Ю. Н. Сударев

Вычисление пределов
Методическое пособие для студентов географического факультета МГУ

Хорошо известны следующие свойства пределов:

$$\begin{aligned}
&\text{если} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b, \quad \text{то} \\
&\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \\
&\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab, \\
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Однако, в подавляющем большинстве задач на вычисление пределов непосредственное применение формул (1) не представляется возможным.

Поэтому приходится искать обходные пути. При этом используются разные методы — от простейших до весьма сложных.

Простейший метод состоит в том, что мы преобразуем тождественно наше выражение так, чтобы в новом виде к нему уже можно было применить формулы (1).

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 15x^2 - 10x + 11}{x^3 - 50x + 120} \tag{2}$$

Мы видим, что и числитель, и знаменатель нашей дроби стремятся к бесконечности. А это означает, что у них нет настоящего предела и, значит, формулы (1) применить нельзя.

Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x^3. Получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+\dfrac{15}{x}-\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{11}{x^3}}{1-\dfrac{50}{x^2}+\dfrac{120}{x^3}} \tag{3}$$

Мы видим, что все члены, содержащие x, в дроби (3) стремятся к нулю, а пределы постоянных членов, разумеется, равны им самим. Поэтому здесь уже можно применить формулы (1).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+\dfrac{15}{x}-\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{11}{x^3}}{1-\dfrac{50}{x^2}+\dfrac{120}{x^3}} = \frac{2}{1} = 2$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \tag{4}$$

Здесь и числитель, и знаменатель стемятся к нулю, то есть имеют пределы. Но, поскольку предел знаменателя равен нулю, применить формулу для предела частного нельзя.

Домножим числитель и знаменатель дроби (4) на сумму соответствующих корней и применим формулу "Разность квадратов".

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$

Мы видим, что метод тождественных преобразований позволил нам в двух приведённых примерах решить задачу, но всё же область применения этого метода весьма ограничена.

Гораздо более сильный метод, имеющий очень большую область применения, основан на понятии эквивалентных величин. Познакомимся с этим понятием.

Мы будем рассматривать функции, отличные от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , то есть на множестве

$$\{\, x : 0 < |x - x_0| < \delta \,\}, \text{ где } \delta \text{ — некоторое положительное число.}$$

Другими словами, проколотая окрестность точки x_0 — это симметричный интервал с центром в точке x_0 радиуса (т. е. расстояния от центра до концевых точек) δ, из которого удалена сама точка x_0.

Назовём две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными при $x \to x_0$, если выполняется следующее соотношение:

$$\alpha(x) = \beta(x) \cdot q(x), \text{ где } \lim_{x \to x_0} q(x) = 1\,. \tag{5}$$

Легко видеть, что определение (5) равносильно следующему соотношению:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \tag{6}$$

То, что из (5) следует (6) очевидно, поскольку данная дробь как раз и равна тому самому $q(x)$ из определения (5) . Если, наоборот, дано (6), то обозначим данную дробь через $q(x)$ и мы немедленно получим (5).

Эквивалентность двух величин мы будем обозначать так:

$$\alpha(x) \sim \beta(x)$$

Вначале установим три простейших свойства эквивалентных.

1. $\alpha(x) \sim \alpha(x)$

В самом деле, $\alpha(x) = \alpha(x) \cdot 1$.
Здесь роль $q(x)$ играет тождественная единица.
Это свойство называют рефлексивностью.

2. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то и $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

Действительно, в силу определения (5), $\alpha(x) = \beta(x) \cdot q(x)$.
Значит, $\beta(x) = \alpha(x) \cdot \dfrac{1}{q(x)}$. Но $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) = 1$.
Следовательно, и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{q(x)} = 1$. Таким образом, $\beta(x) \sim \alpha(x)$.
Это свойство называют симметрией.

3. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

Действительно, $\alpha(x) = \beta(x) \cdot q_1(x)$, $\beta(x) = \gamma(x) \cdot q_2(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} q_1(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} q_2(x) = 1$. Отсюда
$\alpha(x) = \gamma(x) \cdot q_2(x) \cdot q_1(x) = \gamma(x) q(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) = \lim\limits_{x \to x_0} q_1(x) q_2(x) = 1$.
Это свойство называется транзитивностью. Оно позволяет нам заменять

одну функцию на эквивалентную ей другую функцию, другую — на третью и т. д. В итоге самая первая функция будет эквивалентна самой последней.

