (см. пример 2 из § 14). Следовательно, существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$. Однако, он не равен значению $f(0) = 0$.

Точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. □

Пример 3. Определить характер точки разрыва $x = 0$ функции

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$ (см. примеры 2, 3 из § 19). Точка $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва. □

Пример 4. Определить характер точки разрыва $x = 0$ функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Решение. Не существует правый предел $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{0+0} \sin\dfrac{1}{x}$ (ни конечный, ни бесконечный), поскольку в любой сколь угодно малой правой полуокрестности точки $x = 0$ содержится бесконечно много точек, в которых $f(x) = 1$ (точки $x = \dfrac{2}{\pi(2n+1)}$, где n — четное) и $f(x) = -1$ (точки $x = \dfrac{2}{\pi(2n+1)}$, где n — нечетное). Рассуждая аналогично, можно показать, что не существует левый предел $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \sin\dfrac{1}{x}$ (ни конечный, ни бесконечный).

Следовательно, $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода. □

§ 26. Свойства непрерывных функций.

26.1. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Непосредственным следствием определения непрерывности (определение 1 из § 24) и теорем 3, 4 из § 16 является

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при дополнительном условии $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a.*

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна при $x = a$, то функция $cf(x)$ ($c = \text{const.}$) также непрерывна при $x = a$.*

Следствие 2. *Сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Следствие 3. *Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Из теоремы 1 и ее следствий непосредственно вытекает, что многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

— непрерывная функция при всех x и что дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

непрерывна всюду, за исключением тех значений x, где знаменатель обращается в нуль.

Из определения непрерывности (определение 1 из § 24) в силу теоремы 1 из § 19 следует

Теорема 2 (теорема о непрерывности сложной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = a$, $f(a) = b$ и пусть функция $F(y)$ непрерывна при $y = b$. Тогда сложная функция $F(f(x))$ непрерывна при $x = a$.*

26.2. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на промежутке (отрезке, интервале, полуинтервале), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Особенно важное значение при дальнейшем изучении математического анализа имеют функции, непрерывные на отрезке. Подчеркнем, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, непрерывна во всех точках отрезка, включая его концы. При этом под непрерывностью в точке a понимается *непрерывность справа* (т.е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$), а под непрерывностью в точке b — *непрерывность слева* (т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств. Справедливы следующие три теоремы (мы приводим их без доказательства).

Теорема 3. *Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, ограничена на нем.*

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на нем своего наименьшего значения m и своего наибольшего значения M, т. е. найдутся точки x_1, $x_2 \in [a; b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ ($f(x_1) = m \leqslant f(x) \leqslant M = f(x_2)$ для всех $x \in [a; b]$).*

Замечание. В обеих теоремах (3 и 4) весьма существенным обстоятельством является то, что функция $f(x)$ задана на отрезке. Эти теоремы верны в отношении функций, непрерывных на отрезке, но не верны в отношении функций, непрерывных на интервале или полуинтервале. Так, например, функция $\frac{1}{x}$, заданная на интервале $(0; 1)$, непрерывна на нем, но она не ограничена, так как $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Приведем еще один пример. Функция $y = x$, заданная на интервале $(0; 1)$, непрерывна на нем. У множества ее значений существует точная нижняя граница 0 и точная верхняя граница 1. Однако, ни в одной точке интервала $(0; 1)$ функция $y = x$ не принимает этих значений.

Теорема 5 (о промежуточных значениях) *Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, и пусть m и M — соответственно ее наименьшее и наибольшее значения. Тогда для всякого числа C, заключенного между m и M ($m < C < M$), найдется точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $f(\xi) = C$.*

Следствие. *Множество значений функции, заданной и непрерывной на отрезке, представляет собой также отрезок.*

Задачи.

В задачах 1–5 доказать непрерывность функции при любом x:

1. $y = x^3$.

2. $y = \cos x$.

3. $y = |x|$.

4. $y = \cos x^3$.

5. $y = \begin{cases} 1 + x & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - x & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$

В задачах 6—10 функция $f(x)$ не определена при $x = 0$. Доопределить функцию, задав $f(0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна при $x = 0$.