Кроме этих трёх простейших свойств имеются и другие очень важные для нас свойства.

4. Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = a$. Тогда и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = a$.

Это немедленно следует из определения (5) и формул (1). Но в силу свойства 2 $\beta(x)$ тоже эквивалентна $\alpha(x)$. А это означает, что если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = a$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = a$. Таким образом , две эквивалентные величины либо обе имеют одинаковый предел, либо обе предела не имеют. Именно на этом свойстве основано применение эквивалентных для вычисления пределов. Мы заменяем там, где это возможно, вычисление предела одной функции вычислением предела другой (разумеется, более простой) функции. Иногда этот приём приходится применять несколько раз, порой в сочетании с тождественными преобразованиями.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$, где $C \neq 0$, то $f(x) \sim C$.

Доказательство следует из определения (6):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{C} = \frac{C}{C} = 1\,.$$

6. Если $f(x) \sim \alpha(x)$ и $g(x) \sim \beta(x)$, то

$$\begin{gathered} f(x)g(x) \sim \alpha(x)\beta(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \\ f^p(x) \sim \alpha^p(x) \end{gathered} \tag{7}$$

Свойства (7) немедленно следуют из определения эквивалентных. Покажем это на примере второго из этих свойств.

$$f(x) \sim \alpha(x)\,, \quad \text{значит,} \quad f(x) = \alpha(x)\cdot q_1(x)\,, \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q_1(x) = 1$$

$$g(x) \sim \beta(x)\,, \quad \text{значит,} \quad g(x) = \beta(x)\cdot q_2(x)\,, \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q_2(x) = 1$$

Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{q_1(x)}{q_2(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot q(x)\,, \quad \text{где} \quad \lim_{x\to x_0} q(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{q_1(x)}{q_2(x)} = 1$$

А это и означает, что $\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Нужно особо отметить, что в иных случаях, отличных от перечисленных трёх, мы не можем делать аналогичные утверждения. В частности, нельзя заменять на эквивалентные слагаемые в сумме или разности. Это одна из типичных грубых ошибок, которую часто совершают студенты. Даже если при этом получится верный ответ, решение не будет засчитано, поскольку, заменив слагаемое на эквивалентную величину, мы теряем контроль над ситуацией и уже не можем сказать, верный у нас получился ответ или неверный. Теперь возникает естественный вопрос: а на какие, более простые, функции мы будем заменять наши? Поэтому, кроме перечисленных свойств, нам нужна ещё и таблица эквивалентных величин. Но до того, как мы выпишем эту таблицу, докажем одну очень полезную эквивалентность.

$$\text{При} \quad x \to \infty \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0x^n \quad (a_0 \neq 0) \tag{8}$$

При x, стремящемся к бесконечности, многочлен эквивалентен своему старшему члену. Действительно,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right).$$

Очевидно, выражение, стоящее в скобке, стремится к 1. А это и означает (8).

Зная это, мы могли бы решить пример 1 проще, безо всяких тождественных преобразований.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 15x^2 - 10x + 11}{x^3 - 50x + 120} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

А теперь приведём таблицу эквивалентных, где аргумент из соображений удобства обозначим буквой t.

При $t \to 0$

1. $\sin t \sim t$	6. $\ln(1+t) \sim t$
2. $\operatorname{tg} t \sim t$	7. $a^t - 1 \sim t\ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $\arcsin t \sim t$	В частности, $e^t - 1 \sim t$
4. $\operatorname{arctg} t \sim t$	8. $(1+t)^p - 1 \sim pt \quad (p \neq 0)$
5. $1 - \cos t \sim \dfrac{t^2}{2}$	

Вся эта таблица выводится постепенно в курсе высшей математики. Поэтому в нашем пособии мы не приводим доказательств.

Теперь решим целый ряд задач с использованием эквивалентных.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью для синуса и свойствами эквивалентных.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2}=4$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{5}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{5}(2x)}=\frac{5}{8}$$

Здесь мы воспользовались последней эквивалентностью из нашей таблицы.

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}$$

Вообще, получив задание, мы должны посмотреть, а нельзя ли что-нибудь сразу заменить на эквивалентную, ещё не зная, что будет дальше.

В нашем примере мы можем сразу заменить знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\sqrt[8]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\frac{1}{8}x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{x}.$$

Корни в числителе представляют собой биномы. Поэтому возникает мысль о применении последней табличной формулы. Однако, не хватает минус единицы. Это легко исправить.

$$8\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)-\left(\sqrt[7]{1-3x}-1\right)}{x}$$

Теперь, казалось бы, мы можем заменить каждую скобку на эквивалентную величину (и даже, кстати говоря, получим верный результат), но это недопустимо, так как нельзя заменять слагаемые на эквивалентные. Из этого положения можно выйти, разбив наш предел в разность двух пределов:

$$8\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)-\left(\sqrt[7]{1-3x}-1\right)}{x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}-8\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-3x}-1}{x}.$$

Наши действия законны в случае существования двух новых пределов. Но поскольку мы в конце концов эти пределы найдём, то тем самым будет обоснована и законность наших действий. В этих новых двух пределах бывшие скобки становятся уже целыми числителями, а значит, их теперь можно заменять на эквивалентные.

$$8\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}-8\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-3x}-1}{x}=$$
$$=8\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(2x)}{x}-8\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}(-3x)}{x}=8\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{7}\right)=8\cdot\frac{23}{21}=\frac{184}{21}$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$$

Всегда найдётся какое-то количество студентов, которые заменят здесь $\operatorname{tg}x$ и $\sin x$ на эквивалентные. В результате они получат тождественный ноль в числителе и скажут , что и ответ равен нулю. А это, конечно, не так. Здесь мы имеем, как раз, пример, когда замена на эквивалентные слагаемых в разности приводит к неверному результату. Правильным решением будет следующее:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}\,.$$

Вообще, стоит отметить, что если в процессе выкладок получается, что некоторое выражение эквивалентно нулю, это верный сигнал о какой-то грубой ошибке, ибо нулю ничто не эквивалентно! Скорее всего, была допущена незаконная замена на эквивалентные слагаемых в сумме.

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{(\sqrt{1+x\sin x}-1)-(\cos x-1)}=$$
$$=9\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

Вычислим отдельно два вспомогательных предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Таким образом, предел знаменателя равен $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, и мы получаем итоговый ответ, равный 9.

Пример 9.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(2^{x-1}-1\right)}{\cos(x-1)-1}$$

Если в некоторой задаче аргумент стремится не к нулю и не к бесконечности, то , как правило, нужно сделать замену переменной, приняв за новую переменную разность между аргументом и его предельным значением. Эта новая переменная будет уже стремиться к нулю. Причём, вспомогательные выкладки можно проводить в той же строке, что и основные. Это делается следующим образом:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(2^{x-1}-1\right)}{\cos(x-1)-1}=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ x=1+t\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+t}-1\right)\left(2^{t}-1\right)}{\cos t-1}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{5}\,t\cdot t\ln 2}{-\frac{t^2}{2}}=-\frac{2}{5}\,\ln 2\,.$$

Здесь две вертикальные линии как бы разрывают цепочку равенств и выделяют зону вспомогательных выкладок, не имеющую прямого отношения к знаку равенства.

Пример 10.

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\left|\begin{matrix}x-(-1)=t\\ x+1=t\\ x=t-1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1+\sqrt[3]{t-1}}{1+\sqrt[5]{t-1}}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{1-\sqrt[5]{1-t}}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-t}-1}{\sqrt[5]{1-t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}\,(-t)}{\frac{1}{5}\,(-t)}=\frac{5}{3}$$

Бывают, однако, ситуации (хотя и довольно редко), когда аргумент стремится не к нулю и не к бесконечности, но при этом делать замену переменной не стоит. Чаще всего такая ситуация возникает, когда мы имеем дело с тригонометрическими функциями.