6. $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n — натуральное).

7. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

8. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$.

9. $f(x) = x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}$.

10. $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg} x$.

В задачах 11–17 найти точки разрыва функции, определить тип разрыва:

11. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 3}$.

12. $f(x) = x + \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$.

13. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

14. $f(x) = \sin\dfrac{2}{x}$.

15. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$.

16. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-1}}$.

17. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$.

Ответы.

6. n. **7.** $\dfrac{1}{2}$. **8.** 2. **9.** 0. **10.** 1.
11. $x = -3$, разрыв 2-го рода (бесконечный разрыв).
12. $x = 1$, разрыв 1-го рода.
13. $x = 0$, разрыв 1-го рода (устранимый разрыв).
14. $x = 0$, разрыв 2-го рода.
15. $x = 2$, разрыв 1-го рода.
16. $x = 1$, разрыв 2-го рода (бесконечный разрыв).
17. $x = -3$, $x = 3$; разрывы 2-го рода (бесконечные разрывы).

Приложение I.

Некоторые логические символы.

В математических предложениях (определениях, формулировках теорем и др.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Эти часто встречающиеся слова и выражения можно при записи математических рассуждений заменять логическими символами. Применение символов облегчает запись лекций и конспектирование и позволяет выразить мысль более коротко.

Наиболее употребительными логическими символами являются символы существования и общности, а также символы импликации и тождества.

Символы существования и общности.

Символ существования $\exists$, т.е. зеркальное отражение латинской буквы E (от английского слова *Existence* — существование), используется вместо слов «существует», «существуют» или «найдется», «найдутся».

Символ общности $\forall$, т.е. перевернутое латинское A (от английского слова *Any* — любой), используется вместо слов «любой», «каждый», «всякий» или «для любого», «для каждого».

Символ импликации.

Символ импликации $\Rightarrow$ означает «следует». Он выражает логическую связь между двумя высказываниями, передаваемую в виде словесного выражения «если ..., то ...».

Этот символ часто используют в сочетании с символом : (двоеточие), который означает «имеет место», «выполняется». Так, например, запись

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n > b \quad \Rightarrow \quad \exists N \text{ такой, что } \forall n > N: \quad x_n > b$$

означает

«Если последовательность (x_n) имеет предел и этот предел больше числа b, то существует номер N такой, что для всех номеров $n > N$ имеет место неравенство $x_n > b$» (это формулировка теоремы 3 из § 5).

Символ тождества.

Символ тождества $\iff$ означает равносильность утверждений, стоящих по разные от него стороны. Запись $A \iff B$, где A и B — два утверждения, выражает логическую связь передаваемую в виде словесного выражения «для того, чтобы было справедливо A, необходимо и достаточно, чтобы было справедливо B» или «A справедливо в том и только в том случае, когда справедливо B».

Например, запись

$$\exists \lim_{x\to\infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \; (N = N(\varepsilon)) \quad \text{такой, что}$$

$$\forall n > N \text{ и } \forall p: \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

означает

«Для того, чтобы последовательность x_n имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовал номер N (выбор которого зависит от ε) такой, что для любого $n > N$ и для любого натурального p имело место неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$» (это формулировка критерия существования предела последовательности — теорема 4 из § 5). Заметим, что в символической форме записи скобки выполняют ту же синтаксическую функцию, что и в словесной записи.

Символическая запись применяется и тогда, когда вводится новое понятие и дается его определение. В этом случае употребляется *символ равенства по определению* $\overset{def}{\iff}$ (значок *def* является началом латинского слова *definitio* — определение). Например, логическая запись определения предела последовательности (§ 5) выглядит так:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \; (N = N(\varepsilon)) \quad \text{такой, что}$$

$$\forall n > N: \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Приложение II.

Формула бинома (бином Ньютона[1]).

Имеет место следующая формула, которая носит название *формула бинома* (слово «бином » означает двучлен):

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \tag{1}$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}x^k + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}x^n.$$

Здесь символом $n!$ (читается: *n факториал*) обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Справедливость формулы бинома при любом натуральном n можно доказать, применив метод математической индукции (предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно).