Пример 11.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{1-\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+(\operatorname{tg} x - 1))}{1-\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1-\operatorname{ctg} x} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1-\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{tg} x - 1)\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = 1$$

Здесь мы воспользовались логарифмической эквивалентностью из нашей таблицы, где роль t играет выражение $\operatorname{tg} x - 1$.

Продолжим вычисление разнообразных пределов.

Пример 12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1) - (\sqrt[3]{\cos x} - 1)}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+(\cos x - 1)} - 1}{x^2} =$$
$$= -\frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(\cos x - 1)}{x^2} = -\frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(-x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2-3x-4}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) - \left(\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}} - 1\right)\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) - \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}} - 1\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$

Напомним, что, вынося x из-под корней чётной степени, надо ставить модуль, а в случае корней нечётной степени модуль ставить не нужно.

Пример 14.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right)-\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right)+\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}\right)+\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$$

Пример 15.

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-10^x}{3^x-7^x}=\lim_{x\to0}\frac{10^x\left((\frac{4}{10})^x-1\right)}{7^x\left((\frac{3}{7})^x-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{10^x\left(x\ln\frac{4}{10}\right)}{7^x x\ln\frac{3}{7}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{4}{10}}{\ln\frac{3}{7}}=\frac{\ln4-\ln10}{\ln3-\ln7}$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью с показательной функцией из нашей таблицы.

Пример 16.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\sin4x-\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}(e^x-1)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{7x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}x}{2\,\frac{x}{2}\cos\frac{7x}{2}}=1$$

Пример 17.

$$\lim_{x\to+\infty}x\big(\ln(2x{+}5){-}\ln(2x{+}1)\big)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{2x+5}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{4}{2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{4}{2x+1}=\frac{4}{2}=2$$

Теперь мы рассмотрим очень важный класс пределов, а именно, пределы от так называемой показательно-степенной функции, у которой изменяются одновременно и основание, и показатель степени. (Разумеется, у такой функции недопустима замена на эквивалентную ни основания, ни показателя степени.) В простейшем случае, когда не возникает неопределённости, мы можем сразу найти ответ.

Пример 18.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{3x-2}{x+4}}$$

Мы видим, что основание стремится к 2, а показатель степени стремится к 3. Следовательно, ответ равен $2^3 = 8$.

Но в подавляющем большинстве задач возникает неопределённость. Особенно часто встречается случай, когда основание стремится к единице, а показатель — к бесконечности.

Пример 19.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

Воспользуемся так называемым "основным логарифмическим тождеством":

$$a = e^{\ln a} \qquad (a > 0)$$

В качестве a возьмём нашу функцию

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = e^{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}} = e^{x\ln\frac{x+1}{x-1}}$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\frac{x+1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x-1}}$$

То, что предел экспоненты равен экспоненте от предела, следует из одной теоремы в курсе высшей математики, поскольку экспонента непрерывна при всех значениях показателя. Таким образом, вычисление предела показательно-степенной функции свелось к вычислению предела некоего произведения в показателе степени. Заметим, что выражение под логарифмом стремится к единице, а значит, действует соответствующая эквивалентность. Имеем:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x-1+2}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\,\frac{2}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = e^{2}\,.$$

Пример 20.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{2x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Пример 21.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 3x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2\cos 3x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin 2x\sin(-x)}{x^2\cos 3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2\cos 3x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot 2x\cdot x}{x^2\cos 3x}} = e^4$$

Пример 22.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} = \left|\begin{matrix} x-\dfrac{\pi}{4}=t \\ x=t+\dfrac{\pi}{4}\end{matrix}\right| = e^{\lim\limits_{t\to0}\operatorname{tg}^2\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\operatorname{ctg}^2 2t\cdot\ln(\cos 2t)} = e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2t}\cdot\ln\left(1+(\cos 2t-1)\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{4t^2}(\cos 2t-1)} = e^{-\lim\limits_{t\to0}\frac{2t^2}{4t^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Пример 23.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \left|\begin{matrix} x-\dfrac{\pi}{4}=t \\ x=t+\dfrac{\pi}{4}\end{matrix}\right| = e^{\lim\limits_{t\to0}\operatorname{tg}\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{t\to0}\operatorname{ctg} 2t\ln\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}}$$