Мы не будем здесь обсуждать замечательные свойства, которыми обладают коэффициенты формулы бинома (крайние коэффициенты равны единице; коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, одинаковы; сумма всех коэффициентов равна 2^n и др.).

Формула бинома применяется во многих разделах математики.

Следует заметить, что формула бинома справедлива не только для функции $(1+x)^n$, где n — натуральное число. Ее можно распространить

[1]Читателю наверняка знакомы имена великих математиков *Исаака Ньютона* (1643–1727) и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716), величайшей заслугой которых является разработка дифференциального и интегрального исчисления.

на функцию $(1+x)^a$, где a — произвольное действительное число. Разумеется, в случае, когда a не является целым неотрицательным числом (т.е. $a \neq 0, 1, 2, \dots$), функция $(1+x)^a$ не является многочленом. Однако, ее можно представить в виде бесконечной суммы, или, говоря точнее, в виде *ряда* (см. приложение III):

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

Равенство (2) справедливо в случае, когда $-1 < x < 1$.

В школьном курсе термин «ряд» не встречается, но там есть понятие «суммы бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии», и каждый школьник — старшеклассник знаком с формулой

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad (3)$$

где x удовлетворяет условию $|x| < 1$. Формулу (3) можно получить из формулы (2), если взять $a = -1$ и заменить x на $-x$.

Формулу (1) часто называют формулой бинома Ньютона (или же биномом Ньютона). Однако, она была известно задолго до Ньютона. Ньютон же указал в 1676 году на то, что имеет место формула (2) в случае, когда a — дробное или же целое отрицательное число (хотя строгое доказательство этого было дано лишь Абелем[1] в 1826 году).

[1] *Нильс Хенрик Абель* (1802–1829) — выдающийся норвежский математик, работы которого оказали большое влияние на развитие математической науки и привели, в частности, к созданию новых математических дисциплин: теории Галуа и теории алгебраических функций.

Приложение III.

Ряды. Начальные понятия.

В настоящем пособии упоминание о рядах имеется только в одном месте (приложение II). Здесь мы ограничимся лишь определениями самых начальных понятий теории рядов.

Символ

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (4)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — некоторая последовательность, называется ***числовым рядом*** (или просто рядом). При этом a_n (так сказать, «n-е слагаемое») принято называть ***n-ым членом ряда***. Сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

называется ***n-ой частичной суммой*** ряда.

Если последовательность частичных сумм (S_n) сходится, ряд (4) называется ***сходящимся***. При этом число S, которое является пределом последовательности частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

называется ***суммой ряда***. Если же последовательность (S_n) расходится, ряд (4) называется ***расходящимся*** (разумеется, расходящийся ряд суммы не имеет).

Примеры.

1) Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

— сходящийся. Его члены составляют геометрическую прогрессию с первым членом, равным единице, и со знаменателем, равным $\frac{1}{2}$. Из школьного курса известно, что в этом случае

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}; \qquad S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

2) Ряд

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

— расходящийся. В самом деле, в этом случае

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = n;$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Кроме числовых рядов, можно рассматривать ряды вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{5}$$

членами которых являются некоторые функции. Такие ряды называются ***функциональными***; их частичные суммы — функции переменного x. Совокупность X тех значений x, для которых функциональный ряд (5) сходится, называется ***областью сходимости*** ряда. Если x принадлежит области сходимости, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \qquad (x \in X).$$

Сумма ряда $S(x)$ является функцией, определенной на множестве X.

Пример. Областью сходимости ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

является интервал $(-1, 1)$.

В самом деле, члены ряда составляют геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен x. Из школьного курса известно, что

$$S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} \qquad (x \neq 1).$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ существует в том и только в том случае, когда $|x| < 1$. Сумма ряда $S(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$ (при $|x| \geqslant 1$ функция $S(x)$ не определена).

Правая часть равенства (2), т. е. ряд

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

называется ***биномиальным рядом***. Справедливы следующие два утверждения (мы приводим их без доказательства):

1) областью сходимости биномиального ряда является интервал $(-1; 1)$;

2) суммой биномиального ряда является функция

$$S(x) = (1 + x)^a \qquad (-1 < x < 1).$$