Здесь мы воспользовались формулой дополнения, а также формулой для тангенса суммы. Напомним её.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Продолжим вычисления.

$$e^{-\lim\limits_{t\to0}\operatorname{ctg} 2t\ln\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}} = e^{-\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\operatorname{tg} 2t}\ln\left(1+\left(\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}-1\right)\right)} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}} = e^{-\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{t(1-\operatorname{tg} t)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Пример 24.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}+x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\left(e^{3x}+x-1\right)\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}+x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)+x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}+1} = e^4$$

Здесь нужно было правильно сгруппировать выражение под логарифмом и разбить предел показателя в сумму двух пределов.

Некоторые студенты, решая эту задачу, заменяют экспоненту единицей на том основании, что она, мол, стремится к единице. При этом они получают неверный ответ e. Замена экспоненты на единицу — это замена слагаемого в сумме на эквивалентную, что является незаконной операцией, которая и приводит к ошибке.

Решим ещё одну задачу подобного типа.

Пример 25.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 4x+2x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos 4x+2x^2)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+(\cos 4x+2x^2-1)\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos 4x+2x^2-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos 4x-1)+2x^2}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{(4x)^2}{2}}{x^2}+2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-8x^2}{x^2}+2} = e^{-6}$$

Пример 26.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с пределом не функции, а последовательности. Конечно, предел функции и предел последовательности — это разные вещи. Однако, свойства этих пределов совершенно аналогичны. В частности, для последовательностей справедлива вся теория эквивалентных величин, включая таблицу. Поэтому, с практической точки зрения, нам всё равно — имеем ли мы дело с непрерывно меняющимся аргументом x или с дискретно меняющимся аргументом n.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{2}{n}\right)^{n^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(\cos\frac{2}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\left(\cos\frac{2}{n}-1\right)\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\cos\frac{2}{n}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(-\frac{4}{2n^2}\right)} = e^{-2}$$

Решим ещё две задачи на предел последовательности.

Пример 27.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(a^{\frac{\arcsin n}{n^2}} - 1\Big) \qquad (a > 0,\, a \neq 1)$$

$\arcsin n$ — величина ограниченная, которая при $n \to \infty$ стремится к $\frac{\pi}{2}$. Строго говоря, $\arcsin n$ стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $n \to +\infty$, но, когда речь идёт о пределе последовательности, предполагается, что n — натуральное число, так что знак $+$ перед символом ∞ обычно не ставится.

Таким образом, показатель степени стремится к нулю, а значит, справедлива соответствующая эквивалентность.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(a^{\frac{\arcsin n}{n^2}} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{\arcsin n}{n^2}\ln a = \frac{\pi}{2}\ln a$$

Пример 28.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}{n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}{n^2}$$

В знаменателе мы воспользовались тем, что при аргументе, стремящемся к бесконечности, многочлен эквивалентен своему старшему члену.

В числителе у нас стоит сумма первых n членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 2. Как хорошо известно, сумма первых n членов S_n арифметической прогрессии

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

В нашем случае

$$S_n = \frac{\big(1 + (2n-1)\big)n}{2} = n^2$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + \ldots + (2n-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Мы познакомились с различными видами задач на вычисление пределов. Возникает вопрос: а существуют ли такие задачи, которые даже с помощью эквивалентных величин не удаётся решить? Разумеется, такие задачи существуют. Например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

Как бы мы ни старались, с помощью имеющихся у нас средств мы не сможем решить эту задачу. (Мы оставляем здесь в стороне так называемое правило Лопиталя, основанное совсем на других принципах.) Имеется гораздо более мощный, но и более сложный, метод так называемых асимптотических разложений, позволяющий найти, практически, любой предел. Однако, в программу географического факултета МГУ он не входит.

Тем, кто заинтересуется этим методом, могу рекомендовать моё пособие, которое выложено на сайте кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ в разделе "Материалы для дистанционного обучения". Называется это пособие: "Математическое пособие по вычислению пределов для механико-математического факультета МГУ".